

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

**CENÁRIOS ANIMADOS NO ENSINO DE LIMITE DE
FUNÇÕES REAIS**

Emili Boniecki Carneiro

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

CENÁRIOS ANIMADOS NO ENSINO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS

Emili Boniecki Carneiro

Orientador(es):
Maria Ivete Basniak
Dion Ross Pasievitch Boni Alves
Apoio: Capes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa *Tecnologia, diversidade e cultura em Educação matemática*, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

União da Vitória
Abril de 2025

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Boniecki Carneiro, Emili

Cenários animados no ensino de Limites de funções reais / Emili Boniecki Carneiro. -- União da Vitória-PR, 2025.
158 f.

Orientador: Maria Ivete Basniak.

Coorientador: Dion Ross Pasievitch Boni Alves.


Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2025.

1. Educação Matemática. 2. Cenários animados no GeoGebra. 3. Cálculo Diferencial e Integral. 4. Ensino de Limites de funções reais de uma variável real. I - Basniak, Maria Ivete (orient). II - Ross Pasievitch Boni Alves, Dion (coorient). III - Título.


Emili Boniecki Carneiro

CENÁRIOS ANIMADOS NO ENSINO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS


Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **MARIA IVETE BASNIAK**
Data: 24/06/2025 14:03:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Maria Ivete Basniak – Presidente da Comissão Examinadora
UNESPAR

Documento assinado digitalmente
 **SERGIO CARRAZEDO DANTAS**
Data: 23/06/2025 16:48:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Sérgio Carrazedo Dantas - Membro da Banca
UNESPAR

Documento assinado digitalmente
 **MONICA SUELEN FERREIRA DE MORAES**
Data: 24/06/2025 11:21:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Mônica Suelen Ferreira de Moraes - Membro da Banca
UFT

Resultado: Aprovado

União da Vitória
Abril de 2025

*Dedico o presente trabalho àqueles que lutam pelo direito de todos os seres humanos
à vida para além da sobrevivência. Proletários de todos os países, uni-vos!*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, colaboraram com o presente trabalho. Às mulheres incríveis pelas quais cultivo uma admiração gigantesca: Adrieli, Bruna, Camila, Daniela, Eliandra, Patrícia, Taimara e Vanessa.

Aos meus orientadores, Dr. Dion e Dra. Maria Ivete, pela paciência e pelas horas dedicadas a mim e ao meu trabalho. Agradeço pelo carinho e cuidado nas conversas e correções, pela exigência no rigor científico, didático e matemático. Gostaria de registrar aqui a minha admiração por vocês.

Aos membros da banca, Dra. Mônica Moraes e Dr. Sérgio Dantas, pelas contribuições e olhar crítico, assim como aos participantes do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística (GEPTeMatE), que contribuíram ao longo de debates, da leitura crítica e discussão do planejamento das aulas desenvolvidas para esta dissertação, especialmente ao Professor Dr. Everton Estevam Goldoni pelas perguntas difíceis de serem respondidas.

Ao professor Dr. Felipe Wisniewski, pela inspiração como professor e pesquisador.

Aos meus pais, Willian e Juliana, e à minha família, pelo amor incondicional e a compreensão nos momentos de ausência.

A Jaqueline, pela surpresa indescritível que foi ter te encontrado pela vida, pelos dias de escrita e apoio emocional. Agradeço profundamente pela sua amizade. Obrigada por persistir e me ensinar que ser professora/pesquisadora vai muito além de um título no papel.

A Laura, por sua companhia, amizade sincera e acolhimento nos dias difíceis. A atenção e carinho dedicada nesse processo deixou minha rotina mais leve, repleta de amor e admiração mútua. Obrigada por me ensinar que o respeito por nós mesmas é indispensável.

Thiago, obrigada por estar presente ao longo dos dias e me incentivar a continuar um pouquinho mais em cada um deles. A felicidade que cultivo pela sua existência aquece meu coração, e apesar da minha memória fraca, de você eu não esqueço.

A todas as mulheres que me trouxeram até aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Capes.

RESUMO

No âmbito do ensino de Cálculo, pesquisadores têm se dedicado a discutir e propor estratégias que possibilitem, ao professor, diferentes práticas pedagógicas. Neste trabalho, investigamos o ensino do conceito de Limite de funções reais de uma variável real, no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo da pesquisa é identificar potencialidades e limitações do uso de cenários animados construídos com o software GeoGebra, aliados a tarefas exploratórias para o ensino desse conceito. Por meio de uma revisão bibliográfica envolvendo pesquisas brasileiras, sobretudo dissertações e teses que abordaram dificuldades no ensino de Limites, foi elaborado um quadro teórico embasado em autores que discutem obstáculos epistemológicos na aprendizagem desse conceito, servindo como base para nossa análise. A metodologia adotada consistiu em uma intervenção realizada com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, em uma turma da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma universidade pública. Durante essa intervenção, foram coletados registros e gravações das interações entre os estudantes, ao resolverem as tarefas propostas e explorarem os cenários animados. A análise focou na identificação dos desafios e obstáculos epistemológicos associados ao ensino do conceito de Limite, destacando também as potencialidades dos cenários animados para fomentar discussões e facilitar a construção desse conceito no Ensino Superior. Os resultados indicam que esses cenários, aliados às tarefas exploratórias, possibilitam uma contextualização eficaz para discutir tanto Limites quanto Limites no infinito, oferecendo um ambiente propício para a superação dos obstáculos epistemológicos identificados. Além disso, o uso do software GeoGebra amplia o leque de estratégias didáticas disponíveis, proporcionando, ao professor, ferramentas para promover reflexões sobre Limites de funções reais de uma variável real.

Palavras-chave: Educação Matemática; GeoGebra; Cálculo Diferencial e Integral; Obstáculos epistemológicos; Tarefa de natureza exploratória.

ABSTRACT

In the context of teaching Calculus, researchers have dedicated themselves to discussing and proposing strategies that allow teachers to employ various pedagogical practices. In this study, we investigate the teaching of concept of limits of real-valued functions of a real variable within the framework of Differential and Integral Calculus course. The research aims to identify the potentialities and limitations of using animated scenarios created with GeoGebra software combined with exploratory tasks for teaching this concept. Through a literature review involving Brazilian studies, particularly theses and dissertations addressing difficulties in teaching limits, a theoretical framework was developed based on authors who discuss epistemological obstacles related to learning this concept, serving as foundation for our analysis. The adopted methodology involved an intervention carried out with students enrolled in a Mathematics Education program, specifically within a Differential and Integral Calculus class at a public university. During this intervention, recordings and notes of student interactions were collected as they engaged in solving tasks and exploring animated scenarios. The analysis focused on identifying epistemological challenges and obstacles associated with teaching the concept of limits, highlighting also the potential of animated scenarios to foster discussions and facilitate the construction of this concept at the university level. The results indicate that such scenarios, in conjunction with exploratory tasks, effectively provide a contextual framework to discuss both finite limits and limits at infinity, offering a conducive environment for overcoming identified epistemological obstacles. Furthermore, using GeoGebra software expands the range of teaching strategies available, providing teachers with effective tools to encourage reflection on limits of real-valued functions of a real variable.

Keywords: Mathematical Education; Geogebra; Differential and Integral Calculus; Epistemological Obstacles; Exploratory task.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - The Passion of Creation	14
Figura 2 - Cenário animado Abelha	18
Figura 3 - Página do projeto dos cenários animados	19
Figura 4 – mapa da essência do Cálculo.....	28
Figura 5 - Cubo de lado unitário no GeoGebra	56
Figura 6 - Resolução 1	57
Figura 7 - Paradoxo da escada	57
Figura 8 - Polígono de n lados.....	58
Figura 9 - Bola quicando	60
Figura 10 - Bola quicando	61
Figura 11 - Possibilidades de representação da aleatoriedade.....	61
Figura 12 - Pingos de chuva	62
Figura 13 - Esquema de tarefas	65
Figura 14 - Cenário animado Velocímetro	71
Figura 15 - Cenário animado Flecha	79
Figura 16 - Estratégia do grupo A	95
Figura 17 - Resposta do Grupo F.....	96
Figura 18 - Resolução do grupo C.....	96
Figura 19 - Resposta do Grupo G.....	98
Figura 20 - Resposta do Grupo H.....	99
Figura 21 - Resolução do grupo B.....	100
Figura 22 - Resposta do Grupo B	102
Figura 23 – Resolução do grupo H.....	103
Figura 24 - Resposta do grupo G.....	104
Figura 25 - Resposta do Grupo C	104
Figura 26 – Relatório do grupo C	105
Figura 27 - Resposta do Grupo D.....	106
Figura 28 - Resposta do Grupo E	107
Figura 29 - Resolução do Grupo D.....	115
Figura 30 – Relatório do Grupo D.....	116
Figura 31 - Relatório do Grupo B.....	117
Figura 32 – Resolução do grupo E	118

Figura 33 – Resposta do grupo E.....	118
Figura 34 – Resolução do grupo B	119
Figura 35 - Resposta do grupo E	120
Figura 36 – Resposta do grupo C	123
Figura 37 – Resposta do grupo E.....	123
Figura 38 – Resposta do grupo C	124
Figura 39 – Resposta do grupo C	126
Figura 40 – Construção do cenário do grupo E	126

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Lista da tese e dissertações selecionadas a partir do CTD.....	24
Quadro 2 - dificuldades em Cálculo segundo Artigue (1995)	33
Quadro 3 - Obstáculos epistemológicos relacionados a Limite segundo Cornu (2002)	33
Quadro 4 - Obstáculos epistemológicos relacionados a Limite, segundo Sierpinska (1985, 1987).....	33
Quadro 5 - Obstáculos epistemológicos.....	39
Quadro 6 - Lista da tese e dissertações selecionadas a partir do CTD.....	40
Quadro 7 - Características do GeoGebra que contribuem para a aprendizagem matemática .	55
Quadro 8 - Framework	66
Quadro 9 - Organização das aulas.....	69
Quadro 10 - A tarefa	72
Quadro 11 - Antecipações da questão 1	74
Quadro 12 - Antecipações da questão 2	75
Quadro 13 - Antecipações da questão 3	76
Quadro 14 - Antecipações da questão 4	77
Quadro 15 - Antecipações da questão 5	78
Quadro 16 - Tarefa Flecha	80
Quadro 17 - Antecipações da questão 1	81
Quadro 18 - Antecipações da questão 4	82
Quadro 19 - Antecipações da questão 5	82
Quadro 20 - Antecipações da questão 6	83
Quadro 21 - Antecipações da questão 7	83
Quadro 22 - Siglas dos participantes.....	86
Quadro 23 - Estrutura do quadro para levantamento de resultados de cada grupo	88
Quadro 24 - Tarefa Velocímetro	88
Quadro 25 - Resoluções do grupo A	90
Quadro 26 - Resoluções do grupo B	91
Quadro 27 - Resoluções do grupo C	91
Quadro 28 - Resoluções do grupo D	92
Quadro 29 - Resoluções do grupo E.....	92
Quadro 30 - Resoluções do grupo F.....	93
Quadro 31 - Resoluções do grupo G	93

Quadro 32 - Resoluções do grupo H.....	94
Quadro 33 - Tarefa Flecha	108
Quadro 34 - Resoluções do grupo A.....	109
Quadro 35 - Resoluções do grupo B	109
Quadro 36 - Resoluções do grupo C	110
Quadro 37 - Resoluções do grupo D	111
Quadro 38 - Resoluções do grupo E.....	111
Quadro 39 - Resoluções do grupo F.....	112
Quadro 40 - Resoluções do grupo G	112
Quadro 41 - Resoluções do grupo H.....	113
Quadro 42 - Obstáculos identificados nos resultados da Tarefa 1	127
Quadro 43 - Obstáculos identificados nos resultados	128
Quadro 44 – Potencialidades e limitações identificadas na pesquisa.....	130

LISTA DE SIGLAS

AH/SD	Altas Habilidades/Superdotação
CAS	Cálculo Algébrico Simbólico
CTD	Catálogo de Teses e Dissertações
GEPTeMatE	Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Matemática e Estatística
IC	Iniciação Científica
OBS	Open Broadcaster Software
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Pibid	Programa de Iniciação à Docência
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
SRM II	Sala de Recursos Multifuncional 2
TCT	Teoria Clássica dos Testes
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo
TRI	Teoria da Resposta ao Item
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UnB	Universidade de Brasília
Unespar	Universidade Estadual do Paraná
USF	Universidade Sem Fronteiras
USP	Universidade Estadual de São Paulo
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa

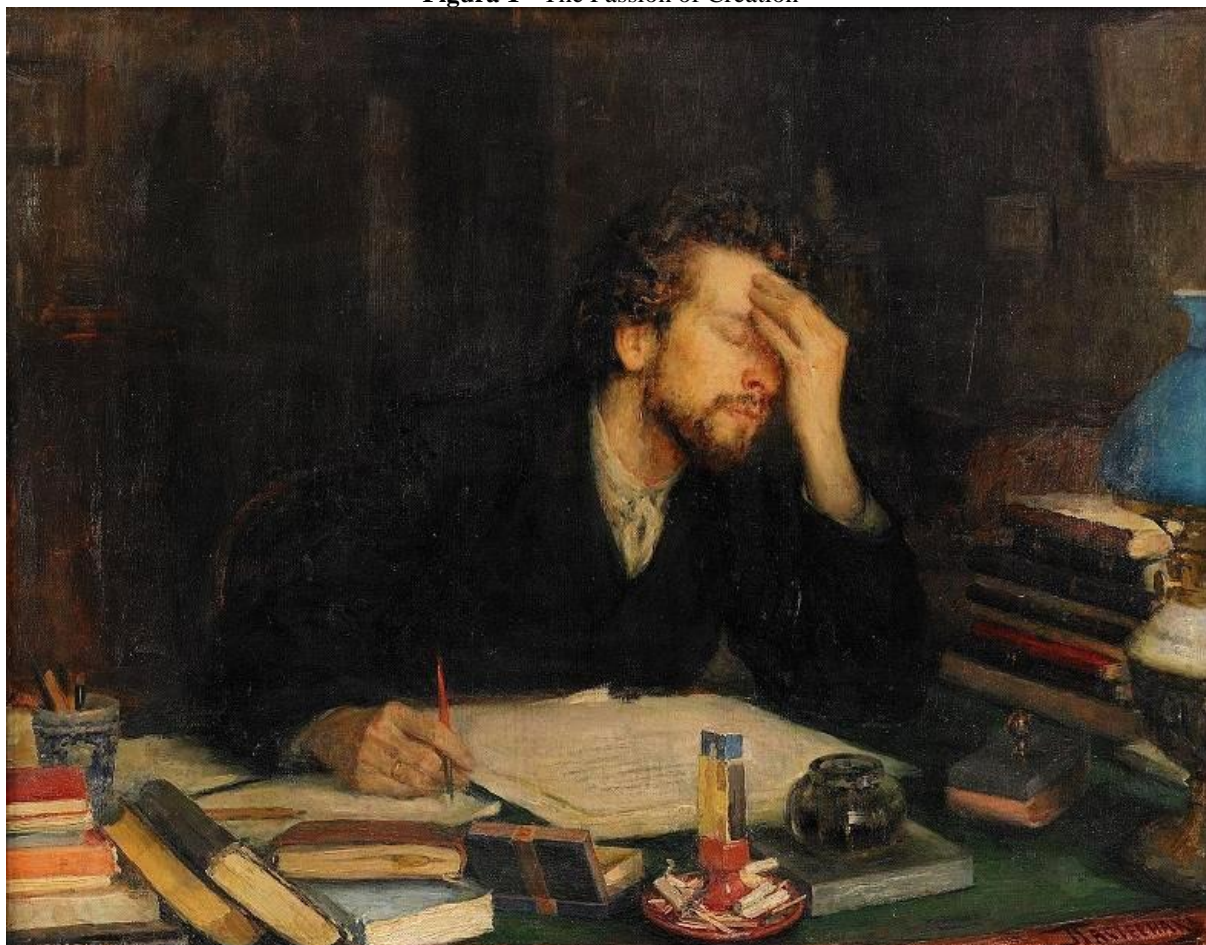
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Um breve histórico pessoal	16
1.2	Os cenários animados.....	17
1.3	Problemática.....	20
1.4	Objetivo da pesquisa	22
1.5	A organização da dissertação	22
1.6	Procedimentos metodológicos	23
2	LIMITES DE FUNÇÕES REAIS	27
2.1	Obstáculos na aprendizagem.....	30
2.1.1	Obstáculos Epistemológicos na aprendizagem de Limite	32
2.2	Obstáculos epistemológicos identificados por meio de pesquisas brasileiras.....	40
2.3	Considerações sobre a revisão de literatura	48
3	CENÁRIOS ANIMADOS: O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA.....	51
3.1	Teoria da cognição distribuída	51
3.2	O GeoGebra e os cenários animados.....	54
3.3	O uso do GeoGebra em tarefas de natureza exploratória.....	63
4	METODOLOGIA.....	69
4.1	Planejamento das aulas.....	69
4.2	A proposta pedagógica.....	70
4.2.1	Tarefa 1.....	71
4.2.2	Tarefa 2.....	78
4.3	Descrição dos encontros.....	84
4.4	Produção de dados.....	85
5	ANÁLISES	88
5.1	Resultados da tarefa <i>Velocímetro</i>	88
5.2	Resultados da tarefa <i>Flecha</i>	108
5.3	Síntese das análises	127
6	CONCLUSÕES.....	131
	REFERÊNCIAS	136
	APÊNDICE A – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO - VELOCÍMETRO	142
	APÊNDICE B – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO - FLECHA.....	143

APÊNDICE C – TAREFA 1 – CENÁRIO <i>VELOCÍMETRO</i>	144
APÊNDICE D - ANTECIPAÇÕES	147
APÊNDICE E - TAREFA 2 – CENÁRIO <i>FLECHA</i>	150
APÊNDICE F - ANTECIPAÇÕES	151
ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MAIORES DE 18 ANOS	153
ANEXO B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MENORES DE 18 ANOS	156

1 INTRODUÇÃO

Figura 1 - The Passion of Creation



Fonte: Leonid Pasternak (1892)

Uma frase que li¹ durante o processo de escrita desta dissertação representa, para mim, parte dos significados que o trabalho de Pasternak (1892) carrega: “O que sabemos é fruto da desilusão com aquilo que julgávamos saber; o que somos é fruto da desilusão com o que julgávamos ser” (Lopes, 1996, p. 254). Bachelard discorre nesse sentido ao refletir sobre os paradigmas da ciência moderna, que têm como aspecto essencial e constante o ato de se transformar e de transformar o meio ao redor. Transformar-se, aqui, no sentido de construir e desconstruir os significados que atribuímos ao conhecimento, um processo refletido no contexto em que nos inserimos, considerando que aprendemos e ensinamos dentro de um ambiente cultural, e que a cultura se torna parte da natureza de cada indivíduo (Vygotsky, 1989).

Quando Gaston Bachelard escreveu seu livro *O novo espírito científico*, publicado em 1934, ele vivenciava um contexto de revoluções científicas, marcado pelas descobertas no

¹ As partes que se referem às experiências da autora foram grafadas em primeira pessoa do singular.

mundo subatômico e pela ciência das partículas, a *microfísica*. Ao longo da obra, o autor argumenta que a ciência não avança de forma linear, por meio do acúmulo contínuo de conhecimentos. Ao contrário, seu desenvolvimento ocorre por rupturas epistemológicas, momentos em que novas teorias rompem com as anteriores e transformam radicalmente a forma de compreender o mundo.

Para Bachelard (1934-1996), a ciência não é uma descrição da realidade, mas uma construção elaborada a partir de modelos, experimentos e conceitos abstratos. Nesse processo, surgem barreiras no próprio pensamento que dificultam a compreensão de novos conceitos. Por isso, o conhecimento científico deve estar sempre em revisão, questionando suas próprias bases e transformando-se. Em vez de ser algo fixo e definitivo, a ciência deve estar em constante movimento e investigação, e nas ciências humanas, essa preocupação estende-se também à compreensão das peculiaridades do pensamento humano, suas interações e o contexto que ele mesmo constrói.

Reconhecemos que o conhecimento se modifica e transforma-se junto com o indivíduo, como parte de um processo contínuo, não cumulativo, mas moldável. O conhecimento científico não se limita à transcrição da experiência sensível, sendo, na verdade, uma construção coletiva que frequentemente rompe com o senso comum. Nesse contexto, ao elaborar novos paradigmas, elaboramos também a nós mesmos. Esse processo é permeado por desafios e prolonga-se ao longo de toda a nossa existência. Para mim, Pasternak (1892) conseguiu representar, em sua pintura, a complexidade do ato de criar, escrever e traduzir ideias para o papel, possivelmente refletindo os obstáculos que ele próprio enfrentou nesse processo.

Esta dissertação apresenta discussões que atravessam esse contexto de desafios e obstáculos no processo de ensino. Propomos compreender o cenário investigativo, que é o ensino de Limites na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior brasileiro. Com base nesse reconhecimento, feito por meio de uma revisão de literatura em dissertações e teses, elaboramos um quadro teórico composto por pesquisadores que propõem uma categorização dos desafios enfrentados no processo de aprendizagem do conceito de Limite. A partir desse referencial, desenvolvemos uma proposta pedagógica, na perspectiva da Investigação Matemática, com o uso de tarefas de natureza exploratória aliadas a cenários animados. Os dados produzidos por meio desta intervenção foram analisados à luz do quadro teórico e das categorias propostas pelos autores selecionados.

No desenvolvimento desta pesquisa, utilizamos o termo *Limite* com letra inicial maiúscula ao nos referirmos ao conceito matemático, e com inicial minúscula quando o termo

indica uma operação matemática, ou quando seguimos a notação adotada por outros autores referenciados.

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico pessoal da pesquisadora com o objeto de estudo, com o objetivo de contextualizar e justificar a realização deste trabalho, não apenas do ponto de vista teórico, mas também pessoal. Em seguida, expomos a problemática e os objetivos que esta pesquisa se propôs a investigar. Por fim, descrevemos brevemente a estrutura da dissertação e os procedimentos metodológicos adotados ao longo do estudo.

1.1 Um breve histórico pessoal

Usualmente, pesquisadores relatam seu histórico pessoal com o objeto de pesquisa como forma de esclarecer as motivações que os conduziram à investigação. A relevância desse processo justifica-se pelo fato de que não é possível dissociar a pesquisa da experiência pessoal do pesquisador, uma vez que ela é influenciada por suas crenças, vivências e ideologias. Concordo com Dewey (1963), quando afirma que a experiência não é construída de forma isolada dentro de um indivíduo, mas moldada pelas ações de gerações anteriores e pelos fatores externos que nos cercam.

Dessa forma, reconhecendo a importância dessa abordagem, opto por apresentar uma breve exposição da minha relação com o objeto de pesquisa, que envolve o uso de cenários animados no ensino de Cálculo. Esse vínculo teve início há seis anos, quando ingressei na graduação em Matemática e estabeleci uma relação simultânea com o GeoGebra e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Como muitos licenciandos, enxerguei no Cálculo um desafio instigante, capaz de alimentar meu ego ao me fazer acreditar, ainda que ingenuamente, que o havia compreendido. Já o GeoGebra despertou em mim uma curiosidade semelhante, provocando-me constantemente. Meu primeiro contato com os cenários animados ocorreu durante uma apresentação na Semana de Matemática, conduzida por uma graduanda vinculada ao Programa de Iniciação Científica. Demonstrei interesse em participar de um projeto semelhante e, a partir disso, formamos um pequeno grupo para discutir o potencial pedagógico dos cenários animados.

Meu envolvimento com os cenários animados estendeu-se para além da graduação, por meio de um projeto de extensão vinculado ao programa Universidade Sem Fronteiras (USF), durante o mestrado. Esse projeto contou com a participação de pessoas que me fizeram perceber ainda mais o potencial dos cenários animados para a discussão de conceitos matemáticos. Ao

longo desse processo, revisamos a dinâmica das aulas com cenários animados, ampliamos seu uso para além dos alunos com indicativos de Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD), e realizamos reuniões voltadas à exploração de novas possibilidades pedagógicas. Essas experiências expandiram significativamente minha percepção sobre o uso dos cenários animados no ensino, além de levantarem questionamentos que foram fundamentais para motivar a investigação conduzida nesta dissertação.

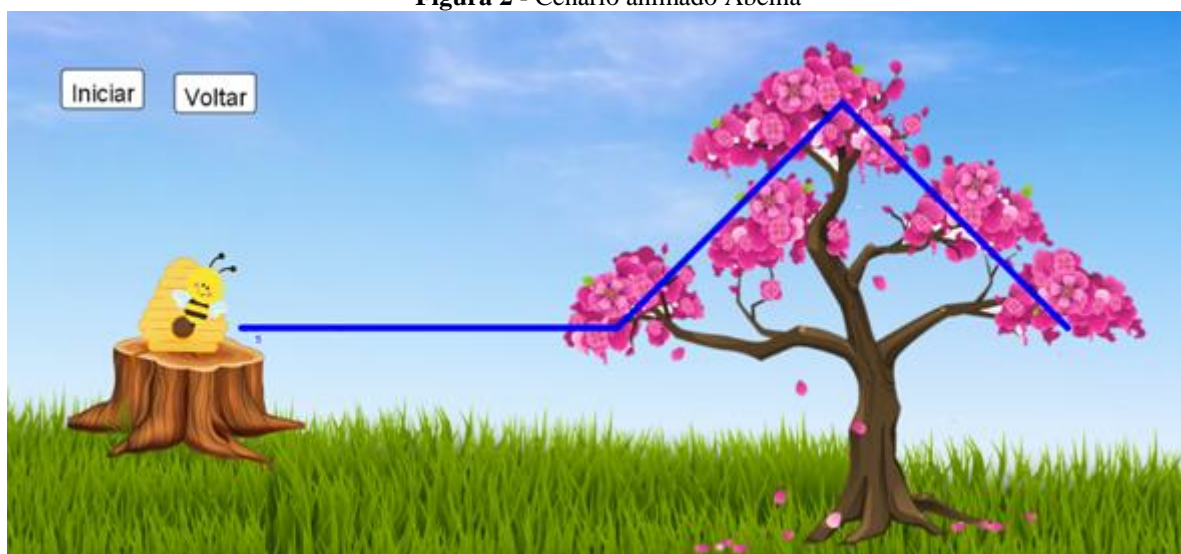
Na seção seguinte, apresento o contexto de criação do termo cenário animado, parte essencial desta pesquisa.

1.2 Os cenários animados

Esta dissertação insere-se em um contexto mais amplo de pesquisa sobre o uso de animações e simuladores no software GeoGebra, com foco na investigação de seu potencial para o ensino e a aprendizagem de Matemática. A pesquisa integra um projeto de maior alcance, que envolve pesquisadores de diferentes países da América Latina, dedicados a investigar o potencial das construções no GeoGebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior.

Ao perceberem a possibilidade de animar e contextualizar as construções no GeoGebra, os acadêmicos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), campus de União da Vitória, passaram a explorar essa ideia durante os encontros semanais do grupo (Koftun, 2023). À medida que os participantes criavam representações de situações cotidianas ou fictícias, como chuva caindo, contagens regressivas ou o funcionamento de um semáforo, o termo *animação* começou a ser utilizado (Basniak, 2020). Foi assim que surgiu o desenvolvimento dos chamados cenários animados no GeoGebra.

Figura 2 - Cenário animado Abelha²



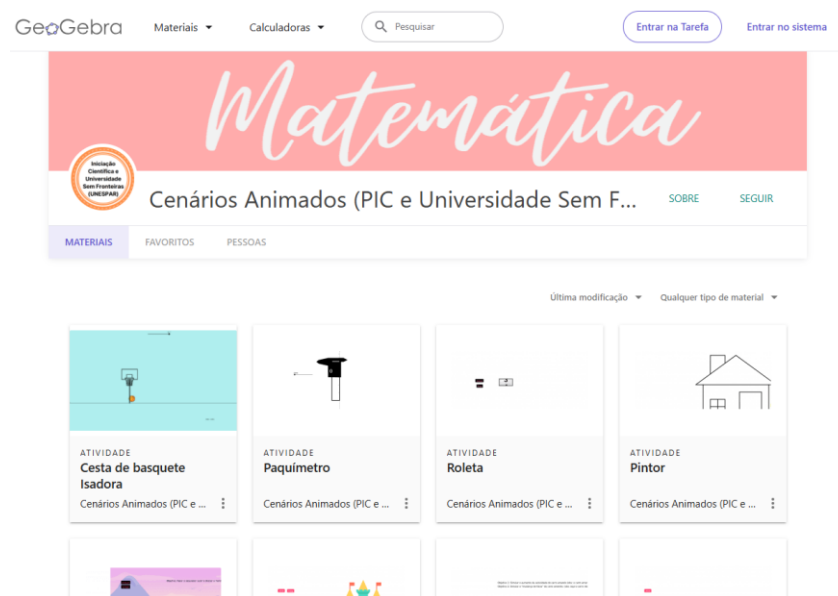
Fonte: Bueno, Basniak e García Cuéllar (2023a, p. 409).

O grupo identificou o potencial das construções animadas para abordar conteúdos de Matemática. A partir dessa constatação, projetos de pesquisa passaram a investigar o uso dessas construções e sua elaboração com alunos com indicativos de Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD). Em 2017, foi firmada uma parceria com uma professora da Sala de Recursos Multifuncional tipo II (SRM II), voltada a alunos com indicativos de AH/SD dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. As intervenções tiveram início em agosto de 2017, no contexto de projetos de Iniciação Científica (IC) (Koftun, 2023). Durante esses encontros, acadêmicos vinculados aos projetos de IC orientaram os alunos da SRM II na criação de diversas construções no GeoGebra. As pesquisas, em sua maioria, concentraram-se na investigação de como a construção de animações no software poderia favorecer a aprendizagem de Matemática (Basniak, 2020).

Inicialmente, os cenários no GeoGebra tinham como objetivo serem construídos com alunos da Educação Básica que apresentavam indicativos de Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD), no contexto da Sala de Recursos Multifuncional (SRM II). As primeiras ideias de construções foram elaboradas por um grupo de acadêmicos participantes do Pibid, no ano de 2016. A partir de então, foram desenvolvidos projetos de iniciação científica, projetos de extensão, minicursos e dissertações de mestrado ao longo dos anos, todos centrados nos cenários animados, incluindo o meu trabalho de conclusão de curso. Todos os cenários animados produzidos nesses projetos foram reunidos em uma página da comunidade GeoGebra, acessível por meio do link disponibilizado na nota de rodapé desta página.

² Acesso em: <https://www.geogebra.org/m/zqpwwvwt>

Figura 3 - Página do projeto dos cenários animados



Fonte: foto capturada da página (2025).

Os resultados foram significativos, indicando que a discussão de conteúdos matemáticos por meio das construções no GeoGebra favorecia “investigações e discussões sobre as características e particularidades das ferramentas matemáticas envolvidas, bem como sobre sua aplicabilidade na construção de animações, contribuindo para a construção de conceitos matemáticos” (Boruch; Basniak, 2018, p. 3). Basniak (2020) reforçou que as animações no GeoGebra incorporam conteúdos e conceitos matemáticos, enfatizando seu potencial como possibilidade para o ensino de Matemática.

Com a publicação dos resultados dessas pesquisas, o termo *cenário animado* foi convencionado pelo grupo de pesquisadores para caracterizar as construções animadas no GeoGebra. Nessas publicações (Bueno; Basniak, 2020, 2023; Basniak; Carneiro, 2021; Padilha dos Santos; Basniak, 2021), os cenários animados, até então referidos apenas como animações, são definidos como construções no software GeoGebra em que elementos matemáticos são vinculados a ferramentas que atribuem movimento à construção, criando uma cena animada (Koftun, 2023).

A discussão de conceitos matemáticos, amparada pela construção de cenários animados, tem demonstrado algumas potencialidades. Entre as contribuições para o ensino, destacam-se as pesquisas de Boruch e Basniak (2018), Basniak (2020) e Bueno e Basniak (2021). As potencialidades dessa abordagem têm sido citadas em diversos trabalhos desenvolvidos nos últimos anos (Basniak, 2020; Bueno; Basniak, 2020; Basniak; Carneiro, 2021; Padilha dos Santos; Basniak, 2021). Merecem destaque os resultados obtidos na pesquisa de Bueno,

Basniak e García Cuéllar (2023a, 2023b.), que discutiu funções de primeiro grau com estudantes com indicativos de Altas Habilidades/Superdotação.

Nesse contexto, surge a oportunidade de refletir sobre o uso de cenários animados na abordagem de conteúdos no Ensino Superior. Esta pesquisa foca especificamente no conteúdo de Limite, por compreendermos que ele é fundamental para a assimilação de outros tópicos do Cálculo. No entanto, essa abordagem poderia ser expandida futuramente para conteúdos relacionados a derivadas e integrais, o que representaria uma continuidade desta investigação.

1.3 Problemática

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral já passou por diversas mudanças e propostas de reforma, que resultaram em alterações, mas não solucionaram os problemas historicamente enfrentados por essa área. Internacionalmente, pesquisadores como David Tall e Anna Sierpinska discutem, desde a década de 1980, as dificuldades recorrentes no ensino desse campo específico do conhecimento (Rafael, 2017).

No que se refere à disciplina no Brasil, Lima (2013) afirma que, considerando o histórico de investigação realizado sobre o curso de Matemática da USP - o primeiro criado no país, é possível afirmar que:

a disciplina de Cálculo já nasceu sem identidade própria. Não existia no currículo original do curso e foi criada com o objetivo de fornecer pré-requisitos para o estudo da Análise Matemática. Não se implantou o ensino do Cálculo levando-se em conta os conceitos geradores do próprio Cálculo, suas ideias fundamentais e as importantes ferramentas matemáticas oriundas deste ramo do conhecimento; implantou-se, na verdade, uma pré Análise, mesmo não sendo esse o objetivo de Gomide ao propor, no início dos anos 1950, um curso de Cálculo precedendo o de Análise (Lima, 2013, p. 7).

Barufi (1999) comenta sobre a predominância da sequência Cauchy-Weierstrass na organização didática dos conteúdos programáticos da disciplina de Cálculo. Ele considera essa estrutura como o padrão predominante na disposição dos conteúdos da disciplina, nos casos investigados à época. Nesse modelo, o desenvolvimento do conteúdo segue a ordem: definição do conceito de Limite, seguida por Continuidade, Derivada e, por fim, Integral de uma função, a sequência “Limite-Continuidade-Derivada-Integral” (Rezende, 2003). Embora essa sequência possa sofrer variações de acordo com a instituição ou com a escolha do docente responsável pela disciplina, os resultados da pesquisa de Rezende (2003) confirmam que a

estrutura Cauchy-Weierstrass era a mais comum na década de 1990, corroborando a análise de Barufi (1999).

Atualmente, o ensino de Cálculo segue uma organização específica em cada instituição, dependendo do curso de graduação. Geralmente, a disciplina é subdividida em módulos, como Pré-Cálculo, Cálculo I, Cálculo II e, em alguns casos, Cálculo III. Em determinadas graduações, há disciplinas voltadas à área de Cálculo com duração de três a cinco semestres, oferecendo a base para diversas matérias específicas (Cominotti, 2020). Essas disciplinas costumam abranger diferentes aspectos do Cálculo, com ênfases distintas, dependendo do curso, como Engenharia, Matemática, Computação, entre outros.

Historicamente, a disciplina apresenta altos índices de reprovação nas universidades. Barufi (1999) destaca que, entre 1990 e 1995, as taxas de reprovação variaram entre 20% e 75% entre os estudantes da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), e não foram inferiores a 45% no Instituto de Matemática e Estatística da mesma universidade. Na Universidade Federal Fluminense (UFF), Rezende (2003) registra taxas de reprovação, entre 1996 e 2000, variando entre 45% e 95% no curso de Matemática.

Zeferino, Wrobel e Carneiro (2013) relataram que, na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), 46% dos estudantes matriculados em Cálculo I não foram aprovados. No segundo semestre de 2012, 32% dos estudantes da disciplina obtiveram nota inferior a 3,0, em uma avaliação com valor total de 10,0 pontos. Esses dados mais recentes estão em consonância com os resultados de Anderson e Loftsgaarden (1987), que constataram que apenas 46% dos estudantes matriculados em cursos de Cálculo, em uma universidade fora do Brasil, em 1987, obtiveram aprovação com nota D ou superior.

Diante desse panorama, surge a necessidade de a comunidade científica investigar os problemas e desafios enfrentados no processo de ensino de Cálculo, além de propor estratégias didáticas e recursos que contribuam para reduzir as dificuldades enfrentadas por estudantes e professores. Sierpinska (1987) discute, em sua pesquisa, os obstáculos epistemológicos relacionados à aprendizagem do conceito de Limite. Trabalhos de Tall (1993) e Artigue (1995) também buscam compreender as dificuldades associadas ao ensino dessa disciplina. A leitura de teses e dissertações, especialmente a de Rezende (2003), evidencia referências recorrentes a esses autores, além de Cornu (2002), cujas reflexões sobre as dificuldades na aprendizagem de Limite estão ancoradas no conceito de obstáculos epistemológicos.

Os obstáculos discutidos por esses autores dizem respeito a desafios enfrentados pelos estudantes no entendimento de conceitos fundamentais, que impactam diretamente na compreensão do conceito de Limite. Ainda que a disciplina de Cálculo não tenha como

finalidade suprir lacunas da Educação Básica, tais dificuldades configuram-se como obstáculos relevantes no processo de aprendizagem.

Diante dessa problemática, surge a pergunta de pesquisa: quais são as potencialidades e limitações do uso de cenários animados para o ensino do conceito de Limite de funções reais de uma variável real? Buscando responder a essa pergunta, formulamos o objetivo da presente pesquisa, apresentado a seguir.

1.4 Objetivo da pesquisa

Diante do contexto acima discutido, este trabalho propôs-se a identificar as potencialidades e limitações do uso de cenários animados construídos no Geogebra, aliados a tarefas de natureza exploratória para o ensino do conceito de Limite de funções reais.

1.5 A organização da dissertação

A presente dissertação está organizada em seis capítulos. O primeiro, de caráter introdutório, apresenta um panorama geral do contexto em que a pesquisa se insere, bem como a problemática, os objetivos da investigação e os procedimentos metodológicos adotados.

O segundo capítulo trata da aprendizagem do conceito de Limite de funções reais no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Realizamos um levantamento de pesquisas brasileiras para identificar os principais obstáculos enfrentados no processo de aprendizagem desse conteúdo. Com base nessas investigações, identificamos e associamos obstáculos epistemológicos manifestados na aprendizagem de Limite de funções reais de uma variável real.

No terceiro capítulo, apresentamos a teoria da cognição distribuída e discutimos como ela pode ser identificada no desenvolvimento de cenários animados no GeoGebra. Ampliamos, ainda, a discussão sobre a definição do que se entende por cenário animado e seu uso em tarefas de natureza exploratória.

O quarto capítulo descreve a metodologia da pesquisa, detalhando os procedimentos adotados para a produção e análise dos dados. Apresentamos, também, a intervenção realizada, o planejamento das tarefas desenvolvidas no âmbito da dissertação e o processo de construção dos cenários animados.

A análise dos dados é apresentada no quinto capítulo. Essa análise foi realizada a partir de gravações e registros das resoluções das tarefas, permitindo relacionar os desafios enfrentados pelos estudantes e as estratégias empregadas com o quadro teórico construído.

Por fim, o sexto e último capítulo apresenta as conclusões da pesquisa e reflexões sobre o uso de cenários animados em tarefas de natureza exploratória. Nele, discutimos as potencialidades e limitações do ensino do conceito de Limite de funções reais por meio dessa abordagem, destacando os desafios e as contribuições que ela oferece ao ensino de Limites.

1.6 Procedimentos metodológicos

Para fundamentar esta pesquisa, elaboramos um quadro teórico a partir de uma revisão de literatura realizada em dissertações e teses. Esse quadro serviu como referência para a análise dos dados coletados. A pesquisa envolveu uma intervenção, cuja análise foi conduzida com base em gravações e registros das tarefas realizadas pelos participantes. Tanto as tarefas quanto os cenários animados utilizados foram desenvolvidos no contexto desta dissertação e estão detalhados no Capítulo 4.

Para identificar e associar os obstáculos epistemológicos manifestados na aprendizagem do conceito de Limite de funções reais, realizamos uma revisão de literatura centrada em teses e dissertações. Foram selecionados trabalhos publicados entre 2014 e 2024 que relatam dificuldades enfrentadas por estudantes na aprendizagem desse conceito, disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (CTD). A partir das referências utilizadas nesses trabalhos, identificamos os autores que discutem obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite, os quais passaram a compor o nosso quadro teórico.

A revisão de literatura foi realizada por meio de um levantamento³ no CTD da CAPES, abrangendo publicações entre os anos de 2014 e 2024, conforme já exposto. Consideramos esse período relevante, visto que, nos últimos dez anos, houve significativa incorporação de softwares e recursos digitais ao processo de ensino. Reconhecemos, ainda, que muitos artigos acadêmicos são oriundos de dissertações e teses, o que permite uma compreensão mais abrangente do tema investigado.

A primeira etapa da busca consistiu na inserção, na caixa de pesquisa do CTD, das expressões: *Ensino de Cálculo Diferencial e Integral* e *Dificuldades no ensino de Cálculo Diferencial e Integral*. Os resultados abrangeram uma ampla gama de produções que se

³ Levantamento realizado em janeiro de 2024.

propõem a investigar, desde o uso de metodologias diversas no ensino de Cálculo, passando pela utilização de tecnologias digitais, até o ensino de noções introdutórias de Cálculo no Ensino Médio.

Os filtros aplicados foram: o período de 2014 a 2024 e o tipo de produção (teses e dissertações de mestrado acadêmico em Educação). Essa seleção resultou em 51 trabalhos, dos quais doze não estavam disponíveis para consulta por não possuírem divulgação autorizada no CTD da CAPES. Após a leitura dos resumos, descartamos aqueles que não tratavam especificamente das dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de Limite.

Para identificar as seções que abordavam essas dificuldades, analisamos as palavras-chave, os resumos, os sumários e as conclusões dos trabalhos. Limitamo-nos a investigar pesquisas voltadas ao Ensino Superior, excluindo aquelas desenvolvidas no Ensino Médio, uma vez que o conteúdo de Limite não integra a Base Nacional Comum Curricular⁴. Também foram excluídas as investigações que abordavam Limite de funções de mais de uma variável, os estudos que discutiam apenas aspectos metodológicos, e os que apontavam motivos pessoais dos estudantes, como falta de tempo ou desmotivação, como causas para a reprovação ou o baixo desempenho.

Buscamos, portanto, identificar seções que relatassem, apresentassem ou discutissem dificuldades específicas na aprendizagem de Limite. Essa seleção inicial foi sistematizada em uma planilha contendo os dados principais de cada trabalho, como título, autor, instituição, ano de publicação, filtros aplicados e link de acesso.

Após esses procedimentos, foram listadas cinco dissertações e uma tese que abordam, de forma específica e detalhada, as dificuldades enfrentadas por estudantes na aprendizagem do conceito de Limite, organizadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Lista da tese e dissertações selecionadas a partir do CTD

(continua)

Referência	Título do trabalho	Grau
Araújo, 2020	A construção do conceito de Limite através da resolução de problemas	Dissertação
Carvalho, 2016	A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino	Dissertação
Eckl, 2020	Ensino do conceito de Limite: aplicação de UEPS para identificar indícios de aprendizagem significativa com estudantes de ciências contábeis	Dissertação

⁴ Documento normativo para as redes públicas e privadas de ensino. Referência para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no Brasil (Brasil, 2017).

(conclusão)

Referência	Título do trabalho	Grau
Moraes, 2013 ⁵	Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem	Dissertação
Muller, 2015	Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros	Tese
Costa Neto, 2017	O ensino e a aprendizagem de Cálculo 1 na universidade: entender e intervir	Dissertação

Fonte: elaborado pela autora.

As bases teóricas utilizadas nas pesquisas selecionadas (Quadro 3), identificadas a partir da leitura inicial desses trabalhos, incluem os estudos de Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpiska (1985; 1987), que dialogam entre si. Esses autores propõem categorias⁶ para os obstáculos epistemológicos na aprendizagem do conceito de Limite, servindo, portanto, de sustentação ao quadro teórico adotado em nossas análises. Além disso, os trabalhos de Cornu (1981), Rezende (2003) e Tall (1993, 2012) ampliam as discussões iniciadas por esses autores, aprofundando a compreensão sobre os obstáculos de aprendizagem em Limite.

Ao final da revisão, elaboramos um quadro (Quadro 7) que sistematiza e aproxima os obstáculos categorizados pelos autores, conforme nossa leitura. Esse quadro foi utilizado como referência nas análises, permitindo identificar e compreender as dificuldades relatadas nas dissertações e teses brasileiras. Ressaltamos, contudo, que tais categorias estão interligadas e, por vezes, manifestam-se de forma combinada. Assim, a categorização proposta não tem o objetivo de limitar ou encerrar as discussões, mas de facilitar a articulação analítica no contexto da revisão de literatura.

Após a categorização dos obstáculos e a identificação daqueles mais recorrentes, elaboramos uma sequência de aulas utilizando cenários animados no software GeoGebra. Essas aulas foram organizadas com base em tarefas de natureza exploratória, com o objetivo de investigar o uso dos cenários animados no ensino do conceito de Limite de funções reais. A sequência também incluiu discussões sobre limites no infinito, igualmente abordadas por meio de tarefas exploratórias.

⁵ A dissertação de Moraes (2013) não foi obtida nessa busca, mas compartilhada pela própria autora, após leitura de um artigo publicado que apresenta implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de Limite de função real de uma variável real (Moraes; Mendes, 2016). A discussão parte do estudo de obstáculos epistemológicos de Limite listados por Cornu (1983, *apud* Moraes; Mendes, 2016), Sierpiska (1985) e Rezende (2003). Após a leitura do artigo, entramos em contato solicitando a disponibilização do arquivo da dissertação para inclusão em nossa análise.

⁶ Artigue (1995) utiliza o termo *dificuldades* para propor sua categorização, mas compreendemos que o termo pode apresentar variações linguísticas devido às traduções feitas da publicação original.

As aulas foram planejadas a partir da perspectiva da investigação matemática, seguindo as orientações do *framework* apresentado na pesquisa de Cyrino e Teixeira (2016). As atividades foram desenvolvidas ao longo de seis encontros, com duração de 1h30min cada, totalizando 12 horas-aula. Durante esses encontros, foram propostas duas tarefas, cada uma delas associada a um cenário animado distinto. Após a resolução das tarefas, os alunos elaboraram relatórios, cujas resoluções foram selecionadas para apresentação aos demais colegas da turma. Em seguida, realizou-se a sistematização dos conteúdos discutidos.

A produção de dados ocorreu por meio de diferentes formatos: gravações das telas dos computadores, utilizando o software OBS, e gravações das interações em sala de aula durante as sistematizações e discussões gerais, utilizando celulares e gravadores de áudio.

Para orientar a análise das tarefas, registramos, por meio de quadros, as interações dos estudantes, que nortearam tanto a coleta quanto a análise dos dados, com base na teoria dos obstáculos epistemológicos.

No capítulo seguinte, discutimos os limites de funções reais e esclarecemos o conceito de obstáculos epistemológicos. Também apresentamos a revisão de literatura realizada e a categorização dos obstáculos proposta por Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpinska (1985; 1987).

2 LIMITES DE FUNÇÕES REAIS

As contribuições independentes de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram fundamentais para a consolidação do Cálculo Diferencial e Integral como campo de estudo. A evolução desse segmento da matemática, no entanto, é resultado de um acúmulo de conhecimentos e ideias que se desenvolveram ao longo de séculos, culminando nas formulações clássicas que conhecemos hoje. Até a formalização do Cálculo, a Matemática era uma ciência que se preocupava com quantidades (Roque, 2013), e sua formalização transformou o objeto de estudo dessa ciência.

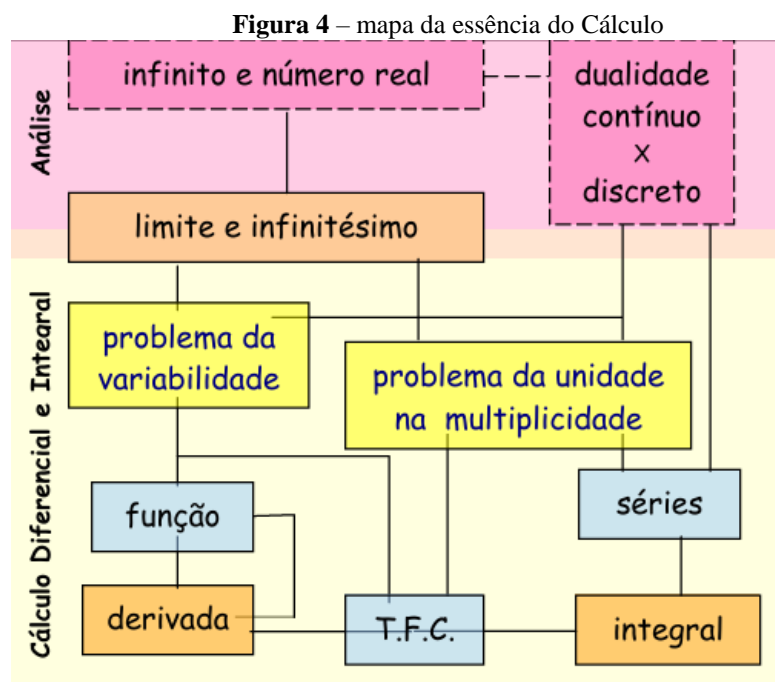
Responder o que é o Cálculo Diferencial e Integral pode fazer com que haja uma redução de significados de todo um campo de conhecimento, e resultar na tentativa de isolamento do Cálculo, o que é algo impossível de ser realizado. Rezende (2003, p. 88) esboça uma tentativa de descrever ideias do que o Cálculo é, não apenas como disciplina, enfatizando seu “caráter potencializador e integrador [...] que o torna um elemento de organização, sustentação e criação imprescindível para a formação do próprio conhecimento matemático e científico”.

Compreendemos que o Cálculo reúne conceitos e problemas da Geometria, Aritmética e Física, desenvolvendo o que Rezende (2003) chama de instrumentos para solucionar conceitos e problemas fundamentais. A criação do Cálculo como campo de conhecimento da Matemática foi motivada, segundo Kline (1998, *apud* Rezende, 2003), por problemas relacionados a movimentos; determinação de trajetórias e de velocidades instantâneas; determinação de tangentes a várias curvas; problemas de máximos e mínimos; comprimentos de curvas e áreas e volumes de figuras limitadas. Essas ideias fundamentais podem ser sintetizadas nas duas operações básicas de diferenciação e integração (Machado, 1998), e a operação de limite como conceito que possibilitou a fundamentação das outras duas. Já a noção do infinito, por sua vez, para Rezende (2003), é o principal agente dos procedimentos básicos do Cálculo.

A diferenciação e a integração são associadas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que “funcionou como elo fundamental dos dois cálculos até então existentes: o cálculo diferencial, que se preocupava com os problemas de tangentes e velocidades, e o cálculo integral, que se ocupava dos problemas de *quadraturas* e *cubaturas*” (Rezende, 2003, p. 79). Uma questão importante para este trabalho é que, em geral, tanto a derivada, a integral e o conceito de diferencial são definidos em termos de limite.

Para responder de forma coerente à pergunta do que o Cálculo é, Rezende (2003) propõe um mapa (Figura x) que simboliza graficamente a essência do Cálculo para o autor, que

resgatamos aqui no intuito de resumir, não de findar a discussão ou oferecer uma resposta definitiva para o que compreendemos ser o Cálculo Diferencial e Integral.



Fonte: Rezende (2003, p. 81).

Não vamos nos deter em uma explicação detalhada sobre os demais elementos desse mapa e na diferença entre a Análise e o Cálculo Diferencial e Integral, visto que isso é feito pelo autor em sua tese. Debruçamo-nos sobre Limites, que em concordância com o autor, consideramos ser um conceito estrutural das ideias do Cálculo.

Atualmente, a disciplina que compreende os estudos do Cálculo, é denominada *Cálculo Diferencial e Integral*, que pode ser dividido em uma, duas ou mais etapas, dependendo da grade dos diferentes cursos pertencentes às universidades do país. Contudo, o alto índice de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido objeto de estudo, tanto no Brasil quanto internacionalmente (Rezende, 2003). Ao longo dos anos, a disciplina passou por alterações desde a sua implementação, como a reorganização do conteúdo e do currículo, no intuito de contornar obstáculos na aprendizagem e diminuir a significativa taxa de reprovação (Lima, 2013).

Frequentemente, as dificuldades com a disciplina de Cálculo têm sua gênese associada à falta de conhecimento dos acadêmicos no que se refere a conteúdos vistos nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Segundo Rezende (2003), algumas instituições sugerem ensinar aos acadêmicos a matemática necessária à realização técnica do Cálculo. Entretanto, as defasagens na formação do acadêmico recém-egresso do Ensino Médio não

deveriam ser um problema específico do ensino de Cálculo, uma vez que é igualmente importante para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso seus resultados são tão preocupantes como quando comparados à disciplina de Cálculo (Rezende, 2003).

Compreendemos que diversos fatores podem influenciar a reprovação da disciplina, e dentre esses fatores estão as dificuldades de aprendizagem relacionadas aos obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1986). Obstáculos epistemológicos são aqueles que surgem de conflitos ocorridos ao longo do desenvolvimento histórico de conceitos matemáticos, resultantes da interação entre conhecimentos antigos e novos (Sierpinska, 1985). O conceito surgiu no âmbito da discussão do desenvolvimento da ciência por Bachelard (Mendes; Moraes, 2020), entendendo o erro como intrínseco ao conhecimento. Essa discussão está aprofundada na próxima subseção. Antes disso, detemo-nos na discussão sobre definição de Limite.

Nesta pesquisa, focamos apenas sobre Limite de funções reais de uma variável. Sua ideia intuitiva assume que L é o limite de $f(x)$ quando x tende a a , se for possível tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , tão próximos quanto desejar, tornando x suficientemente próximo de a , mas não necessariamente igual a a . Podemos escrever matematicamente essa ideia de diferentes formas, uma delas é em termos de épsilons e deltas. Essa definição moderna, atribuída a Karl Weierstrass (1815-1897), considera ε e δ como dois números pequenos, para representar pequenas diferenças, de modo que, para todo ε positivo dado, existe um número δ escolhido apropriadamente, que satisfaz $|x - a| < \delta$ e $|x - a| \neq 0$; então, temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Isso se traduz da seguinte forma:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. (1)$$

Nesse caso, escreve-se $f(x) = L$. Consideremos essa definição de Limite para uma função real com uma variável real, assumindo uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, contendo $a \in \mathbb{R}$, exceto possivelmente no próprio ponto a . Logo, o número real $L \in \mathbb{R}$, é o Limite de $f(x)$ quando x tende a a , se ficar satisfeita a condição (1).

Podemos atribuir a abordagem do Cálculo com definições e provas rigorosas, amparados no conceito de Limite baseado na desigualdade, à Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) (Grabiner, 1983). A elaboração inicial desses conceitos foi fruto da contribuição de diferentes matemáticos, demorando em torno de cento e cinquenta anos até que se obtivesse

uma definição de épsilons e deltas (Grabiner, 1983).⁷ Na próxima subseção, discutimos a construção do significado atribuído a *obstáculo epistemológico*, para em seguida identificar sua ocorrência em pesquisas realizadas sobre o Ensino Superior brasileiro.

2.1 Obstáculos na aprendizagem

Em sua obra *La Formation de l'Esprit Scientifique* (1938), Bachelard introduz, no contexto de sua epistemologia histórica, o conceito de obstáculo epistemológico. Sua discussão, voltada para o âmbito do avanço do conhecimento científico, assume que o progresso da ciência implica a superação de barreiras conceituais. Lopes (1996) refere-se a Bachelard como o filósofo da desilusão, e usa o termo *devir* associado ao conhecimento, como a reforma de uma ilusão. Isso significa que “conhecemos sempre contra um conhecimento anterior, retificando o que se julgava sabido e sedimentado. Nesse sentido, não existem verdades primeiras, apenas os primeiros erros: a verdade está em devir” (Lopes, 1996, p. 254).

A introdução de novos princípios epistemológicos no paradigma da ciência ampliou a compreensão dos desafios inerentes ao ato de conhecer. Essas causas de estancamento, denominadas por Bachelard como *obstáculos epistemológicos*, representam elementos que dificultam a construção histórica do conhecimento. O conceito, inicialmente desenvolvido no contexto do progresso científico, foi posteriormente transposto para o campo educacional por Guy Brousseau (1986), em que os obstáculos epistemológicos são compreendidos como dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem de um conteúdo, resultantes de concepções anteriores.

Cabe diferenciar os vários tipos de obstáculos identificados na didática da Matemática, para que possamos compreender melhor aquele que discutimos nesta dissertação. Brousseau (1986) classifica-os em três: obstáculos ontogênicos, didáticos e epistemológicos. Segundo esse pesquisador, os obstáculos ontogênicos são aqueles derivados de limitações próprias do indivíduo, como problemas no seu desenvolvimento, crescimento, questões neurofisiológicas, entre outras. Aqueles de origem didática são associados ao sistema de ensino, suas escolhas e concepções. Por último, os obstáculos de origem epistemológica são aqueles intrínsecos ao saber, e que podem ser identificados por meio das dificuldades encontradas pelos matemáticos na compreensão e utilização desse conceito (Brousseau, 1986). Cabe destacar que os obstáculos

⁷ A discussão sobre os obstáculos enfrentados pelos matemáticos ao longo da história na construção das definições de Limite pode ser encontrada na tese de Moraes (2021).

epistemológicos não são necessariamente relacionados à área do conhecimento voltada à Matemática, contexto de investigação dessa pesquisa.

O contexto da elaboração dos conceitos do Cálculo, por sua vez, foi longo e repleto de desafios, os quais também podem se manifestar como dificuldades de compreensão em sala de aula. As dificuldades resultantes de obstáculos epistemológicos, assumimos estarem diretamente relacionadas à própria natureza matemática dos conteúdos envolvidos (Cornu, 1991). Bachelard (1996, p. 15), ao se referir a esse tipo de obstáculo, afirma que

Não se trata apenas de considerar os obstáculos externos, como a complexidade e a transitoriedade dos fenômenos científicos, nem de lamentar a debilidade dos sentidos e do espírito humano. Está no próprio ato de adquirir conhecimento, conhecer, intimamente, o que parece, como resultado inevitável da necessidade funcional, retardar a velocidade de aprendizagem e causar dificuldades cognitivas. É aqui que podemos encontrar as causas da estagnação e mesmo do retrocesso, que podemos perceber as razões da inércia, a que chamamos obstáculos epistemológicos.

Obstáculos epistemológicos referem-se, portanto, a dificuldades ou desafios de natureza epistemológica que podem surgir no processo de aprendizagem e compreensão de algum conceito. Essas dificuldades podem estar relacionadas a concepções prévias dos estudantes, dificuldades na interpretação de conceitos abstratos, resistência a novas ideias ou paradigmas, entre outros fatores que dificultam a construção do conhecimento (Brousseau, 1986). Em torno do Limite de funções, os obstáculos podem estar relacionados a questões distintas, como a metafísica do conteúdo, lógica, simbólica, geométrica, entre outras causas.

É importante ressaltar que, na matemática, obstáculos epistemológicos não se mantêm existentes, dado que podem ser superados ao longo do seu próprio desenvolvimento. Contudo, não é algo que pode ser estendido para o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, trazido para esse contexto educacional por Brousseau (1986). Segundo Mendes e Moraes (2020, p. 245),

a história não deve ser fonte para identificar erros cometidos no passado por matemáticos ao desenvolverem determinados conceitos, mas sim, identificar obstáculos superados ao longo do desenvolvimento histórico do conceito de limite de função, mais especificamente os aspectos dinâmicos deste conceito, analisando as formas de superação ocorridas no contexto do desenvolvimento histórico, com vistas a refletir sobre as possibilidades de tomar essas formas de superação como potencial aliado para as ações de ensino na atualidade.

Considerando autores que discutem obstáculos ao longo da história do desenvolvimento e da definição do que hoje conhecemos como Limite de uma função real, debruçamo-nos sobre os estudos de Artigue (1995), Sierpiska (1985, 1987) e Cornu (1991), que apresentam uma

categorização. Assim como em Moraes (2013), que discute os obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite, ampliando a discussão em torno dos autores anteriormente citados, e sobre o trabalho de Rezende (2003), criamos um quadro (Quadro 5) que sintetiza aquilo que os autores trazem na discussão de seus trabalhos, e utilizamos posteriormente para a análise.

Ao longo da próxima subseção, propomo-nos a identificar obstáculos epistemológicos manifestados na aprendizagem de Limite de funções reais partindo de pesquisas brasileiras. Para isso, associamos categorias propostas por estudos anteriores feitos pelos autores citados acima.

2.1.1 *Obstáculos Epistemológicos na aprendizagem de Limite*

Assumimos, como obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite, o que Sierpiska (1985) caracteriza como os desafios enfrentados pelos matemáticos, ao longo da história, para definir conceitos dentro de um conteúdo matemático e que ainda hoje apresentam elevado grau de dificuldade na compreensão para os estudantes no seu processo de aprendizagem. Para a autora, são situações que podem ser identificadas como causas na lentidão do processo de compreensão de um conceito matemático. Obstáculos epistemológicos podem envolver as particularidades e as especificidades necessárias para o desenvolvimento desse conceito (Sierpiska, 1985).

Artigue (1995) define dificuldades na aprendizagem de Limite em três categorias⁸ (Quadro 2). Cornu (2002) e Sierpiska (1985, 1987) elaboram 4 e 5 categorias, respectivamente, para organizar as dificuldades específicas da aprendizagem de Limite (Quadros 3 e 4).

Denotamos as categorias dos obstáculos definidos por autor, nos Quadros 2, 3 e 4, na página seguinte, com a letra inicial de seu nome, Artigue (A), Cornu (C) e Sierpiska (S), seguida do número cardinal (1, 2, 3, 4 ou 5) para distinguir as categorias do mesmo autor. As cores indicam quais são discutidos conjuntamente e associados posteriormente no Quadro 5.

⁸ Pode-se traduzir como grupos, tipos, classes ou categorias. Este último termo foi adotado ao longo deste trabalho.

Quadro 2 - dificuldades em Cálculo segundo Artigue (1995)

Categoria	Dificuldade	Descrição
A_1	Complexidade dos objetos matemáticos elementares	Incompreensão de diferentes objetos matemáticos importantes para a formação matemática do indivíduo, como números reais, sequências e funções.
A_2	Noção e formalização de Limite	Conceitualização, formalização da noção de Limite, dificuldades com a linguagem, uso de termos (<i>tendendo a, tão pequeno quanto se queira</i>).
A_3	Ruptura Álgebra/Cálculo	Rupturas necessárias em relação aos modos de pensamento puramente algébricos, muito familiarizado com as especificidades do trabalho técnico no Cálculo.

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 3 - Obstáculos epistemológicos relacionados a Limite segundo Cornu (2002)

Categoria	Dificuldade	Descrição
C_1	Transposição numérica	Passagem do conceito geométrico para o numérico.
C_2	Infinito	Obstáculo associado à noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno.
C_3	Metafísica	Introdução de ideias que não são apenas cálculos ou deduções lógicas, com a introdução do Limite sendo discutida mais no campo da metafísica e filosofia do que da Matemática.
C_4	Limite atingir ou não	Discussão associada ao Limite atingir ou não atingir o valor ao qual está tendendo para.

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 4 - Obstáculos epistemológicos relacionados a Limite, segundo Sierpiska (1985, 1987)

Categoria	Dificuldade	Descrição
S_1	Horror ao Infinito	Refere-se à recusa ao conjunto do infinito e ao status de operação matemática atribuído ao Limite.
S_2	Noção de funções	Dificuldades associadas à compreensão e aplicação da noção de função no contexto de Limite.
S_3	Obstáculos geométricos	Desafios ligados à interpretação geométrica das grandezas e à continuidade.
S_4	Obstáculos lógicos	Dificuldades de natureza lógica na compreensão do conceito de Limite.
S_5	Obstáculos simbólicos	Dificuldades relacionadas à interpretação e manipulação de símbolos matemáticos no contexto de Limite.

Fonte: elaborado pela autora.

As dificuldades da categoria A_1 estão relacionadas a objetos que os estudantes deveriam ter algum contato ao longo da sua formação no Ensino Fundamental e Médio, como os números reais e funções (Artigue, 1995). A autora cita, como exemplos, a falta de clareza sobre quais são as diferenças entre os conjuntos numéricos, pois os estudantes tendem a confundir as diferentes categorias numéricas, como inteiros, números racionais e números irracionais.

No que diz respeito às funções, obstáculo específico da categoria S_2 , Artigue (1995) cita os resultados obtidos em pesquisas, como as realizadas por Eisenberg (2002), Leinhardt *et al.*, e Dubinski e Harel (Artigue, 1995), que evidenciam um conjunto de dificuldades na aprendizagem desse conteúdo que dificilmente seriam resolvidas na disciplina de Cálculo.

Eisenberg (2002) afirma que a ausência de habilidades para a compreensão gráfica de funções e a perda de significado através do processo intelectual de abstração matemática são alguns exemplos de dificuldades comuns na aprendizagem de funções.

Tall (1993) destaca que, além disso, os estudantes de Cálculo podem construir uma noção restrita do conceito de função, não compreendendo exemplos distintos daqueles que são abordados na aula. Segundo o autor, é preciso que os estudantes não apenas conheçam casos específicos de função, mas que também compreendam o conceito, de modo que tais dificuldades sejam superadas.

No que se refere à categoria A_2 , Artigue (1995, p. 112, tradução nossa) cita que, para o ensino de Cálculo, “o conceito de Limite ocupa um lugar essencial, dada a posição central do conceito nesse campo”. Nesse contexto, para a autora, associado à compreensão do conceito de Limite está o sentido atribuído à palavra *Limite*, que pode sugerir uma barreira intransponível e inalcançável, uma concepção estática do Limite. Cornu (1981) associa essa dificuldade à discussão sobre o Limite poder ser ou não atingido, na categoria C_4 .

Tall (1993) descreve problemas relacionados aos diferentes registros simbólicos, como a representação gráfica e algébrica, o que Artigue (1995) associa com obstáculos de noção e formalização de Limite. A autora sugere que o trabalho com computadores e calculadoras gráficas pode ser útil para amenizar dificuldades na compreensão dos diferentes registros, citando pesquisas com resultados promissores envolvendo o uso de softwares para representar Limite de formas distintas.

Ainda na categoria A_2 , existem os problemas relacionados com a dupla situação operacional e estrutural do Limite, o que se evidencia na dificuldade em separar o processo algébrico para obter o Limite do seu significado (Artigue, 1995). Tall (1993) afirma que há dificuldades em torno da linguagem e uso de termos, como *tender a, aproximação, tão pequeno quanto se queira*, entre outros. O autor lembra que tais termos são carregados de significados na linguagem coloquial, e que podem entrar em conflito com os conceitos formais e operacionais ao longo dos processos de ensino e aprendizagem.

Cornu (1981) propõe uma discussão a respeito dos múltiplos significados que são atribuídos aos termos utilizados para tratar de Limites. O autor considera que os estudantes possuem o que ele chama de *modelos espontâneos*, que são os significados prévios, distintos ou não do *modelo matemático* apresentado pelo professor. Ao longo do processo de aprendizagem, esses dois modelos entrarão em conflito, gerando adaptações que resultarão no desenvolvimento de *modelos próprios*, podendo ser múltiplos para um mesmo conceito.

Ainda para Cornu (1981), os modelos não estão nem totalmente errados nem totalmente certos em termos de conceito matemático, e no caso dos *modelos próprios*, muitas vezes são matematicamente imprecisos. Os *modelos próprios* evoluem à medida que são utilizados nas aulas ou estudos, tornando-se mais precisos e exatos, embora possam continuar distantes do *modelo matemático*. Um exemplo de conflito dos modelos citado pelo autor está associado à palavra *Limite*, que é mais comum na linguagem cotidiana dos estudantes. A palavra quase sempre se refere a algo estático, fixo, como um limite geográfico, um limite que não deve ser ultrapassado (moral ou regulamentar), um limite que nos proibimos de ultrapassar. Essa é a noção de dificuldade em capturar a ideia de aproximação, não um valor a ser atingido e, portanto, à noção de se *aproximar indefinidamente*. O significado intransponível (marco) do Limite é predominante, visto que, no significado comum, limite é o que separa duas coisas, e essa compreensão terá consequências para a atividade matemática. No senso comum, a noção de um limite não contém ideia de variação, movimento ou aproximação (Cornu, 1981).

Portanto, compreendemos que esse obstáculo permite discutir não somente as dificuldades associadas à categoria C_4 , mas também àquelas derivadas da linguagem. A compreensão da palavra *Limite* como barreira a ser respeitada, algo que não pode ser transpassado, é um exemplo de diferentes significados entre a língua materna e a linguagem Matemática. Entendemos que o uso de certas expressões para ensinar o conteúdo de Limite surge da necessidade de oferecer uma abordagem intuitiva, mas é importante levar em conta que há múltiplos significados atribuídos pelos *modelos espontâneos* dos estudantes. Considerando que na comunicação oral utilizamos a língua materna, que difere da linguagem Matemática, ambas possuem simbologias e significados próprios que devem ser observados.

Um exemplo citado por Sierpinska (1985) evidencia a presença de *modelos espontâneos* na sua investigação com os estudantes. Ela se deparou com a ausência de quantificadores para a definição de Limite utilizada por eles.

Os meninos nunca dizem que os valores da função $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ diferem, tão pequenos quanto desejamos para valores de x suficientemente próximos de zero; eles dizem apenas que, se x está próximo de zero, então $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ está próximo de 1, ou que a diferença entre os valores de x e $\text{sen } x$ se torna cada vez menor (Sierpinska, 1985, p. 54, tradução nossa).

Para a autora, a ausência de quantificadores e o não uso de símbolos para denotar a passagem para o Limite no processo de construção de *modelos próprios* representa o obstáculo lógico, caracterizado pela categoria S_4 neste trabalho.

Podemos associar, ainda à A_2 , a dificuldade em compreender conceitos complexos e ideias novas em um tempo muito pequeno (Tall, 1993). Os estudantes geralmente são confrontados por uma multiplicidade de definições e, segundo Robert e Boschet (1984 *apud* Tall, 1993), os estudantes que conseguem ser mais bem sucedidos em Cálculo são aqueles que têm maior facilidade na mudança entre as diferentes representações. Segundo Tall (1993, p. 8), esses estudantes

precisam desenvolver uma capacidade de lidar com a complexidade do assunto, voltando-se, quase intuitivamente, para a representação que irá provar ser útil na causa específica. Pode ser que o cálculo funcione para aqueles que conseguem pensar com flexibilidade e falham para aqueles que buscam orientação nos métodos mais procedimentais para ajudá-los a superar seus problemas.

O obstáculo associado à ruptura Álgebra/Cálculo (A_3) é descrito como a necessidade de mudar o raciocínio para lidar com problemas que dependem da manipulação algébrica, que por si só não satisfaz as soluções necessárias aos problemas do Cálculo. Por exemplo, saber que não há um limite definido para $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ não finda a investigação, visto que é possível olhar para o comportamento de Limites infinitos, Limites no infinito, assíntotas, entre outros aspectos. Para Artigue (1995, p. 115), “os modos de raciocínio subjacentes a esse trabalho são novos para os estudantes, e [...] as técnicas matemáticas envolvidas são delicadas”. Nesse sentido, saber manipular Limites algebricamente é importante para compreender os conteúdos do Cálculo, mas não deve ser o único objetivo da disciplina.

A ruptura entre Álgebra e Cálculo é agravada quando a tarefa do estudante se resume a resolver listas de exercícios. Artigue (1995) argumenta que o ensino tradicional, com base na explicação expositiva e resolução de listas, não colabora para minimizar as dificuldades dos estudantes, mantendo a ilusão de uma aprendizagem progressiva e contínua. Normalmente, as demonstrações ficam a cargo do professor, recebem maior foco nas aulas e nas avaliações, e prevalece a aplicação de técnicas, cálculos de Limites, de Derivadas, de Antiderivadas e Integrais, priorizando o estudo da técnica em detrimento do significado, gerando conflito pedagógico (Rezende, 2003).

Segundo Artigue (1995), para o estudante, também é importante saber operar com as definições formais no tratamento de problemas, porque em cada estágio do processo é preciso entender quais informações podem ser consideradas e o nível de precisão requerido para poder avançar na resolução. Isso exige não só familiaridade com expressões e com ordens de tamanho, como também uma compreensão clara dos conceitos que estão sendo abordados no problema.

Nesse sentido, como é no Cálculo que o estudante é confrontado pela primeira vez com o conceito de Limite, ele precisará de uma abordagem diferente do ensino tradicional, visto que esse conceito não envolve apenas cálculos desenvolvidos por um tratamento simples, aritmético ou algébrico (Tall, 1993). Em um trabalho anterior, Tall (2012) propõe uma *abordagem sensível* ao Cálculo, fundamentada nos processos de ensino e de aprendizagem nas percepções humanas e no uso dos sentidos para formular e compreender os conceitos matemáticos. Essa abordagem busca desenvolver as ideias de Cálculo a partir de origens sensíveis⁹, permitindo que os conceitos fundamentais sejam compreendidos de maneira intuitiva. O objetivo é fornecer uma base sólida para o entendimento de conceitos mais avançados, como o conceito de Limite e Infinitesimais. Em vez de introduzir conceitos abstratos de forma isolada, Tall (2012) sugere uma abordagem que busque relacionar o aprendizado matemático com a experiência do mundo real, tornando os conceitos mais tangíveis para os estudantes.

As categorias associadas à passagem da interpretação geométrica do Limite, denominada obstáculo geométrico ou transposição numérica, estão indicadas como C_1 e S_3 . Esse obstáculo origina-se do significativo tempo transcorrido entre o método da Exaustão, desenvolvido pelos gregos no século V a. C., e a definição mais precisa de Limite, surgida a partir do século XVII. Segundo Sierpinska (1985), é possível identificar esse obstáculo epistemológico no uso excessivo apenas da interpretação geométrica de Limite.

Cornu (2002) afirma que a solução desenvolvida pelos gregos para calcular a área de um círculo, por exemplo, oferecia uma oportunidade para desenvolver ferramentas muito similares ao conceito de Limite. A possibilidade de reduzir sucessivamente algo, a ponto de atingir um tamanho tão pequeno quanto se queira, como no caso do princípio de Exaustão, aproxima-se bastante da ideia de Limite, mas não se pode afirmar que ela é a mesma concepção que temos hoje. Tanto Sierpinska (1987) quanto Cornu (2002) assumem o método da Exaustão como puramente geométrico.

Esse tratamento geométrico e não numérico gera outro obstáculo epistemológico distinto, denotado por S_1 e C_2 , que dizem respeito exclusivamente aos problemas em torno da compreensão inadequada do infinito. Para Sierpinska (1985, p. 35, tradução nossa),

embora seja paradoxal, não podemos entender a noção de limite sem ter entendido a noção de número real, e os números reais só são realmente

⁹ Tall (2004, 2008, 2012) considera *origens sensíveis* aquelas situações que possibilitam o uso das percepções humanas e dos sentidos como ponto de partida para a compreensão dos conceitos matemáticos. O autor sugere que envolve três diferentes formas de pensamento matemático, uma delas é o conhecimento que surge a partir de nossas percepções naturais; outra a partir das ações que realizamos e traduzimos em cálculos e manipulações simbólicas; e uma terceira, na qual formulamos definições lógicas e desenvolvemos as estruturas da prova formal.

compreendidos quando entendemos a própria noção de limite, mas isso não pode servir de base para uma definição. Esse paradoxo não pode ser resolvido, a menos que aceitemos a existência de conjuntos infinitos, de infinitos diferentes, aceitando-os como de fato, e não apenas potencialmente infinitos.

A falta de compreensão a respeito do infinito estende-se, ainda, ao tratamento de quantidades infinitamente pequenas. Cornu (2002) destaca (categoria C_2) que o conceito de infinitesimal impulsionou o progresso no desenvolvimento de parte da noção de Limite. Nesse obstáculo epistemológico, o autor descreve a dificuldade em compreender quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes, na questão que surge da possibilidade de “[...] ter quantidades tão pequenas que sejam quase zero, e ainda não ter um tamanho ‘atribuível’ específico” (Cornu, 2002, p. 160).

Ainda sobre a dificuldade em lidar com o infinito, trazemos um exemplo discutido por Rezende (2003), sobre procedimentos comuns realizados nos cálculos de Limites. O autor discute o erro recorrente dos estudantes em afirmar que o limite $x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ resulta em zero. O procedimento dos estudantes para chegar a essa conclusão inconsistente é um caso evidente de incompreensão das indeterminações. A resolução dos estudantes, exemplificada pelo autor, é de que, quando $x \rightarrow \infty$, então $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ e $\text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \rightarrow 0$; logo, dessas afirmações, obtém-se que $x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \rightarrow \infty \cdot 0 = 0$, porque todo número multiplicado por zero resulta em zero. Exemplos como esse, trazido por Rezende (1994), que o autor denomina *álgebra do infinito*, constituem um obstáculo epistemológico para a compreensão do infinito, que podemos incluir nas categorias S_1 e C_2 .

Por fim, está a categoria C_3 , relacionada ao aspecto metafísico do Limite, e à categoria S_5 , relacionada aos problemas com a simbologia. Em C_3 , Cornu (2002) afirma que, ao introduzir o conceito de Limite, há uma mudança significativa de paradigma, indo além de cálculos ou deduções lógicas. O autor argumenta que, na Matemática clássica, o infinito não era considerado parte do campo de estudo. Tanto o infinito quanto a noção de Limite eram vistos como mais relacionados à metafísica ou filosofia do que à Matemática.

Na categoria S_5 está a barreira do símbolo. Sierpinski (1985) afirma que a criação de um símbolo para representar a operação de Limite foi tardiamente introduzida por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Esse obstáculo manifesta-se, por exemplo, na falta de compreensão da notação utilizada para denotar a operação de Limite por parte dos estudantes.

Certamente existem outros obstáculos epistemológicos que não foram citados aqui. Optamos por discutir brevemente aqueles citados pelos autores de referência e categorizá-los,

mas concordamos com Sierpiska (1987), que essa lista não deve ser definitiva. As categorias devem ser exploradas, investigadas e colocadas em discussão em sala de aula, de modo a serem modificadas e aprofundadas. Cornu (2002) afirma que os erros cometidos pelos estudantes podem ser fontes de investigação para identificar obstáculos epistemológicos. Concordamos com o autor que obstáculos epistemológicos devem ser considerados pelo professor ao pensar o processo de ensino desses conceitos, não evitando que os estudantes se deparem com esses obstáculos, mas caso isso ocorra, oportunize discussões no intuito de superá-los (Cornu, 2002).

Assim, no Quadro 5, sintetizamos esses obstáculos epistemológicos relacionados à aprendizagem de Limite, servindo como referência para as análises da tese e dissertações coletadas, auxiliando na organização e na articulação das dificuldades encontradas na aprendizagem de Limite de funções reais de uma variável real.

Quadro 5 - Obstáculos epistemológicos

Categoria	Dificuldade	Descrição
E_1	Complexidade dos objetos matemáticos elementares	Dificuldades associadas à compreensão de conteúdos de matemática da Educação Básica, como números reais, operações algébricas, sequências, funções, etc.
E_2	Noção e formalização de Limite	Conceitualização, formalização da noção de Limite, dificuldades com a linguagem, uso de termos (tendendo a, tão pequeno quanto se queira). Discussão associada ao Limite atingir ou não atingir o valor ao qual está tendendo para.
E_3	Infinito	Refere-se à recusa ao conjunto do infinito e ao status de operação matemática atribuído ao Limite. Obstáculo associado à noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno.
E_4	Rupturas do Cálculo	Rupturas necessárias em relação aos modos de pensamento puramente algébricos, muito familiarizado com as especificidades do trabalho técnico no cálculo. Desafios ligados à interpretação geométrica das grandezas e à continuidade. Dificuldades de natureza lógica na compreensão do conceito de Limite. Introdução de ideias que não são apenas cálculos ou deduções lógicas, com a introdução do Limite sendo discutida mais no campo da metafísica e filosofia do que da Matemática.
E_5	Obstáculos da linguagem	Dificuldades relacionadas à interpretação e manipulação de símbolos matemáticos no contexto de Limite. Diferenças entre a língua materna e a linguagem Matemática.

Fonte: elaborado pela autora.

As categorias estão referenciadas com a letra E seguida do número cardinal correspondente. Os nomes dos obstáculos foram reorganizados para contemplar aqueles definidos por Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpiska (1985, 1987), citados neste trabalho e indicados pela cor utilizada no grifo. Na sequência, analisamos e discutimos a tese e as dissertações levantadas para estudo neste capítulo.

2.2 Obstáculos epistemológicos identificados por meio de pesquisas brasileiras

A partir da tese e das dissertações selecionadas (Quadro 1), analisamos as principais dificuldades na aprendizagem de Limite, estabelecendo relações com os obstáculos epistemológicos do Quadro 5, elaborado à luz do referencial teórico adotado, buscando estabelecer as dificuldades epistemológicas nas pesquisas brasileiras. Denotamos a associação com os obstáculos através da indicação, em parênteses, da categoria e o seu número cardinal. O Quadro 1 é apresentado novamente a seguir, agora Quadro 6, com o objetivo de retomar as informações referentes aos trabalhos selecionados.

Quadro 6 - Lista da tese e dissertações selecionadas a partir do CTD

Referência	Título do trabalho	Grau
Araújo, 2020	A construção do conceito de Limite através da resolução de problemas	Dissertação
Carvalho, 2016	A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino	Dissertação
Eckl, 2020	Ensino do conceito de Limite: aplicação de UEPS para identificar indícios de aprendizagem significativa com estudantes de ciências contábeis	Dissertação
Moraes, 2013 ¹⁰	Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem	Dissertação
Muller, 2015	Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros	Tese
Costa Neto, 2017	O ensino e a aprendizagem de Cálculo 1 na universidade: entender e intervir	Dissertação

Fonte: elaborado pela autora.

Partimos da pesquisa de Araújo (2020), que investiga erros cometidos por estudantes de Cálculo e como esses erros podem auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de Limite. A análise parte de trabalhos e atividades realizadas pelos estudantes da disciplina de Cálculo no ano de 2018 em uma universidade pública. Sua conclusão denota que o conceito de Limite não é bem compreendido pelos estudantes, além de apontar para dificuldades nos aspectos algébricos da Educação Básica (Araújo, 2020).

Os principais erros identificados são os de cunho algébrico e interpretativo (E_1). Araújo (2020, p. 96) afirma “[...] que os estudantes evocam uma imagem conceitual alusiva à ideia de

¹⁰ Conforme já exposto na nota de rodapé do Quadro 1, a dissertação de Moraes (2013) não foi obtida nessa busca, mas compartilhada pela própria autora, após leitura de um artigo publicado que apresenta implicações didático-pedagógicas na construção do conceito de Limite de função real de uma variável real (Moraes; Mendes, 2016). A discussão parte do estudo de obstáculos epistemológicos de Limite listados por Cornu (1983, *apud* Moraes; Mendes, 2016), Sierpinski (1985) e Rezende (2003). Após a leitura do artigo, entramos em contato solicitando a disponibilização do arquivo da dissertação para inclusão em nossa análise.

que o Limite funciona como recurso para aproximação”. O autor identifica que os estudantes entendem *tender a algum valor* como um valor numérico a ser substituído (E_2). Eles assumem que a finalidade da igualdade no contexto dos Limites é apenas indicar um cálculo a ser realizado, do ponto de vista operacional (E_2).

Há indícios, nas respostas dos estudantes, de que o Limite não foi compreendido em sua totalidade, seja pela sua definição e/ou representação geométrica em casos de um Limite infinito (E_4). Um caso que evidencia essa dificuldade é demonstrado pela resposta incoerente do estudante, ao afirmar que o limite $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{|x+3|}$ existe e é igual a -3. Pode-se associar esse erro tanto a E_1 quanto a E_4 , dado que o estudante não conseguiu compreender corretamente o gráfico dessa função, o que lhe impediu de entender seu comportamento quando x tende a -3. É possível considerar que o estudante associou o Limite a um valor para o qual os pontos do gráfico tendem, mas sem diferenciar se essa aproximação ocorre no domínio da função ou no conjunto imagem.

Araújo (2020, p. 102) declara que

o Limite de uma função é visto [pelos estudantes] como uma operação algébrica, onde operamos com valores e encontramos um valor numérico; A compreensão de Limite [é vista] como uma noção intuitiva; dessa forma foi possível chegarmos à conclusão de que a compreensão do conceito de Limite por parte dos estudantes não é internalizada corretamente, uma vez que, essa compreensão não é evidenciada e entra em conflito com a definição conceitual de Limite.

O autor traz exemplos em que os estudantes apresentam dificuldade em reconhecer padrões (E_1) e identificar indeterminações (E_4), reconhecendo ∞ como um número (E_3) (Araújo, 2020). Um exemplo que ilustra esse obstáculo é a realização daquilo que Rezende (2003) chama de *Álgebra do infinito*: ao tentar encontrar o Limite de uma função quando x tende ao infinito, no processo de resolução, o estudante depara-se com $\infty - \infty$, e sua resposta é ∞ .

Em sua conclusão, Araújo (2020) afirma que o ensino tecnicista de Limites, desprovido de contexto e baseado na resolução de longas listas e uso de livros-textos de Cálculo como única fonte, tem papel significativo no baixo rendimento dos estudantes na disciplina, sem conseguir promover a compreensão de vários tópicos da Educação Básica. Isso reafirma o que Tall (2012) discute a respeito de um ensino para o Cálculo que favoreça uma abordagem intuitiva, como alternativa consistente ao ensino baseado apenas em demonstrações e resoluções de listas de exercícios.

A pesquisa de Carvalho (2016) teve como objetivo identificar os erros mais frequentes dos estudantes das turmas de Cálculo no segundo semestre do ano de 2015, nos cursos de

Engenharia Civil e de Produção. A análise buscou entender as dificuldades mais comuns, propondo abordagens e estratégias de ensino, além de sugerir possíveis ajustes na ementa dos cursos (Carvalho, 2016).

A autora desenvolveu uma organização para os tipos de erros descritos na sua pesquisa, em que o erro tipo 1 se refere à quando o estudante não possui conhecimento específico da disciplina Cálculo, em que ele pode não utilizar corretamente técnicas de derivação, não identificar o conceito de Limite em uma função e não relacionar Limites laterais com a continuidade de funções (Carvalho, 2016). Os erros do tipo 2 referem-se à falta de conhecimentos elementares da matemática, como técnicas de fatoração, propriedades de potências e interpretação dos gráficos de funções (Carvalho, 2016). Erros do tipo 3 são aqueles cometidos por distração e derivados da manipulação aritmética (Carvalho, 2016).

A partir da análise dos erros cometidos em duas provas, foi possível destacar a proeminência dos erros do tipo 1 e 2 entre as respostas dos estudantes. Os erros do tipo 1 representaram aproximadamente de 55% dos erros cometidos, e os de tipo 2 e 3, 45% e 5%, respectivamente. Carvalho (2016) destaca, com a análise das resoluções dos estudantes, que eles não compreenderam Limites laterais e Limites da função em um ponto específico (E_2). A autora também identificou erros na fatoração de polinômios (E_1).

A representação geométrica do Limite (E_4) também foi um desafio na pesquisa de Carvalho (2016). Os estudantes não conseguiram perceber, observando o gráfico, a descontinuidade da função (E_1), e cometeram erros na observação dos Limites laterais da função (E_2). Além disso, alguns estudantes não conseguiram perceber a ideia, mesmo que intuitiva, de Limite da função, Limite lateral, tampouco continuidade (E_2), utilizando erroneamente a noção de Funções crescentes (E_1).

A dissertação de Eckl (2020) teve como objeto de pesquisa o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos relacionados ao conceito de Limite de função com uma variável real. O autor investigou o desenvolvimento de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) e suas possíveis contribuições para a aprendizagem de conceitos relacionados a Limite. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi conduzida com estudantes de um curso de Ensino Superior em Ciências Contábeis.

Na análise do desenvolvimento da UEPS criada, o autor identificou, por meio das respostas às primeiras tarefas propostas, que os estudantes apresentavam conhecimento prévio sobre funções, mas uma grande parte apresentou respostas apenas parcialmente corretas (E_1), com resultados que destoavam de como as variáveis estavam definidas no problema (Eckl, 2020). Analisando as respostas dos estudantes nas tarefas iniciais sobre funções, o autor afirma

que as respostas não convergem para o que foi questionado inicialmente, mas que, posteriormente, é possível identificar indícios de amadurecimento do entendimento sobre variáveis, com uma interpretação coerente sobre a relação de dependência nas tarefas seguintes.

Na segunda tarefa, segundo o autor, foi possível concluir que uma quantidade parcial dos estudantes compreendeu o comportamento de crescimento dos termos da sequência apresentada (E_2 e E_4). A situação-problema foi enunciada da seguinte forma: “Divida 100 fardos de cevada entre cinco homens em progressão aritmética, de modo que a soma dos dois menores é um sétimo da soma dos três maiores” (Eckl, 2020, p. 103-104). O problema apresentava a sequência $\frac{10}{6}, \frac{65}{6}, \frac{120}{6}, \frac{175}{6}, \frac{230}{6}$, mas a maioria não soube explicar corretamente a ocorrência dos aumentos e a tendência presentes no comportamento analisado, indicando dificuldades em expressar suas interpretações na forma escrita (E_1 e E_2).

As respostas dos estudantes relacionaram Limite com a ideia de análise de funções por meio de aproximações de valores, sem atribuir uma explicação para possíveis tendências, interpretações parciais sobre o comportamento, aparecendo o contexto das aproximações, mas sem precisão elaborada nas respostas, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

O limite é algo que não podemos dizer [a]onde vai, mas sim que pode existir um final em determinada equação ou situação. Tem o objetivo de determinar o comportamento da função quando há valores. O limite ajuda na compreensão de várias funções, através de pontos como mínimo e máximo ou até mesmo os pontos de meio termo entre as funções. O limite é o infinito, ilimitado [resposta dos estudantes] (Eckl, 2020, p. 107).

Os estudantes demonstraram interpretações pouco elaboradas. Dessa forma, entende-se que eles tiveram dificuldades de entendimento/interpretação do questionamento e/ou da situação-problema (E_2).

A pesquisa realizada por Moraes (2013), na sua dissertação, teve como objetivo identificar quais obstáculos epistemológicos estão presentes no processo de construção do conceito de Limite. A autora parte do quadro teórico de Cornu (1983), Sierpiska (1985) e Rezende (1994) para analisar se os obstáculos estão presentes e de que modo se manifestam nas respostas dos estudantes, por meio de questionários.

A autora identificou que a definição de Limite, quando enunciada pelos estudantes com base na definição formal de Weierstrass, apresenta confusão simbólica (E_2). O estudante, quando questionado, transmite a ideia de Limite da seguinte forma: “Dada uma função e um ponto definido na função ou não, temos o limite da função a este ponto, quando temos valores próximos a esse ponto, suas imagens tendem a um número na qual é o limite da função naquele

ponto”, e acrescenta: “ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ ” [resposta dos estudantes] (Moraes, 2013, p. 95). O estudante demonstra compreender a ideia intuitiva de Limite, mas não sua definição (E_2).

Outra dificuldade identificada por Moraes (2013) foi em relação ao uso de termos como *se aproxima de*, *tende a*, *tenta se aproximar*, *aproxima infinitamente*, *aproximado*, *aproxima-se*. A autora associa o uso desses termos ao aspecto dinâmico do Limite, destacando que os estudantes não compreenderam a natureza estática do Limite (E_4). Em uma das respostas, a autora notou que o estudante considera apenas o caso em que a função é definida em a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$): “O valor $f(x)$ tende a um limite. O valor desse limite é quando um ponto x (que tem imagem $f(x)$) tenta se aproximar de um ponto y que se aproxima infinitamente de um valor L . Limite é o valor de $f(x)$ quando x tende a y ” (Moraes, 2013, p. 96). O estudante considera uma definição de forma dinâmica, não apenas estática, mas desconsidera o caso em que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq f(a)$. A autora associa dificuldades semelhantes a esse exemplo e o uso dos termos de forma inapropriada ao obstáculo Geométrico da Sierpínska (1985) e o da Transposição Numérica de Cornu (2002) (E_4).

Em relação a obstáculos geométricos (E_4), a autora traz excertos com as respostas a respeito do que entendiam por Limite: “O limite da função é o ponto máximo como o nome já diz, um limite, máximo [a]onde a função pode chegar”, ou “Estudar o comportamento do gráfico com relação a um ponto pertencente ao domínio” (Moraes, 2013, p. 98). Elas denotam dificuldades relacionadas ao conceito de Limite (E_2).

As dificuldades associadas ao infinito ficam mais evidentes na segunda questão analisada por Moraes (2013), em que a autora solicita, no questionário, uma descrição breve do que se compreende por infinito. As respostas dos estudantes caracterizam o infinito como algo incomensurável, extenso, sem início ou fim (E_3). Alguns estudantes o veem como um número inalcançável: “Infinito se define como algum lugar, espaço ou mesmo número inalcançável, onde você sabe que sempre vai existir, mas que você não consegue chegar. Em limite, torna-se um número extremamente grande ou extremamente pequeno” (Moraes, 2013, p. 100). Outras respostas associam o infinito a algo que se pode discutir no âmbito da filosofia, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

Infinito não é um número real, o infinito está além dos conceitos, por isso não temos domínio com operações de soma, subtração, multiplicação, divisão quando envolve o infinito. Filosoficamente o infinito está além da compreensão humana, sendo assim, pode ser abstraído mais não existe no

concreto. Matematicamente é um valor incomensurável [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 100).

Uma das respostas que evidencia a dificuldade em compreender como o Limite se comporta no infinito é a que o associa à ideia de indeterminação: “Seja: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ ocorre uma indeterminação. Infinito é denotado como uma aproximação do gráfico que vai do $+\infty$ ou $-\infty$ ” [resposta do aluno] (Moraes, 2013, p. 101). Portanto, o estudante não assimila a existência do Limite com x tendendo ao infinito (E_3). Há respostas em que se assume o infinito apenas como um símbolo: “Infinito é uma simbologia que representa um valor de grande escala”, ou “Infinito é quando não consegue se determinar um valor, pois ele é muito alto, o ∞ é um símbolo e não um número” (E_3) (Moraes, 2013, 101-102).

Moraes (2013) realiza uma discussão, em sua análise, a respeito dessas dificuldades associadas à compreensão do infinito. A autora identifica que os estudantes apresentam variações nas concepções sobre o infinito, que ela classifica em aspectos físicos ou simbólicos. Essas duas interpretações são citadas por Rezende (2003), quando discute a introdução do símbolo ∞ para quantidades infinitamente grandes ou como um número sujeito às operações aritméticas. Nas respostas dos estudantes, observa-se principalmente a primeira interpretação, que para Moraes (2013), apresenta uma aritmetização do Cálculo.

A quarta questão propunha verificar as concepções dos estudantes quanto à exatidão do valor do Limite da função. Apenas um estudante respondeu corretamente à questão, dentre os trinta e três participantes. A autora justifica a escolha das alternativas incorretas ao obstáculo de associação do Limite a um aspecto estritamente dinâmico, obstáculo C_4 de Cornu (2002). Outra inconsistência explicitada foi a escolha dos estudantes em escrever ao lado da representação gráfica “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ”, mas optaram pela alternativa que descreve que os valores das coordenadas da função, quando x tende para a pela esquerda, ou pela direita se aproxima, mas não atinge L (Moraes, 2013). A autora associa essa dificuldade ao obstáculo da transposição numérica descrita por Cornu (2002) (E_4).

A quarta questão solicitava que os estudantes explicassem quais eram as diferenças entre duas funções, f e g , representadas apenas graficamente, em que f é uma função contínua definida em \mathbb{R} ; e g , sua restrição no conjunto dos reais, exceto no ponto a . Nos eixos, estavam projetados com segmentos pontilhados os valores de a e de $L = f(a) = g(x)$.

As diferenças entre as funções foram expressas de variadas formas, sendo recorrente o uso dos termos *contínuo* e *descontínuo*. Entre as respostas dos estudantes, podemos destacar: “A função f é contínua e a função g é descontínua, pois existe um ‘buraco’ no gráfico” e “Uma

está definida em a e a outra não está, ou seja, f é definida em a e g não está, mas ambas são contínuas” [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 105). Nas respostas, nota-se que o primeiro estudante considera continuidade como um *gráfico sem buracos*; e na segunda resposta, observa-se que o conceito de continuidade de uma função não é compreendido (E_1).

Outras indicações para as diferenças entre as funções foi assumir a existência do Limite apenas para f ou que o Limite está se aproximando de L : “O limite de $f(x)$ é exatamente L quando x tender para a . O limite de $g(x)$ tende a L mas nunca será L ” [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 106). Aqui, consideramos que não conseguiram interpretar o Limite com base na sua representação gráfica (E_4), transferindo, como citado por Moraes (2013), noções de Limite para as propriedades da função (E_1). A autora relaciona essas dificuldades ao obstáculo do Limite ser ou não atingido (Cornu, 2002).

Em um segundo item, nessa mesma questão, a autora buscou verificar se o estudante compreende o que é necessário e suficiente para a existência do Limite de uma função em um ponto. Alguns estudantes afirmam que, em: “ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, o limite não existe, pois existe quando x se aproxima de a , e não quando x é a ” [resposta do estudante] (Moraes, 2013, p. 108). A autora assume que foi um erro de escrita na resposta x tender ao infinito. Grande parte das respostas afirma a não existência do Limite em g , justificada pela descontinuidade da função em a (E_4). Nesse item, a autora identifica que um obstáculo evidente nas respostas é o aspecto de movimento presente no obstáculo cinético discutido por Rezende (1994), que associamos às rupturas do cálculo presentes na categoria E_4 deste trabalho.

A última questão tinha como intuito verificar a compreensão de Limites no infinito. Apresentava as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 1$ e solicitava a resposta aos seguintes itens: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$. As principais dificuldades identificadas nas respostas dessa questão estavam relacionadas com erros de notação (E_5), com os símbolos (E_5) e as indeterminações (E_4). Um estudante considerou $\infty + 3$ uma indeterminação, que a autora relacionou ao obstáculo definido por Sierpinska (1995), do *Horror ao infinito* (E_3).

Moraes (2013) identificou, nas respostas a essa questão, dificuldades provenientes da manipulação algébrica (E_1), em que o infinito era considerado um número, e manipulado sem nenhuma interpretação específica dos estudantes. O maior número de erros cometidos foi no item e , em que poucos conseguiram utilizar propriedades do Cálculo para encontrar o Limite corretamente (E_3), assumindo o resultado como indeterminado ou uma das múltiplas respostas

“ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$, $\frac{-\infty}{\infty} = -\infty$, $\frac{-\infty}{+\infty} = +\infty$ ” [resposta dos estudantes] (Moraes, 2013, p. 113).

Já o estudo de Muller (2015) teve como objetivo analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por estudantes de Cálculo, e testar possibilidades para a redução dessas dificuldades por meio de recursos tecnológicos. Na primeira fase da pesquisa, a autora analisou erros cometidos por estudantes de Cálculo de duas turmas distintas, uma no curso de Sistemas de Informação e outra em um curso de Engenharia, na realização de uma prova. Os resultados dessa fase apontaram que as maiores dificuldades estavam relacionadas a conteúdos de matemática básica (E_1). As questões apresentadas no primeiro questionário eram relativas a cálculo de Limites, Derivadas e análise do comportamento de funções. No segundo teste para a sondagem dessas dificuldades, a autora focou as questões nos conteúdos em que considerou a compreensão mais insuficiente: frações algébricas, propriedades distributivas, equações, funções e razões trigonométricas. Não houve uma discussão específica a respeito das dificuldades em Limites.

Costa Neto (2017) investigou os índices de reprovação em Cálculo na Universidade de Brasília (UnB) entre 2010 e 2016. O Objetivo da sua pesquisa foi investigar a necessidade de implementar uma disciplina de Pré-Cálculo no Departamento de Matemática da Universidade, propondo o uso de aplicativos, como Excel e Calc, para trabalhar aspectos mais intuitivos das ferramentas do Cálculo para posteriormente inserir os conceitos de maneira formalizada (Costa Neto, 2017). O que interessa para a nossa pesquisa é a análise feita pelo autor, de questões que foram cobradas em provas de Cálculo anteriores, realizada por meio de duas teorias psicométricas: Teoria Clássica dos Testes (TCT) e a Teoria da Resposta ao Item (TRI).

As três questões analisadas sobre Limite e Continuidade exigiam, do estudante, formular e articular argumentos adequadamente sobre Limites ordinários e Limites envolvendo o infinito, em que duas questões eram consideradas de nível médio e uma difícil (Costa Neto, 2017). Todas as questões apresentavam múltiplas alternativas.

A primeira solicitava uma condição para que $\frac{x}{x+1} > 1 - 10^{-3}$, com $x > 0$ como hipótese. Embora o tema da questão seja considerado o de Limite tendendo ao infinito, a resolução correta exigia apenas conhecimento de matemática básica. Somente 37,5% responderam, e desses, 62,5% erraram (E_1) (Costa Neto, 2017).

A segunda questão pedia o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(t)}{t}$, em que a resposta correta seria a existência do limite, dado que $\text{sen}(t)$ é limitado e o quociente $\frac{1}{t}$ tende a zero. As opções que mais atraíram

escolhas foram as alternativas incorretas B, C e E, com 30%, 25% e 21%, respectivamente (Costa Neto, 2017). A opção B tratava do Limite Fundamental, que é o Limite do mesmo quociente mencionado na questão, mas tendendo a 0 (E_2). A opção C menciona os Limites inferior e superior da função seno: o estudante falhou em distinguir esse intervalo, para o qual a função seno está definida, com a noção de Limite lateral (E_2). Já a opção E apresenta um erro que revela a dificuldade em diferenciar o domínio da imagem da função seno (E_1).

A terceira questão pedia para discutir acerca da inexistência do limite $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, exigindo conhecimento de propriedades fundamentais de Limite (Costa Neto, 2017). Era necessário identificar que a função seno é limitada no intervalo fechado entre -1 e 1, e que o limite $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Os estudantes entenderam que todo e qualquer Limite denota continuidade, substituindo equivocadamente $x = 0$ (E_2). A alternativa B é considerada pouco plausível, pois o aluno substituiria $x = 0$ na função em questão e determinaria incorretamente o valor máximo da função seno. A opção C, escolhida por aproximadamente 15% dos estudantes, apresenta um erro semelhante ao descrito na opção A. Já o item E indica um erro relacionado à matemática básica, devido à multiplicação por 0 (E_1) (Costa Neto, 2017).

Por fim, Costa Neto (2017) destaca que essa questão revela duas dificuldades comuns entre os estudantes: a tendência de confundir os pontos de máximo da função seno com os da função cosseno, o que é indicado pela escolha da opção E por 21% dos estudantes (E_1), e a dificuldade em compreender o valor numérico exato de uma função em um determinado ponto e o valor aproximado, como é o caso do Limite (E_2).

Concluindo a análise da tese e das dissertações acima, percebemos que os obstáculos mais presentes foram aqueles associados às categorias E_1 , E_2 e E_4 propostas. Notamos que diferentes categorias foram citadas em uma mesma questão, e disso inferimos correlações entre diferentes obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite.

2.3 Considerações sobre a revisão de literatura

Ao longo da seção, buscamos estabelecer conexões entre as dificuldades específicas em Limite de funções reais mencionadas nos trabalhos e os conceitos mais amplos abordados pelo quadro teórico proposto. Esse processo permitiu articular os desafios enfrentados no processo de aprendizagem apresentados pelas pesquisas (Quadro 1) e relacioná-los com os obstáculos epistemológicos elencados (Quadro 5).

Foi possível identificar várias dificuldades enfrentadas pelos estudantes no processo de aprendizagem de Limite, as quais estão intrinsecamente ligadas aos obstáculos epistemológicos discutidos. As pesquisas nos ajudaram a perceber que as dificuldades são muitas, em diferentes tipos de assuntos, e que não terminam apenas com a análise realizada. As questões apresentadas e analisadas pelos autores foram de grande ajuda, oferecendo uma noção dos conceitos relacionados ao Limite que os estudantes enfrentam dificuldades em compreender.

Com base na análise, identificamos que as dificuldades mais recorrentes envolvem a complexidade dos objetos matemáticos elementares (E_1), a noção e formalização de Limite (E_2) e as rupturas do Cálculo (E_4). Os estudantes podem enfrentar dificuldades relacionadas à compreensão de números reais, sequências e funções, que são fundamentais para o entendimento do conceito de Limite. Compreendemos, todavia, que o objetivo da disciplina de Cálculo não é suprir a defasagem de conteúdos não assimilados pelos estudantes ao longo da sua formação matemática básica, no Ensino Fundamental e Médio. Entretanto, não podemos desconsiderar tais dificuldades, visto que é evidentemente um obstáculo que impede a compreensão efetiva do estudante ao aprender Limite.

A própria noção e formalização de Limite (E_2) é agravada, se o aluno apresenta dificuldades das categorias E_1 e E_5 . A incompreensão da linguagem Matemática e objetos matemáticos elementares pode acarretar dificuldades relacionadas à conceitualização do Limite e sua formalização Matemática (E_2), em que a compreensão das definições ocorre de forma incompleta ou parcial. O estudante não compreende a diferença entre Limites infinitos ou no infinito (E_3), não realiza uma análise gráfica ou uma interpretação do comportamento (E_4), assumindo o Limite apenas como um valor a ser encontrado por meio da manipulação algébrica, o que por si só não é suficiente para resolver questões de Cálculo.

Além dessas dificuldades específicas, é importante ressaltar que a transição entre diferentes representações do Limite, as próprias mudanças e rupturas que o Cálculo historicamente propõe, a compreensão de conceitos complexos em um curto espaço de tempo, e a necessidade de desenvolver flexibilidade no pensamento matemático também podem representar obstáculos significativos na aprendizagem de Limite. Entendemos que é fundamental compreender que as categorias de obstáculos apresentadas não devem ser consideradas definitivas. O intuito da pesquisa foi propor uma classificação para as dificuldades relatadas na literatura, que podem e devem ser exploradas, investigadas e debatidas, não somente em pesquisas posteriores, também em sala de aula.

Entendemos que os erros relacionados a Limites não são explicados somente pelos obstáculos epistemológicos do Cálculo, mas a associação proposta permitiu classificar essas

dificuldades, muitas vezes consequentes de um ou dois obstáculos simultaneamente. Ao categorizar os obstáculos epistemológicos, a identificação das dificuldades específicas que os estudantes enfrentam ao aprender sobre o conceito de Limite ocorre de forma mais clara. Isso permite uma abordagem mais direcionada e eficaz para superar tais obstáculos no processo de aprendizagem de Limite.

Concluimos que a categorização proposta por Artigue (1995), Cornu (2002) e Sierpiska (1985; 1987) permite ampliar a compreensão das dificuldades e erros cometidos pelos estudantes no processo de aprendizagem de Limite de funções reais de uma variável real. Reconhecemos as limitações deste trabalho e propomos, após a reflexão sobre as questões discutidas, a ampliação da análise de erros para futuras pesquisas, investigando diferentes conteúdos relacionados a Limite dentro do Cálculo para compreensão mais detalhada, possibilitando entender as implicações dos obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite.

No próximo capítulo, discutiremos sobre o uso de tecnologias digitais em sala de aula e suas potencialidades discutidas por pesquisadores. Com base na psicologia cognitiva, discutimos o papel que computadores e softwares podem desempenhar no ensino, considerando a importância do contexto da sala de aula, dos recursos disponíveis e da cultura do estudante, considerando a aprendizagem como um fenômeno social (Vygotski, 1989). Por fim, apresentamos possibilidades para o uso de cenários animados na abordagem de conceitos matemáticos.

3 CENÁRIOS ANIMADOS: O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

No capítulo anterior, abordamos os obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de Limite, um dos aspectos centrais desta pesquisa. Neste capítulo, direcionamos o foco para outro elemento relevante: o uso de tecnologias digitais na Educação Matemática. Para isso, discutimos o significado de sua integração em sala de aula e as potencialidades apontadas por pesquisas nesse contexto. Adotamos uma abordagem fundamentada na psicologia cognitiva para compreender o papel que computadores e softwares desempenham no processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, enfatizamos a importância do contexto em que o estudante está inserido, os recursos disponíveis para seu uso e a cultura à qual pertence, considerando a aprendizagem como um fenômeno social (Vygotski, 1989).

Dessa forma, na perspectiva da teoria da cognição distribuída, fundamentamos nossa compreensão sobre o processo em que a aprendizagem ocorre. Essa teoria destaca, como pilares essenciais, a interação social, o meio no qual o estudante está inserido, incluindo os recursos que utiliza; e a cultura, entendida como o contexto histórico e sua influência na construção do conhecimento. Na sequência, apresentamos o software GeoGebra e discutimos os aspectos dos cenários animados e das atividades de natureza exploratória integradas ao uso desse software. Por fim, propomos uma possibilidade de organização de aula que articula os recursos e o contexto discutido, fundamentando as intervenções realizadas nesta pesquisa no capítulo seguinte.

3.1 Teoria da Cognição Distribuída

A psicologia histórico-cultural foi construída a partir de uma série de publicações escritas no final da década de 1920 e início da década de 1930 por Alexei Leontiev (1903-1979), Alexander Luria (1902-1977) e Lev Vygotsky (1896-1934) (Cole; Engeström, 1993). Ela reconhece a cultura como um fenômeno distribuído, uma vez que é adquirida nas interações cotidianas entre as pessoas, de modo que dois indivíduos não compartilham toda a cultura do grupo ao qual pertencem (Schwartz, 1989). Essa visão distribuída da cultura permite, conseqüentemente, assumir a aprendizagem como um processo fundamentalmente social (Vygotski, 1989), assumindo que o desenvolvimento cognitivo ocorre por meio da interação social e da comunicação com os outros indivíduos.

A concepção de Vygotski (1989) de aprendizagem enfatiza que o desenvolvimento cognitivo é mediado por ferramentas culturais, especialmente a linguagem, e enfatiza o papel dela e dos signos na mediação do desenvolvimento cognitivo. Para o autor, as ferramentas culturais, tais como a escrita, símbolos matemáticos, a própria linguagem, entre outros, são mediadores do pensamento e da aprendizagem. Por meio da interação com essas ferramentas culturais, os indivíduos internalizam as práticas e os conhecimentos de sua cultura (Vygotski, 1989). A Teoria da Cognição Distribuída (TCD), por sua vez, dialoga com a psicologia histórico-cultural ao argumentar que os processos cognitivos não estão confinados à mente individual, mas são distribuídos por meio de objetos, pessoas e ambientes (Cole; Engeström, 1993). Segundo Hutchins (2000), os processos cognitivos podem ser distribuídos entre os membros de um grupo social, no sentido de que a operação do sistema cognitivo do indivíduo envolve a coordenação entre a estrutura interna e a externa (material ou ambiental). Além disso, esses processos podem ser distribuídos ao longo do tempo, de tal forma que os produtos de eventos anteriores transformem a natureza de eventos posteriores da cognição.

No contexto educacional, ferramentas tecnológicas, como softwares matemáticos, podem integrar os processos de pensamento e aprendizagem. A interação contínua entre pessoas, ferramentas e ambiente cria um sistema cognitivo distribuído que, segundo Cole e Engeström (1993), pode ser mais eficaz na resolução de problemas complexos do que qualquer componente isolado.

Mello, Vallini e Vieira (2022) apontam que os pressupostos da TCD podem contribuir para pensar os usos das tecnologias em práticas de ensino para além de visões neutras ou tecnicistas, compreendendo que as tecnologias são produzidas pelos e para os seres humanos em um certo contexto social. Para os autores, estaríamos ancorados em uma perspectiva interacionista, levando em conta que as tecnologias são produtos da cultura. Dessa forma, as tecnologias devem ser usadas não como modismo ou simples otimização de tarefas, mas devem potencializar os modos de fazer, pensar, analisar, refletir e criar.

Cole e Engeström (1993) destacam que artefatos culturais, materiais ou simbólicos regulam a interação do indivíduo com o ambiente e consigo mesmo, sendo a linguagem a ferramenta mediadora principal. A mediação cultural, essencial no desenvolvimento humano, evidencia a proximidade entre a psicologia histórico-cultural e a cognição distribuída, pois a cognição humana é mediada por artefatos. Bateson (1972) complementa que a mente é distribuída de acordo com as ferramentas que uma pessoa utiliza, determinadas por suas metas. Assim, a combinação de metas, ferramentas e ambiente define o contexto do comportamento e

as formas de distribuição cognitiva. Nesse sentido, a aprendizagem de um indivíduo reflete a do grupo e vice-versa (Hutchins, 2000).

Hutchins (2000) argumenta que artefatos cognitivos, como calculadoras ou anotações no papel, ampliam as habilidades humanas, ao modificarem a forma como as tarefas são realizadas. No entanto, Cole e Griffin (1980, *apud* Hutchins, 2000) ressaltam que essa interpretação não está completamente correta. Quando o indivíduo realiza anotações para lembrar e posteriormente realiza a leitura, sua memória não foi ampliada: na verdade, o indivíduo utilizou um conjunto diferente de habilidades funcionais para realizar a tarefa de memória (Cole; Griffin, 1980).

Hollan, Hutchins e Kirsh (2000) reconhecem que passamos por uma transição do uso isolado de computadores para redes onipresentes, que influenciam profundamente a ciência e a interação social. Para os autores, avançar no estudo da interação humano-computador é indispensável para compreender a dinâmica emergente de tarefas que transcendem o uso da máquina, envolvendo interações complexas em um mundo amplamente conectado.

Ao reconhecer a distribuição da cognição do indivíduo no ambiente em que está inserido, é fundamental considerar as representações utilizadas nas interações, como interfaces digitais, que são cruciais para compreender como as pessoas realizam tarefas (Hollan; Hutchins; Kirsh, 2000). As estratégias desenvolvidas para utilizar essas representações são centrais no processamento cognitivo, tanto no aprendizado quanto no tratamento de informações. Nesse sentido, o uso de computadores e softwares no processo de aprendizagem pode influenciar diretamente a forma como os estudantes constroem suas representações mentais do conteúdo.

Assim como a bengala de uma pessoa cega ou o microscópio de um biólogo celular são uma parte central da maneira como eles percebem o mundo, os materiais de trabalho bem projetados tornam-se integrados à maneira como as pessoas pensam, veem e controlam as atividades, parte do sistema distribuído de controle cognitivo (Hollan; Hutchins; Kirsh, 2000, p. 178, tradução nossa).

Nesse contexto, tecnologias digitais, como computadores e softwares matemáticos, desempenham papel relevante no processo de aprendizagem. Esses artefatos não ampliam diretamente as capacidades cognitivas individuais, mas promovem interação social e colaboração, incorporando aspectos do ambiente e da cultura educacional. Refletir sobre o uso dessas tecnologias em sala de aula é fundamental para entender o processo de aprendizagem e identificar vantagens na superação de obstáculos mencionados no capítulo anterior.

Dubinsky e Tall (1991) destacam que o uso do computador pode auxiliar no processo de conceituação de conteúdos matemáticos. Segundo esses pesquisadores, o computador

facilita a representação de ideias abstratas e permite a manipulação dessas representações pelos estudantes. No entanto, eles ressaltam que a reflexão sobre as construções realizadas no computador é indispensável, alertando que, “mesmo em colaboração com o computador, não devemos nos iludir acreditando que ele fornecerá um caminho totalmente tranquilo para o conhecimento matemático” (Dubinsky; Tall, p. 1991, tradução nossa).

Com base nisso, a subseção seguinte aborda o uso do software GeoGebra, que conforme apontam pesquisas publicadas, tem se mostrado promissor no campo da Educação Matemática. Assim, apresentamos algumas de suas funcionalidades e uma proposta de abordagem para o ensino de conteúdos matemáticos em sala de aula, desenvolvida para as intervenções realizadas nesta pesquisa.

3.2 O GeoGebra e os cenários animados

Considerando, portanto, que os artefatos cognitivos desempenham papel fundamental na organização das capacidades de um sistema cognitivo (Cole; Griffin, 1980), discutimos alguns aspectos do GeoGebra, software utilizado na investigação desta pesquisa. Ao longo do texto, nomes de ferramentas e funcionalidades do software serão mencionados com iniciais maiúsculas para facilitar a identificação pelo leitor.

Criado por Markus Hohenwarter como parte de seu mestrado na Universidade de Salzburg, na Áustria (Hohenwarter; Jarvis; Lavicza, 2009), o GeoGebra foi desenvolvido com o objetivo de combinar Geometria, Álgebra e Cálculo em um único ambiente dinâmico e interativo. Desde sua publicação na internet, em 2002, o GeoGebra rapidamente ganhou popularidade entre educadores, recebendo feedback positivo de professores que o utilizaram em suas salas de aula. Essa aceitação foi reforçada por prêmios de software educacional, incluindo o prestigiado European Academic Software Award em 2002 (Hohenwarter *et al.*, 2008).

A partir de então, Hohenwarter continuou a desenvolver o GeoGebra durante seus estudos de doutorado, focando nas possibilidades pedagógicas do software nas escolas austríacas (Hohenwarter *et al.*, 2008). O desenvolvimento do software continuou sob sua orientação, com atualizações constantes e traduções para diferentes idiomas, permitindo que um número crescente de usuários internacionais se envolvesse com a plataforma. Hoje o GeoGebra está disponível gratuitamente para download no site oficial em várias versões, para desktop (Windows, macOS, Linux), além de aplicativos para dispositivos móveis (Android e iOS) (GeoGebra, 2024).

Para além dos seus atributos funcionais, o GeoGebra apresenta muitas vantagens no que se refere ao seu uso em sala de aula. Nossa experiência com o software permitiu reconhecer potencialidades que são confirmadas em pesquisas, como a de Romero Albaladejo e García López (2023), que identificaram contribuições para o desenvolvimento dos alunos no que se refere à autonomia e, sobretudo, ao rigor matemático. Os autores elencam alguns benefícios, que organizamos no Quadro 7.

Quadro 7 - Características do GeoGebra que contribuem para a aprendizagem matemática

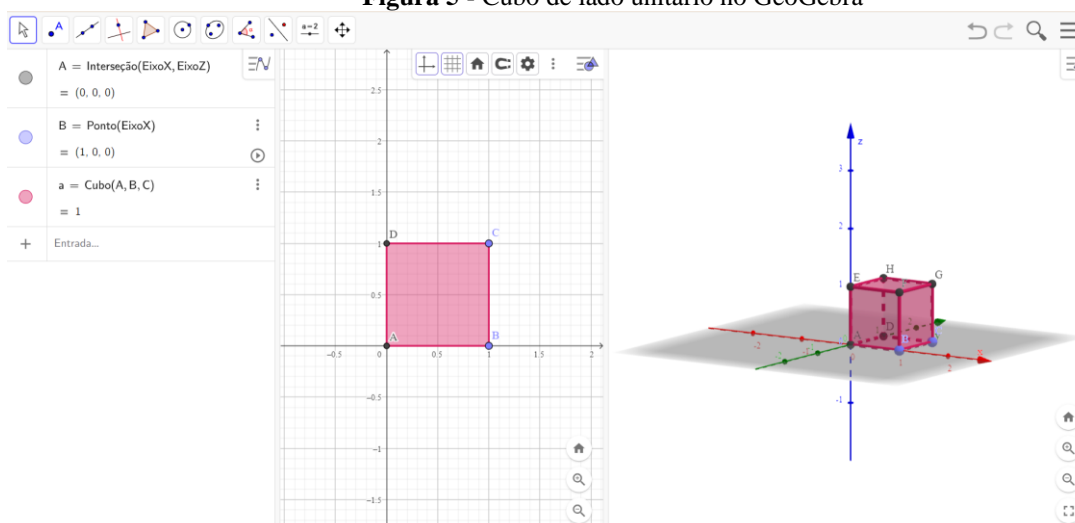
Benefício destacado na pesquisa	Descritor
Interatividade	Permite que estudantes interajam com construções matemáticas, o que facilita a identificação de erros e a compreensão de conceitos.
Construtividade	Os alunos podem criar representações dinâmicas por meio de tentativas e erros, o que estimula a exploração e o reconhecimento de propriedades matemáticas. Essa abordagem ajuda a desenvolver um pensamento crítico e flexível.
Navegabilidade	A plataforma oferece liberdade para os alunos explorarem diferentes estratégias e ferramentas, aumentando sua autonomia e capacidade de resolver problemas de forma independente.
Colaboração	Proporciona um espaço colaborativo onde os alunos podem compartilhar ideias e percepções, promovendo a troca de conhecimentos e a ajuda mútua entre colegas.
Aumento da Precisão	O uso do software incentiva estudantes a realizarem construções geométricas de maneira precisa, fundamental para o raciocínio matemático e a resolução de problemas.
Desenvolvimento de atitudes positivas	A introdução do GeoGebra na sala de aula está associada à melhoria nas atitudes de estudantes em relação à matemática, como maior perseverança e envolvimento em tarefas desafiadoras.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Romero Albaladejo e García López (2023).

Os benefícios descritos pelos autores tornam-se evidentes assim que a janela inicial do programa é apresentada. O GeoGebra permite a construção de objetos com parâmetros numéricos, algébricos e geométricos, possibilitando que os usuários explorem a construção em diferentes janelas. Dentre as opções de janelas, existem a Janela de Álgebra, para a representação algébrica dos objetos construídos; Janela de Visualização 1 e 2, para objetos de duas dimensões; Janela de Visualização 3D, para objetos tridimensionais; além da Planilha; Janela CAS (Cálculo Algébrico Simbólico); Calculadora de Probabilidades e Protocolo da Construção.

O software permite trabalhar com duas ou mais janelas simultaneamente que são inter-relacionadas, representando o mesmo objeto em uma, duas ou em todas. Para exemplificar, podemos simular a construção de um sólido geométrico. Sua representação na Janela 3D, na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização 1 seria da seguinte forma:

Figura 5 - Cubo de lado unitário no GeoGebra

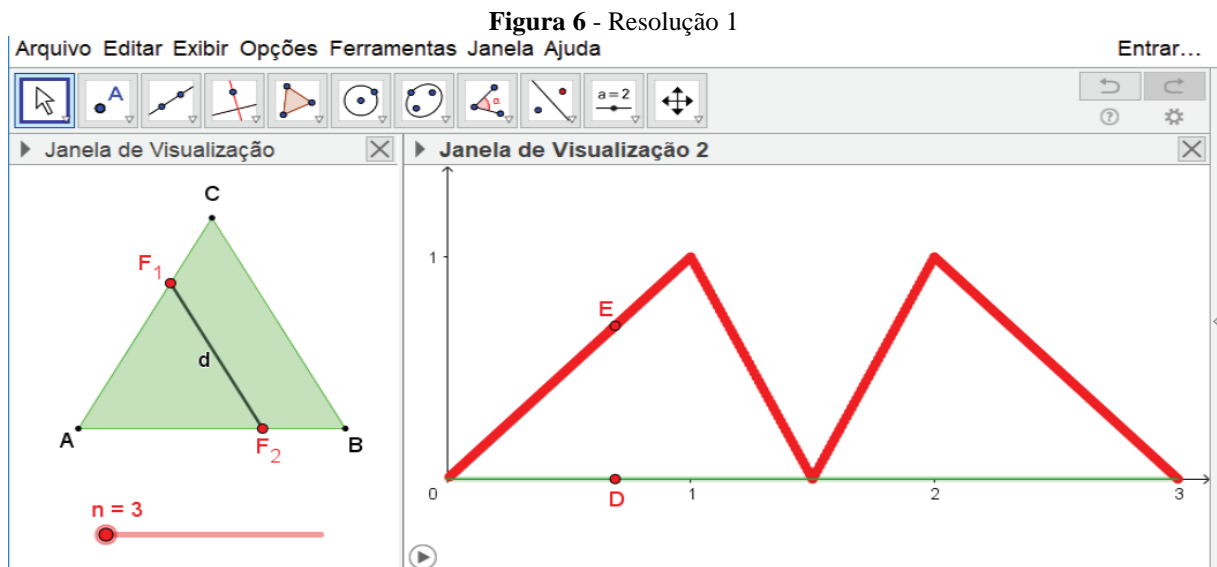


Fonte: Elaborado pela autora.

A construção (Figura 5) utilizou uma opção apresentada pela Caixa de Ferramentas, localizada na barra, no canto superior esquerdo, para a construção de sólidos variados. A opção *Cubo* é habilitada com apenas um clique, e basta selecionar dois pontos em qualquer lugar do plano cartesiano para que um cubo seja criado. É possível obter, além da sua representação na Janela 3D, informações sobre os elementos da construção na Janela de Álgebra, e visualizar sua base na Janela de Visualização 1. Além disso, os pontos criados inicialmente são destacados em azul e podem ser alterados, modificando as dimensões do cubo, enquanto os demais, considerados objetos auxiliares da construção, são omitidos automaticamente pelo software. As vantagens dessa construção é que podemos modificar o sólido ampliando, reduzindo, destacando suas arestas, arrastando ou fazendo sua extrusão em uma mesma janela de forma rápida, uma facilidade que não temos com sólidos físicos, por exemplo.

Na sala de aula, para além das suas possibilidades de representação do conteúdo matemático, o GeoGebra permite pensar e resolver problemas matemáticos de diferentes formas. Citamos, aqui, um trabalho que oferece uma perspectiva acerca das possibilidades de resolução de problemas no GeoGebra, escrito por Dantas e Matucheski (2019). Os autores apresentam três possibilidades distintas para a resolução de um problema no GeoGebra, adaptado de uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). O problema pedia a representação da distância entre duas formigas, em função do tempo que partiam do mesmo vértice de um triângulo, percorrendo suas arestas em direções opostas. Houve uma adaptação no enunciado, levando em conta que houve troca de mídia e, dessa forma, a resolução poderia usar as mais diversas ferramentas disponíveis no GeoGebra (Dantas; Matucheski, 2019). Nos três processos de construção, foi utilizada a Janela de

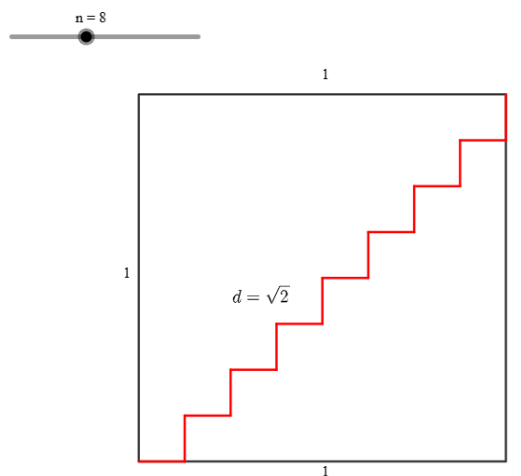
Visualização 2, que permitiu ver as formigas percorrendo o triângulo, assim como o gráfico sendo traçado. As resoluções estabeleceram conexões entre tópicos de Aritmética, Grandezas e Medidas, e Geometria.



Fonte: Dantas e Mathucheski (2019, p. 592).

Outra característica relevante do GeoGebra é a possibilidade de adicionar movimento a um objeto. O software permite movimentar objetos tanto por meio da ferramenta *animar* quanto pela utilização do *controle deslizante*, uma ferramenta do GeoGebra que define um intervalo pré-estabelecido e varia conforme um incremento determinado pelo usuário (Bueno; Basniak, 2020). Essa funcionalidade permite construções como as apresentadas nas Figuras 7 e 8.

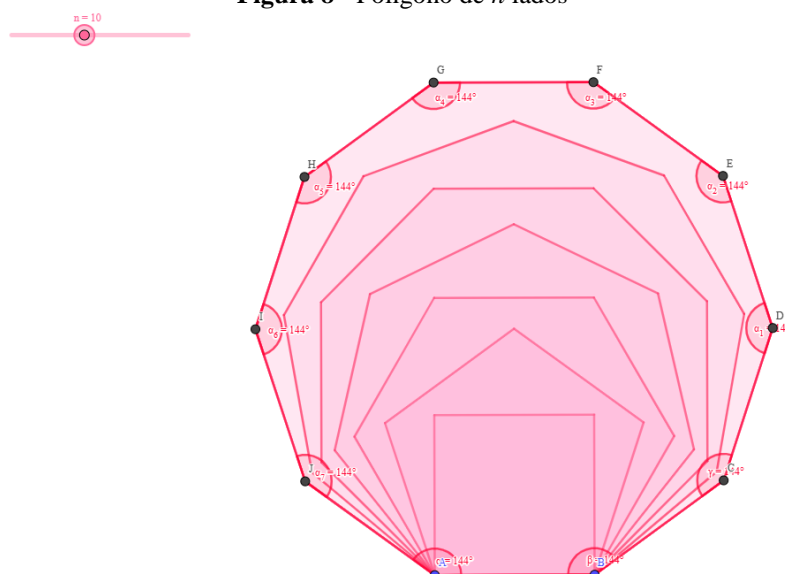
Figura 7 - Paradoxo da escada¹¹



Fonte: Elaborada pela autora.

¹¹ <https://www.geogebra.org/classic/hnme72j5>

Figura 8 - Polígono de n lados¹²



Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos notar que ambas as construções dependem do controle deslizante, e são modificadas assim que ele é alterado. Após habilitar a opção *animar* do Controle Deslizante, o contexto da construção é ampliado, ganhando possivelmente outros significados atribuídos pelo usuário. É nessa possibilidade de movimento que os *cenários animados* se amparam: quando o objeto inicia o movimento, o contexto do cenário torna-se evidente (Koftun, 2023). Bueno e Basniak (2021, p.142) definem cenários animados como uma construção no GeoGebra “em que elementos matemáticos criados são associados a um controle deslizante que quando animado, garante movimento aos personagens e/ou elementos que caracterizam a cena”. O cenário animado pode apresentar personagens ou descrever situações reais ou imaginárias, mas os elementos matemáticos devem ser inseridos de modo que, ao final da construção, se movam autonomamente e componham a cena animada (Bueno; Basniak; García-Cuéllar, 2023).

Ressaltamos a necessidade de o cenário animado possuir um contexto que não se limite ao movimento de um ponto vinculado ao Controle Deslizante. Para adicionar movimento à construção, pode-se utilizar o controle deslizante. Contudo, consideramos que o movimento realizado dentro de um cenário animado pode não estar necessariamente associado a um controle, visto que o GeoGebra permite o uso de diferentes ferramentas e estratégias de construção. Logo, possuir um controle deslizante não é uma condição fundamental para a composição do cenário dentro desta pesquisa.

Para conseguir entender o que é um cenário animado, podemos discutir diferenças entre uma animação. Koftun (2023) observa que uma animação requer a atribuição de movimento, e

¹² <https://www.geogebra.org/classic/f8krdpfq>

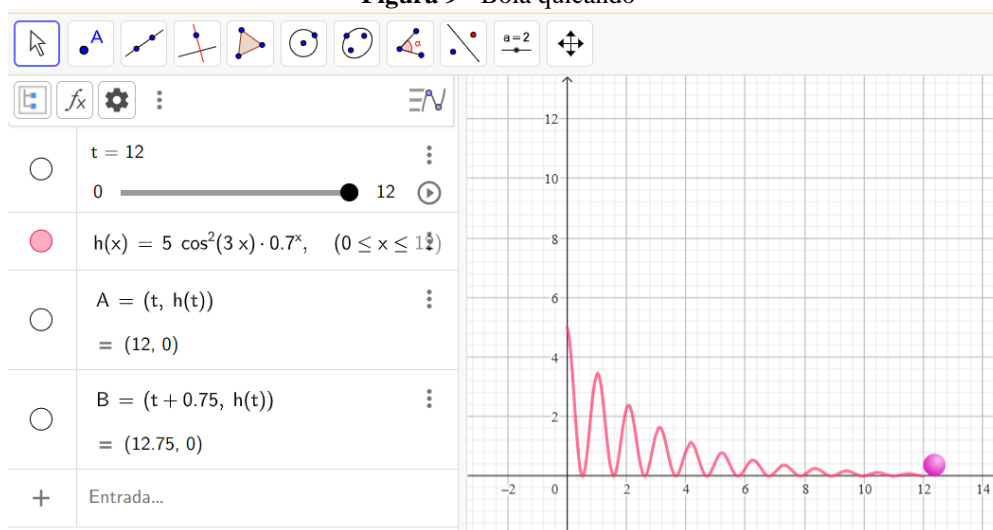
é um tipo de visualização dinâmica que não exige a interação do usuário (National Research Council, 2011, *apud* Koftun, 2023, p. 13). Ao comparar essa definição com as construções realizadas, é possível identificar que ela não descreve as características dos cenários animados, que possuem especificidades, como sua contextualização e sua relação com a matemática. Entendemos que um cenário animado se diferencia de uma animação por não se limitar ao simples movimento de um objeto dentro da construção. Para especificar a natureza desse movimento, dois critérios foram definidos por Koftun (2023), que se referem ao movimento realizado pelos objetos ou personagens do cenário animado. O movimento (i) não requer ação contínua do usuário para sua execução, exceto cliques em botões ou a seleção da opção *animar*, e (ii) deve ocorrer até que o objetivo do cenário seja alcançado (Koftun, 2023).

O processo de elaboração de um cenário animado, por sua vez, pode ser iniciado de diferentes formas. Podemos pensar na cena ou contexto a ser representado e, a partir da construção, identificar quais conteúdos matemáticos podem ser discutidos nessa construção ou, inversamente, o conteúdo pode surgir antes e o cenário ser pensado sobre as particularidades daquele conteúdo matemático. As duas formas permitem discutir matemática e as ferramentas do software utilizadas na construção. Entretanto, reconhecemos que as discussões resultantes desses cenários diferem em alguns aspectos, que tentamos pontuar brevemente a seguir.

A primeira possibilidade envolve um contexto sendo representado no GeoGebra. Para compreender como um cenário pode ser desenvolvido a partir de um contexto, utilizamos o exemplo de uma bola quicando. Algumas perguntas podem nortear o início dessa construção como: qual é o movimento descrito pela bola? Sua representação será feita de forma bidimensional ou tridimensional? Como a bola será representada? Essas perguntas auxiliam a abstrair a representação do movimento a ser realizado para o GeoGebra. A partir delas, podemos abstrair os principais elementos que compõem a construção e o usuário pode listar as possibilidades de representar esses elementos por meio das ferramentas disponíveis no software.

O usuário pode descrever o movimento da bola por meio de uma função periódica, como uma função seno ou cosseno, para representar o comportamento da bola ao ser lançada. Os parâmetros da função podem ser ajustados para ampliar a altura dos saltos ou modificar os períodos de repetição. Essas alterações podem ser realizadas utilizando testes, controles deslizantes para ajustar os parâmetros, entre outras estratégias. A escolha desses ajustes dependerá das preferências, do conhecimento matemático do usuário e de sua familiaridade com o software. Na figura 9, apresentamos uma possibilidade.

Figura 9 - Bola quicando¹³



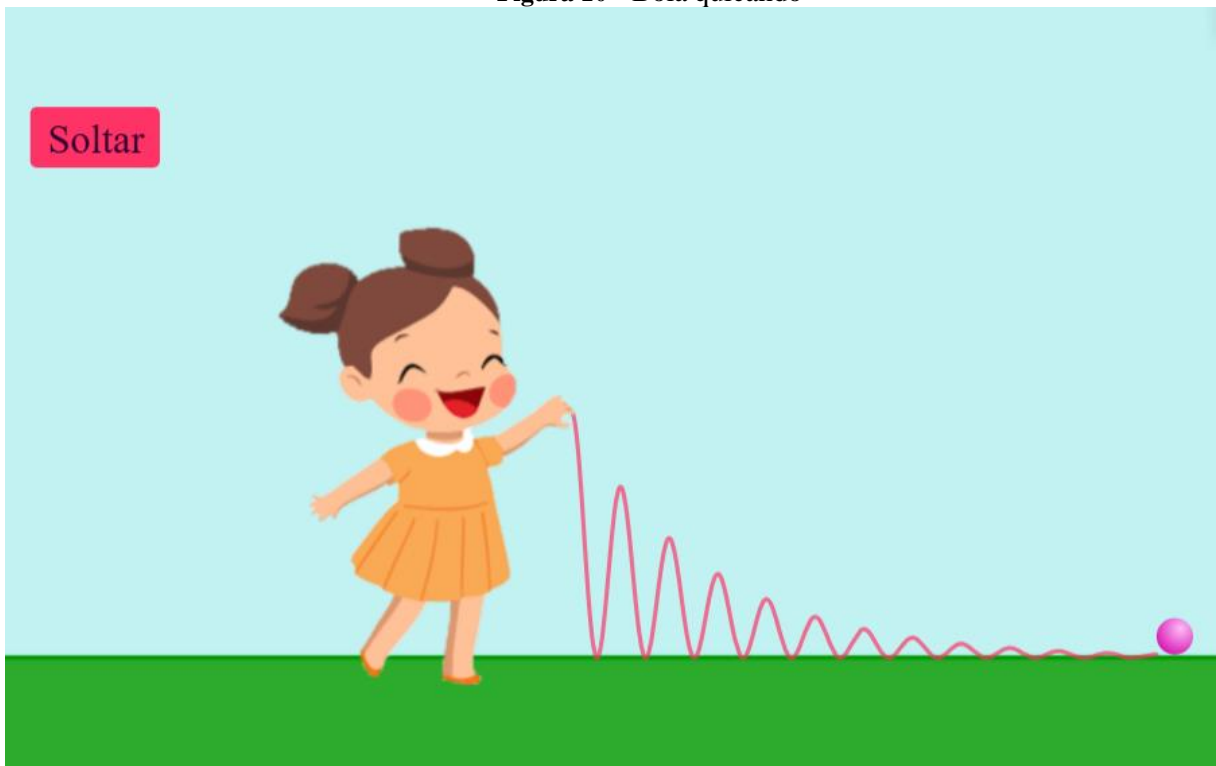
Fonte: Elaborada pela autora.

Para representar o movimento da bola, modelamos uma função cosseno multiplicada por 5 para aumentar a amplitude da curva. O uso do quadrado na função cosseno garante que os valores permaneçam acima do *eixo x*. Multiplicar a variável independente por 3 ajusta a periodicidade da função, enquanto a multiplicação dessa função por uma exponencial decrescente (de base menor que 1) aproxima o movimento do comportamento real da bola ao quicar. Um detalhe adicional é a restrição do domínio da função ao intervalo $[0, 12]$, que permite simular o movimento de soltar a bola, vê-la quicar algumas vezes e, eventualmente, parar.

Os conteúdos matemáticos mobilizados nessa construção incluem domínio e contradomínio de funções, gráfico de funções, funções exponenciais e trigonométricas. Essas escolhas dependem do usuário e podem ser substituídas ou complementadas por outras ferramentas ou estratégias. Por fim, na etapa de finalização do cenário, elementos como fundo, personagens e botões podem ser adicionados para enriquecer o contexto da construção (Figura 10, na página seguinte).

¹³ <https://www.geogebra.org/classic/f9sawhca>

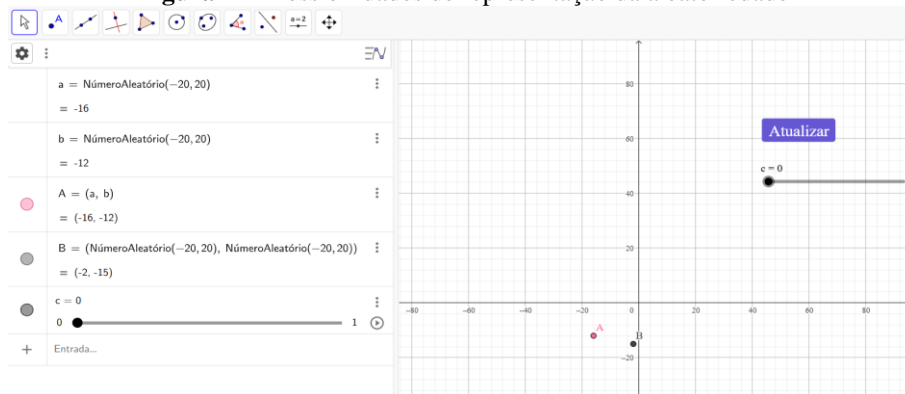
Figura 10 - Bola quicando¹⁴



Fonte: Elaborada pela autora.

A segunda estratégia identificada para a construção de um cenário é pensar em um contexto que represente o conteúdo matemático escolhido para a discussão. Assim como no caso anterior, utilizamos um exemplo para ilustrar o processo. Suponha que o objetivo do cenário seja trabalhar o conceito de aleatoriedade. Para abordar esse tema, é necessário considerar o que pode representar uma sequência de eventos aleatórios, frequentemente caracterizada pela ausência de regularidades ou padrões evidentes. Nesse contexto, o comando *Número Aleatório* [*min*, *máx*] do GeoGebra pode ser utilizado para selecionar um número aleatório dentro de um intervalo previamente estabelecido.

Figura 11 - Possibilidades de representação da aleatoriedade

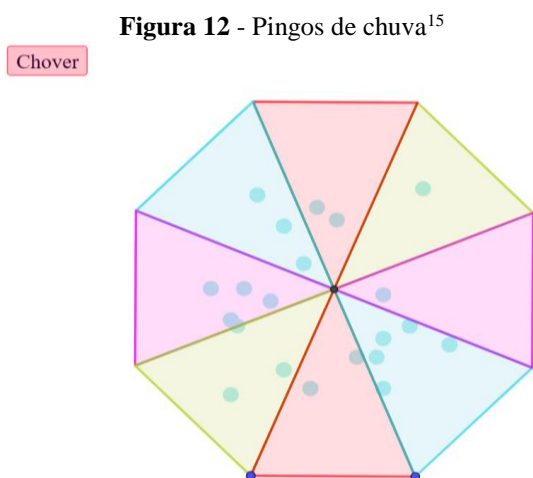


Fonte: Elaborada pela autora.

¹⁴ <https://www.geogebra.org/classic/f9sawhca>

Existem diferentes possibilidades para plotar pontos aleatórios sobre a malha. Duas delas foram utilizadas na Figura 11 e atreladas à programação de um controle deslizante c , definido em um intervalo de $[0,1]$ através do comando `Se[c=0,AtualizarConstrução[]]`. Quando animamos, os números aleatórios são atualizados, e basta habilitar o rastro para que pontos sejam marcados sobre o plano cartesiano.

Um possível contexto para essa construção seria pingos de chuva caindo sobre o guarda-chuva, umedecendo o tecido e deixando as marcas das gotas sobre a superfície formada por polígonos rígidos.



Fonte: Elaborada pela autora.

As duas situações discutidas permitem exemplificar diferentes formas de elaborar um cenário animado, com possíveis estratégias que podem ser modificadas com base nas preferências do usuário. De todo modo, existem limitações relativas ao conhecimento do conteúdo e do software: o usuário pode possuir um conhecimento matemático amplo, mas ser limitado pelas ferramentas do GeoGebra, e vice-versa. Nas duas situações, podem ser encontrados desafios maiores ou menores ao longo do desenvolvimento da construção.

Por fim, consideramos que um cenário animado não precisa representar fielmente um fenômeno ou simular a realidade, seu principal objetivo é promover uma conjuntura que permita discutir conteúdos da matemática em um dado contexto. Sua construção pode ser elaborada de formas distintas, com conteúdos envolvidos nesse processo ou apenas conceitos intuitivos que podem ser abordados pela construção.

¹⁵ <https://www.geogebra.org/classic/ymzznqv5>

3.3 O uso do GeoGebra em tarefas de natureza exploratória

Nesta subseção, tentamos contextualizar as discussões sobre as potencialidades e limitações do uso de cenários animados no GeoGebra para o contexto de sala de aula. Nesse sentido, podemos trazer os resultados obtidos por Estevam, Basniak, Paulek, Scaldelai e Felipe (2018) na análise das potencialidades do GeoGebra como mediador da aprendizagem em um contexto de desenvolvimento de uma tarefa de natureza exploratória. O estudo investigou como as tecnologias digitais, especialmente softwares computacionais, podem ser utilizadas para facilitar a prática pedagógica.

Para os pesquisadores, o software, aliado à tarefa e à dinâmica da aula, pode atuar como mediador do processo de aprendizagem. Esses três elementos, a tarefa, o software e a dinâmica da aula, podem dar acesso aos (des)conhecimentos dos alunos e apoiar processos como reflexão, conjectura e validação de significados (Estevam *et al.*, 2018).

Os pesquisadores afirmam que o uso do GeoGebra permite uma análise de representações dinâmicas e interativas, além de estimular o pensamento reflexivo, algo difícil de alcançar apenas com lápis e papel (Estevam *et al.*, 2018). O software facilita a atribuição de significado a relações matemáticas que geralmente são tratadas de forma algébrica e memorizadas pelos alunos. Segundo os autores, o GeoGebra permite articular diferentes aspectos matemáticos, promove a elaboração de conjecturas e a compreensão de conceitos abstratos. Na pesquisa, debatem os resultados de uma intervenção para discutir a lei dos senos, conteúdo abordado por meio da tarefa aliada ao uso do GeoGebra, que foi analisada no artigo (Estevam *et al.*, 2018).

Outra vantagem do uso do software em um contexto exploratório apresentada pelos pesquisadores é a exploração de hipóteses (Estevam *et al.*, 2018). Seu uso permite que os alunos formulem, testem e verifiquem hipóteses matemáticas que, sem o auxílio do computador, seriam difíceis de investigar em sala de aula. Esse processo é fundamental em uma abordagem pedagógica voltada para a investigação, na qual a reflexão crítica e o teste de hipóteses são centrais para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Estevam *et al.*, 2018).

O uso do GeoGebra também facilita a aprendizagem colaborativa, promovendo um ambiente de troca de ideias e construções coletivas. Essa colaboração entre os estudantes contribui para a construção do conhecimento de forma distribuída, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem por meio da interação e discussão coletiva de estratégias e soluções (Estevam *et al.*, 2018).

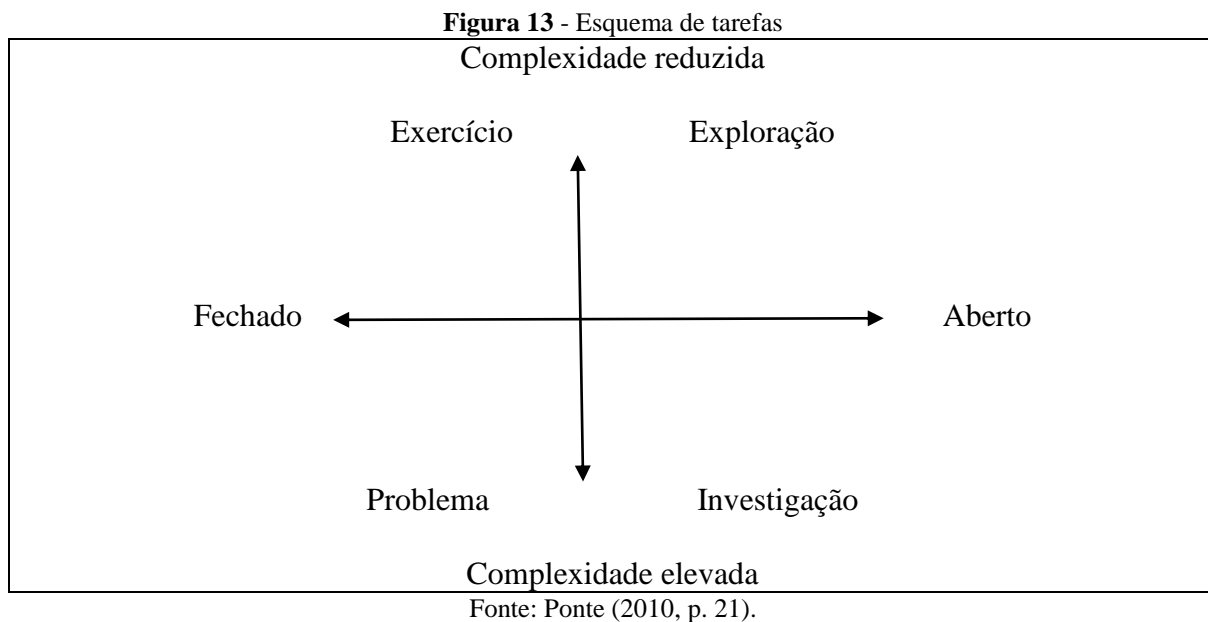
Contudo, os autores trazem uma discussão pertinente na sua conclusão da pesquisa, que é a dificuldade evidenciada pelos estudantes em reconhecer a tecnologia como ferramenta de ensino e o que pode decorrer dos modos como ela é inserida no processo pedagógico, inclusive em termos do processo avaliativo (Estevam *et al.*, 2018). Apesar de os estudantes utilizarem o software para desenvolver a tarefa, explorar, conjecturar e buscar justificativas, o relatório da aula permitiu que os autores identificassem a limitação da integração da tecnologia no processo. A justificativa trazida foi por conta da dificuldade dos estudantes em reconhecerem o GeoGebra como mediador da aprendizagem.

Assim como o uso do software, o uso da tarefa de natureza exploratória por si só não garante o aprendizado (Ponte, 2014), mas o oportuniza. Isso porque as tarefas devem ser elaboradas com o intuito de instigar o engajamento dos estudantes, permitindo que eles explorem e elaborem o conhecimento de forma ativa, o que pode aumentar a motivação e o interesse pela matemática (Estevam *et al.*, 2018). Consideramos que tarefas proporcionam um contexto para o trabalho dos estudantes em Matemática, mesmo não apresentando os conceitos matemáticos envolvidos de forma explícita (Ponte, 2014). Em geral, são propostas pelo professor, interpretadas pelos estudantes e podem resultar em atividades¹⁶ variadas ou, em alguns casos, em nenhuma atividade. Ponte (2014), com base em Christiansen e Walther (1986), comenta que a aprendizagem surge das atividades realizadas, não das tarefas em si. O que mais influencia nesse processo são as atitudes dos envolvidos, que depende de como a tarefa é proposta, da organização do trabalho dos estudantes, do ambiente de aprendizagem e das capacidades e experiências prévias dos participantes (Ponte, 2014).

Ponte (2014) discute algumas diferenças que atribui às tarefas no ensino de matemática. Elas podem variar em diversos aspectos, seja no grau de complexidade, no tempo de resolução, ou no papel atribuído ao professor e aos estudantes ao longo da resolução. Alguns autores trazem a discussão sobre a tipologia das tarefas, como a distinção feita por George Pólya (2003 *apud* Ponte 2014), Mary Kay Stein e Margaret Smith (1998 *apud* Ponte 2014) entre exercício e problema; Ole Skovsmose (2000 *apud* Ponte 2014), entre exercícios e cenários de investigação; ou David Kirshner (2000 *apud* Ponte, 2014), que distingue exercícios, provas e puzzles. Neste trabalho, não nos aprofundamos nas diferenças entre esses autores acima citados,

¹⁶ Entendemos *atividade* dentro da perspectiva da psicologia de Leontiev (2021), que é uma unidade molar e não aditiva da vida do sujeito, material e corporal. Em um sentido mais restrito, no nível psicológico, corresponde a uma unidade da vida mediada pelo reflexo psíquico, cuja função é orientar o sujeito em relação ao mundo objetivo. Para Christiansen e Walther (1986), a atividade humana realiza-se através de um sistema de ações, que são processos dirigidos para objetivos causados pelo motivo da atividade. A atividade é realizada através dessas ações, que podem ser vistas como suas componentes. A atividade existe apenas nas ações, mas atividade e ações são entidades diferentes.

focamos no que Ponte (2010) resume, por meio do seu esquema apresentado na Figura 13, ilustrando alguns tipos básicos de tarefas.



Podemos considerar que as tarefas de exploração e investigação são de cunho aberto, ou seja, permitem diferentes soluções, uma vez que o estudante pode ter mais liberdade ao elaborar estratégias para a resolução da tarefa, o que produz um desafio para o professor em prever as resoluções possíveis. Em contraponto, os problemas e os exercícios que são de cunho fechado, restringem as possibilidades de resolução. Também é possível discutir a complexidade das tarefas, considerando que atividades de natureza exploratória e investigativa podem ser identificadas apenas pelo grau de complexidade, e essa lógica é semelhante com os exercícios e os problemas. No entanto, muitas vezes é impossível distingui-los, uma vez que é um desafio saber o grau de complexidade que a tarefa terá para um determinado grupo de estudantes (Ponte, 2010).

Cada tipo apresenta uma vantagem diferente no que se refere à aprendizagem. Ponte (2010) afirma que tarefas mais fechadas, como exercícios e problemas, exigem rigor matemático na relação entre dados e resultados. Tarefas de natureza exploratória e exercícios que têm um menor grau de complexidade são mais acessíveis e fortalecem a autoconfiança dos estudantes. Já as tarefas de investigações e problemas, com grau de complexidade mais elevado, são indispensáveis para compor experiências matemáticas. Por fim, as tarefas de cunho aberto são fundamentais para desenvolver habilidades como autonomia e resolução de situações complexas.

Existe uma vasta tipologia de tarefas que podem ser propostas pelo professor, e a escolha dependerá dos objetivos intencionados com a aula. Nesse contexto, compreendemos que o uso do GeoGebra em aulas de matemática, aliado com uma abordagem exploratória, oferece uma série de vantagens que ampliam o potencial de aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, o planejamento das aulas deve ser feito de modo a assegurar práticas fundamentais que os professores podem desenvolver para manter os estudantes engajados nas discussões das tarefas (Cyrino; Teixeira, 2016).

Cyrino e Teixeira (2016) discutem uma possibilidade de estruturação para uma aula de natureza exploratória (Quadro 7) que, sob nosso ponto de vista, pode ser adaptada ao contexto que estamos interessados nesta pesquisa.

Quadro 8 - Framework

(continua)

Etapas	Ações	Elementos que compõe as ações
Antes da aula	Antecipar	<ul style="list-style-type: none"> -Estabelecer os objetivos específicos da aula. -Escolher/adaptar/elaborar a(s) tarefa(s), considerando: os objetivos da aula; a natureza da tarefa, priorizando aquelas de elevado nível de demanda cognitiva; conhecimentos prévios dos alunos; os recursos disponíveis na escola. -Resolver a(s) tarefa(s). -Prever possíveis resoluções, dúvidas e erros dos alunos. -Pensar em possíveis questionamentos, orientações ou outros recursos que podem ser sugeridos aos alunos, cuidando para manter o nível de demanda cognitiva. -Estabelecer conexões entre: as resoluções previstas e os conhecimentos matemáticos a serem desenvolvidos em sala de aula.
Durante a aula	Propor a tarefa	<ul style="list-style-type: none"> -Apresentar a tarefa para os alunos. -Explicitar para os alunos a dinâmica para viabilizar a resolução da tarefa: forma de trabalho (grupo ou individual), recursos a serem utilizados, gestão do tempo, organização do ambiente. Orientar formas de comunicação das resoluções: organização dos registros escritos, seleção e organização de uma resolução a ser socializada. -Distribuir a tarefa para os alunos. -Direcionar a leitura da tarefa, que pode ser feita pelo professor, pelo aluno individualmente ou pela sala. -Promover a compreensão do enunciado da tarefa. -Fomentar o engajamento dos alunos na discussão e na resolução da tarefa.
	Monitorar a resolução da tarefa	<ul style="list-style-type: none"> -Questionar, orientar e provocar o aluno quanto à resolução da tarefa. -Promover e mediar a interação entre os alunos. -Manter o desafio cognitivo e a autonomia dos alunos. -Solicitar justificações para as resoluções e representações utilizadas (corretas ou não). -Não validar a correção das respostas dos alunos. -Identificar as diferentes resoluções e representações e possíveis conexões entre elas. -Avaliar o potencial das diferentes resoluções para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa. -Fazer anotações a respeito das resoluções que tem potencial para promover a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa
	Selecionar e sequenciar as resoluções para discussão	<ul style="list-style-type: none"> -Escolher e propor resoluções e representações que têm potencial para a discussão e a aprendizagem, dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa. -Escolher e mobilizar os alunos para apresentação das resoluções selecionadas. -Sequenciar as apresentações tendo em conta os objetivos da aula e as características dos alunos. Por exemplo: partir de resoluções, corretas ou não, que foram utilizadas pela maioria; partir de uma resolução menos complexa para uma mais complexa. -Organizar a discussão: decidir se a discussão vai ocorrer após a apresentação de cada resolução selecionada ou após à apresentação de um conjunto de resoluções.
	Discutir resoluções	<ul style="list-style-type: none"> -Convidar os alunos para a discussão e promover uma atitude de respeito e interesse pelas diferentes resoluções apresentadas. -Promover e gerir a participação dos alunos nas discussões. -Incentivar os alunos a questionar e buscar possíveis respostas.

(conclusão)

Etapas	Ações	Elementos que compõe as ações
Durante a aula	Discutir resoluções	-Solicitar justificações para as resoluções e representações apresentadas. -Evidenciar e discutir equívocos comuns. -Salientar para os alunos a existência de diferentes resoluções para a tarefa -Caso necessário, introduzir uma resolução particularmente importante, que não foi apresentada pelos alunos, para atingir os objetivos da aula. -Confrontar as diferentes resoluções e analisar o potencial matemático de cada uma delas.
	Sistematizar as aprendizagens	-Relacionar os conhecimentos matemáticos presentes, mas resoluções dos alunos com seus conhecimentos prévios, ideias e representações matemáticas formalizadas, com vistas à sistematização. -Promover o reconhecimento da importância das ideias matemáticas, das regras e das generalizações. -Apresentar os conhecimentos matemáticos em uma estrutura organizada. -Incentivar os alunos a registrar os conhecimentos matemáticos sistematizados.

Fonte: Cyrino e Teixeira (2016, p. 86).

As etapas descritas acima, sobre as ações antes e depois da aula, consideram uma estrutura de fases que mesclam sugestões de ações a serem tomadas pelo professor no decorrer de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório da Matemática (Cyrino; Teixeira, 2016), que podem ser adaptadas ao contexto educacional do professor. Os autores partiram do modelo de quatro fases para o desenvolvimento das aulas proposto por Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), que prevê uma introdução à tarefa, seu desenvolvimento, discussão das resoluções dos estudantes e sistematização da tarefa pelo professor. As práticas de monitorar, selecionar, sequenciar e conectar respostas dos estudantes foram descritas por Stein *et al.* (2008).

Ressaltamos a importância das etapas de antecipar as resoluções, visto que o Geogebra possui muitas ferramentas e a resolução da tarefa antecipadamente permite ao professor estar ciente das possíveis estratégias escolhidas pelos estudantes (Cyrino; Teixeira, 2016). Ao propor a tarefa, o professor deve orientar os estudantes em relação ao seu desenvolvimento, organizando os alunos, esclarecendo as formas de registro das soluções, os recursos e ferramentas que os estudantes podem utilizar, e o modo de trabalho dentro da dinâmica da aula. Ao longo da resolução, o professor deve monitorar atentamente o progresso dos estudantes, questionando suas escolhas para verificar o conhecimento matemático mobilizado (Cyrino; Teixeira, 2016). É de grande importância que o professor não valide as respostas dos estudantes, permitindo que reflitam sobre suas escolhas posteriormente, na discussão com a turma.

Monitorar as resoluções dos estudantes permite que

o professor identifique as resoluções que são diferentes, as possíveis conexões entre elas, e avalie o potencial para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa, de modo que possa selecionar e sequenciar aquelas que serão apresentadas visando a discussão coletiva com a turma (Cyrino; Teixeira, 2016, p. 93).

Esse cuidado em observar o trabalho dos grupos facilitará sequenciar as resoluções dos estudantes para apresentação. Para realizar essa seleção, o foco deve estar no conteúdo matemático que o professor deseja abordar. Para sistematizar um novo conceito, Canavarro (2011) recomenda começar com resoluções que o ilustrem informalmente, e avançar para generalizações e formalizações. Os critérios de sequenciamento podem variar: o professor pode escolher com base nas ferramentas utilizadas do software, nas diferentes representações, ou iniciar com resoluções simples, ferramentas mais intuitivas ou explorar erros, uso de ferramentas ou estratégias muito trabalhosas que frequentemente enriquecem a compreensão de todos os estudantes (Canavarro, 2011).

As diferentes resoluções podem estimular a discussão coletiva da turma, momento em que os estudantes são convidados a justificar suas resoluções. Cyrino e Teixeira (2016) sugerem que, para que os estudantes se sintam à vontade ao justificar e argumentar suas resoluções, o professor deve cultivar uma atitude de respeito e destacar a possibilidade de múltiplas soluções. Quando necessário, o professor pode introduzir uma resolução relevante que não tenha sido apresentada pelos estudantes. Durante ou após a discussão, é essencial incentivar os estudantes a estabelecerem conexões entre as resoluções, analisando seu potencial matemático (Cyrino; Teixeira, 2016). O objetivo dessas discussões é promover o desenvolvimento coletivo de ideias matemáticas significativas que consolidem as aprendizagens (Canavarro, 2011; Stein *et al.*, 2008).

Por fim, a sistematização é o momento da aula em que o professor recupera as discussões anteriores e pode relacionar os conhecimentos prévios dos estudantes com o conteúdo matemático intuído na tarefa. Não se espera que o estudante já saiba os conceitos ou nomes que serão formalizados pelo professor, incluindo as estratégias utilizadas e considerando os recursos e ferramentas do software (Cyrino; Teixeira, 2016). Nessa etapa, o professor pode trazer definições, conceitos e ideias abordados no desenvolvimento da tarefa, considerando as possíveis generalizações.

A organização apresentada aqui é uma sugestão de abordagem pelos autores, e não se configura como um manual (Cyrino; Teixeira, 2016). Essa organização orientou o planejamento das aulas e das tarefas que realizamos nesta pesquisa.

No capítulo seguinte, apresentamos a organização da intervenção, as tarefas e cenários elaborados para a investigação das potencialidades e limitações no uso de cenários animados no GeoGebra, aliados a tarefas de natureza exploratória para o ensino de Limite de funções reais de uma variável real, objetivo desta pesquisa.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos os aspectos metodológicos relacionados ao planejamento, desenvolvimento e análise das intervenções realizadas nesta pesquisa. Detalhamos os procedimentos e as escolhas realizadas para que o leitor compreenda o contexto em que o estudo foi conduzido. Ao longo das subseções, abordamos o planejamento das aulas, a elaboração das tarefas e dos cenários animados, bem como o perfil da turma participante. Também listamos os equipamentos utilizados para gravação e registro dos dados produzidos, explicando como esses dados foram organizados e transcritos. Por fim, descrevemos o formato da análise, os critérios para a seleção dos dados e o referencial teórico adotado para sua interpretação.

4.1 Planejamento das aulas

Esta pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo, foi desenvolvida a partir de intervenções realizadas em uma turma do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade pública. As intervenções ocorreram no início do segundo semestre letivo, quando os estudantes retornavam do recesso, e envolveu uma sequência de doze aulas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, distribuídas em seis encontros (Quadro 9). Cada encontro teve duração aproximada de 1h30min e foi realizado em aulas geminadas, às terças-feiras, das 20h55min às 22h35min, e às quintas-feiras, das 19h às 20h40min.

Quadro 9 - Organização das aulas

Encontro	Atividade
1	Construção do cenário animado <i>Velocímetro</i>
2	Proposição da tarefa 1
3	Continuação da tarefa 1
4	Discussão e sistematização
5	Proposição da tarefa 2
	Apresentação do cenário animado <i>Flecha</i> não finalizado
6	Discussão e sistematização
	Finalização do cenário animado <i>Flecha</i>

Fonte: elaborado pela autora.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral era específica para o curso de Licenciatura em Matemática, no período noturno. As aulas incluíram a construção de dois cenários animados, cada um acompanhado de uma tarefa de natureza exploratória elaborada exclusivamente para o respectivo cenário. Essas tarefas foram discutidas previamente com os

membros do Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Matemática e Estatística (GEPTeMatE) para garantir a coerência metodológica. Durante os encontros, os estudantes participaram da resolução das tarefas (Figuras 14 e 15), elaboraram relatórios e exploraram os cenários animados. Os dados produzidos foram registrados por meio de gravações de áudio e vídeo das telas dos computadores utilizados. Especificamente, os encontros 1, 4 e 6 foram registradas exclusivamente em áudio, utilizando gravadores e celulares. Nas demais aulas, além das gravações em áudio das interações da pesquisadora com os grupos, as telas dos computadores dos estudantes também foram capturadas com o auxílio do *software* livre¹⁷ OBS (Open Broadcaster Software). Antes de iniciar as intervenções, todos os participantes assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido¹⁸, garantindo que estavam cientes da gravação da aula e do uso de seus registros para fins de pesquisa. Essa organização geral das atividades dividiu-se em fases, como sintetizado no Quadro 9. A organização foi pautada no *framework* descrito por Cyrino e Teixeira (2016), que inspirou a disposição dos momentos de proposição da tarefa, monitoramento das resoluções, discussão e sistematização, distribuídos entre os encontros e em cada aula. Os autores indicam que, em todas as fases, o professor deve monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos estudantes ao longo de toda a aula, para que os objetivos da tarefa sejam atingidos.

A turma contava com 33 estudantes matriculados, dos quais 28 participaram efetivamente das aulas. Para a resolução das tarefas, foi solicitado que a turma se organizasse em grupos de até quatro integrantes. No entanto, houve variação no tamanho dos grupos, com alguns compostos por apenas dois participantes, e outros por até cinco indivíduos, organização escolhida pelos estudantes levando em consideração a afinidade entre eles.

4.2 A proposta pedagógica

A primeira tarefa teve como objetivo a introdução do conceito de Limite de funções reais de uma variável real, enquanto a segunda abordou a discussão de Limites no infinito. Para o desenvolvimento da proposta pedagógica, foram previstas 4 aulas geminadas. Os cenários animados no GeoGebra foram utilizados pelos estudantes como objeto de investigação, auxiliando na discussão e na resolução das tarefas 1 e 2 propostas. Cada uma dessas tarefas é apresentada na subseção seguinte, com foco na discussão dos objetivos de cada

¹⁷ A escolha do software OBS é justificada pela gratuidade do programa.

¹⁸ Número do parecer do Comitê de ética: 3.951.215.

questão e nas ações previstas para os estudantes e para o professor durante o processo de resolução.

4.2.1 Tarefa 1

Para a resolução da primeira tarefa, o cenário animado *Velocímetro* foi construído na primeira aula, a fim de que os estudantes conhecessem os recursos do software para resolver a Tarefa 1.



Fonte: elaborada pela autora.

O cenário animado²⁰ consiste em um carro deslocando-se em movimento uniformemente variado por uma rua. Ele permite acesso a uma planilha que apresenta duas colunas: uma com os instantes t e outra para a posição $s(t)$, em que o carro se encontra naquele instante em relação à origem do movimento. O usuário pode alterar, por meio de uma Caixa de Diálogos, a quantidade de casas decimais dos instantes t . Além da Planilha, é possível visualizar o gráfico do deslocamento do carro representado pela função $s(t)$ na Janela de Visualização 2.

Para movimentar o carro, criamos uma função $f(x) = x^3$ e restringimos seu domínio para o intervalo de $0 \leq x \leq 5$ por meio da criação de um Controle Deslizante t que varia dentro desses parâmetros. Associamos aos pontos que definem a imagem as seguintes coordenadas: $A = (f(t), 0)$ e $B = (f(t) - 1, 0)$, para que a imagem do carro se deslocasse sobre o plano representando o movimento do carro. Para habilitar a visualização dos valores do domínio e da

¹⁹ Link para a construção no GeoGebra: <https://www.geogebra.org/classic/n3jeagwy>.

²⁰ Os roteiros para as construções dos cenários *Velocímetro* e *Flecha* estão nos apêndices desta dissertação.

imagem da função na Planilha, criamos um ponto $P = (t, f(t))$, cujo rastro foi habilitado na Janela de Visualização 2. Ao clicar com o botão direito sobre esse ponto P, é possível selecionar a opção *Exportar para a planilha* disponibilizada pelo GeoGebra, para que as coordenadas do ponto sejam registradas na Planilha conforme o ponto varia.

Para a criação da Caixa de Diálogos que altera o incremento do controle deslizante t , foi necessária a criação de uma nova variável d . A variável foi definida como $d = 0.1^{b^{21}}$, em que b é um novo controle deslizante, que varia entre o intervalo $[0,5]$ com incremento 1. Essa caixa de diálogos foi vinculada ao controle b e aceita valores entre 0 e 5, que permite que a variável d assuma valores decimais, centesimais e assim sucessivamente. Por fim, essa variável d foi inserida como *incremento* do controle deslizante t . Os elementos da paisagem, como montanhas, árvores e postes, foram inseridos por meio de imagens, e a representação do solo, pista e céu foi feita por meio de retas e inequações.

O objetivo do cenário animado é proporcionar um contexto que permita, ao usuário, investigar o cálculo da velocidade média em diferentes intervalos, oferecendo as ferramentas para uma investigação desse contexto, enquanto a tarefa proposta direciona o estudante nesse processo. À medida que as questões avançam, os intervalos nos quais a velocidade média é calculada diminuem, possibilitando uma aproximação satisfatória da velocidade instantânea em um instante t escolhido. A tarefa (Quadro 10) foi elaborada com cinco questões, algumas divididas em itens, que solicitam que os estudantes calculem a média aritmética em intervalos cada vez menores. Dessa forma, espera-se que os estudantes possam sugerir que a velocidade média tende a se aproximar da velocidade instantânea naquele ponto, fazendo referência ao conceito de Limite.

Quadro 10 - A tarefa

(continua)

Tarefa 1 - Cenário <i>Velocímetro</i>²²	
Nome: _____	e-mail: _____
Nome: _____	e-mail: _____
Nome: _____	e-mail: _____
Nome: _____	e-mail: _____
<p>A posição de um carro em movimento varia com o tempo, sendo $s(t)$ sua posição em cada instante t. A velocidade média é calculada pela razão entre a variação das posições e o intervalo de tempo: $v(t, t_1) = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$. Gostaríamos de investigar a velocidade instantânea em um momento específico t_1. Para isso, abra seu arquivo no GeoGebra ou pelo link disponibilizado, e descreva seu processo de investigação, detalhando as estratégias e procedimentos utilizados para responder às questões.</p>	

²¹ Cabe informar que a representação de números racionais na forma decimal no GeoGebra é feita por meio do ponto. Por exemplo, o número dois inteiros e cento e quarenta e três milésimos é escrito como 2.143 no software.

²² <https://www.geogebra.org/classic/fp6c7hmt>

1. Qual a velocidade média do carro no trajeto?
2. Determine a velocidade média:
 - (a) Entre $1 \leq t_1 \leq 3$.
 - (b) Em pelo menos dois intervalos diferentes daquele do item (a).
3. As velocidades médias da questão 2 diferem da velocidade média da questão 1? Por quê?
4. Determine:
 - (a) Intervalos $[2, t]$ e $[t, 2]$ com t próximo de 2, utilizando uma, duas ou três casas decimais.
 - (b) A velocidade média $v_m(t, 2)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
2		
2		
2		
2		
t	t_1	
	2	
	2	
	2	
	2	

- (a) Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de $t_1 \neq 2$, utilizando uma, duas ou três casas decimais.
- (b) A velocidade média $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
t	t_1	

- (a) Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de t_1 diferente dos escolhidos nos itens acima.
- (b) As velocidades médias $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
t	t_1	

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

Fonte: elaborado pela autora.

Espera-se que os estudantes percebam que a velocidade média pode ser utilizada para estimar a velocidade instantânea, ao observar o comportamento do carro em intervalos de tempo

cada vez menores. Quando calculamos a velocidade média entre dois instantes, como t e t_1 , utilizamos a fórmula $v_m = \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}$. À medida que o intervalo $t_1 - t$ se aproxima de zero, a velocidade média torna-se uma melhor representação da velocidade instantânea. Isso é conhecido como o limite da velocidade média, quando a variação de tempo tende a zero, e podemos escrever que $v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}$. Isso indica que a velocidade instantânea em t é obtida considerando a variação da posição $s(t)$ em relação ao tempo, tomando o Limite quando t_1 se aproxima de t .

Por exemplo, ao calcular $v(t)$ e obter valores cada vez mais precisos da velocidade instantânea, conseguimos identificar o comportamento do carro em um momento específico, como no instante $t = 2$, em que se conclui que $v(2) = 12$. Portanto, a velocidade média serve como aproximação satisfatória, e ao reduzir o intervalo de tempo indefinidamente, obtém-se, no Limite, a velocidade instantânea.

Para iniciar a construção desse raciocínio, na primeira questão, solicitamos que os estudantes descrevessem o que compreendiam por velocidade média. A partir dessa discussão entre o grupo, era esperado que surgissem questionamentos sobre o conceito de velocidade, deslocamento de espaço e variação de tempo. Era previsto que utilizassem os recursos e ferramentas do software apresentados no momento da construção do cenário animado. Para tanto, elaboramos um quadro de antecipação a fim de prever possíveis ações dos estudantes e possíveis resoluções que poderiam ser realizadas para cada questão. As ações do professor em resposta a essas ações foram incluídas, de modo que a interação entre professor e estudante permitisse atingir o objetivo de cada questão e, conseqüentemente, o objetivo geral da tarefa.

Quadro 11 - Antecipações da questão 1

(continua)

Questão 1: Qual a velocidade média do carro no trajeto?	
Objetivo: Determinar a velocidade média no trajeto todo, levando em consideração o deslocamento total ao longo de todo intervalo de tempo.	
Ações do estudante	Ações do professor
Habilitar a Malha e os eixos	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar sobre a precisão dos dados coletados. - Perguntar sobre como obter o deslocamento a partir da cena animada. - Perguntar do que depende o movimento do carro. - O que cada botão interfere na cena (posição final/inicial).
Habilitar a Planilha	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar o que são os valores que aparecem na planilha. - Perguntar qual a relação entre os dois valores. - Perguntar por que esses valores aparecem.
Habilitar a Janela de Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar quais são as informações buscadas. - O que são os objetos visíveis na Janela de Álgebra. - Qual deles pode oferecer informações úteis para obter a velocidade média

(conclusão)

Habilitar a Janela de visualização 2	- Questionar quais informações a função oferece para obter a velocidade média.
Não entender a pergunta ou calcular a posição	- Perguntar o que é o deslocamento. - Questionar o que é a média de algo. - Perguntar o que é a velocidade média de um carro. - Pedir para que identifiquem, no cenário, posição inicial e final do carro. - Perguntar qual foi o tempo total decorrido da saída. - Perguntar do que depende o movimento do carro. - O que cada botão interfere na cena (posição final/inicial).

Fonte: elaborado pela autora.

Os estudantes poderiam optar por responder com base em múltiplas ações ao mesmo tempo, ou apenas por meio de uma. A questão exige identificar um intervalo de tempo, considerando um instante inicial em que o movimento acontece, e um final em que o movimento termina. Já a segunda questão, composta por dois itens, solicita que o intervalo seja restringido entre 1 e 3, e o outro intervalo é escolhido pelo grupo, explorando o fato de que a velocidade média em um intervalo específico resulta em um valor distinto, se calculada sobre o trajeto todo. O objetivo era que os estudantes percebessem a diferença significativa entre a velocidade média da questão 1 para a questão 2, assim como nos demais intervalos escolhidos pelo grupo.

Quadro 12 - Antecipações da questão 2

Questão 2: Perceber que a escolha de intervalos diferentes altera o valor da velocidade média do carro. a) Determinar a velocidade média entre $1 \leq t \leq 3$	
Objetivo: Calcular a velocidade média entre os instantes 1 e 3.	
Ações do estudante	Ações do professor
Calcular somente a posição do carro	- Questionar se existe alguma variação no cenário. - Perguntar o que significa a posição em um dado t . - Pedir para diferenciar <i>deslocamento</i> de <i>posição</i> . - Perguntar qual foi o deslocamento entre os instantes.
Não entender a pergunta ou calcular a velocidade em um intervalo diferente	- Pedir para identificar quais são os respectivos valores da posição $s(1)$ e $s(3)$. - Perguntar o que é o deslocamento. - Questionar o que é a média de algo. - Perguntar o que é a velocidade média de um carro. - Pedir para que identifiquem, no cenário, posição inicial e final do carro. - Perguntar qual foi o tempo total decorrido da saída. - Perguntar do que depende o movimento do carro. - O que cada botão interfere na cena (posição final/inicial).
Questão 2: b) Em pelo menos dois intervalos diferentes do item a)	
Objetivo: Identificar dois intervalos de deslocamento diferentes do item a)	
Ações do estudante	Ações do professor
Confundir t_1 e t	- Verificar se o aluno usou $v_m(t, t_1) = \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}$ em vez de $v_m(t_1, t) = \frac{s(t)-s(t_1)}{t-t_1}$, resultando em valores de velocidade com o sinal invertido.

Fonte: elaborado pela autora.

Esperávamos que os estudantes, ao responder ao item dois da segunda questão, escolhessem um intervalo menor do que o definido no primeiro item, ou que utilizassem casas decimais nos valores calculados, percebendo que era possível obter um valor mais preciso quanto fosse necessário para o cálculo da velocidade média.

Uma explicação para as diferenças entre os valores obtidos nas respostas das questões anteriores foi solicitada na questão 3, que pede que os estudantes descrevam por que o valor da velocidade média muda nos diferentes intervalos.

Quadro 13 - Antecipações da questão 3

Questão 3: As velocidades médias da questão 2 diferem da velocidade média da questão 1? Por quê?	
Objetivo: Perceber que a velocidade média depende do intervalo t escolhido	
Ações do estudante	Ações do professor
Afirmar que não muda	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar por que não varia. - Questionar quais foram os valores obtidos. - Verificar quais foram os intervalos escolhidos. - Pedir para comparar as velocidades médias calculadas anteriormente. - Solicitar que analisem a variação da função $s(t)$ dentro dos intervalos.
Afirmar que muda	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar quanto muda. - Perguntar se as diferenças são significativas. - Questionar por que os valores diferem. - Pedir para comparar as velocidades médias calculadas anteriormente.

Fonte: elaborado pela autora.

Esperávamos que os estudantes concluíssem, nessa questão, que a velocidade média depende do intervalo escolhido e da quantidade de casas decimais consideradas no cálculo. Para isso, eles poderiam utilizar a planilha e solicitar que o software calculasse a velocidade média para os valores escolhidos, ou poderiam usar a calculadora. Os mesmos recursos poderiam ser utilizados na questão 4.

Na quarta questão, solicitamos o preenchimento de uma tabela para os intervalos em torno de $t = 2$. A construção de uma tabela permite a visualização e a organização dos dados. Dessa forma, consideramos que ficaria visualmente mais organizado para o estudante identificar padrões na variação da velocidade média, conforme diferentes valores maiores e menores que dois fossem atribuídos. Era esperado que os estudantes diminuíssem esse intervalo, a fim de perceber a aproximação da velocidade média de doze.

Quadro 14 - Antecipações da questão 4

Questão 4: Determine intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para $t = 2$. Determine V_m em cada um dos intervalos escolhidos.	
Objetivo: Perceber que a escolha de valores em um intervalo pequeno em torno de $t = 2$ permite obter um valor mais próximo da velocidade nesse instante.	
Ações do estudante	Ações do professor
Escolher intervalos muito grandes	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar a escolha de intervalos grandes. - Questionar a respeito da diferença já calculada em intervalos maiores e menores nas questões anteriores. - Perguntar se faz sentido calcular para intervalos cada vez menores. - Questionar sobre a escolha de valores mais próximos de 2. - Questionar o quão próximo de 2 podemos chegar.
Confundir t_1 e t	<ul style="list-style-type: none"> - Verificar se o aluno usou $v_m(t, t_1) = \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}$ em vez de $v_m(t_1, t) = \frac{s(t)-s(t_1)}{t-t_1}$, resultando em valores de velocidade com o sinal invertido. - Perguntar se faz sentido obter uma média negativa.
Escolher valores errados para t e t_1	<ul style="list-style-type: none"> - Verificar se houve a escolha de um t_1 diferente do valor fixo que deveria ser usado, como $t_1 = 1$ em vez de $t_1 = 2$.
Usar o mesmo valor para t e t_1	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar a escolha dos valores. - Perguntar sobre a divisão por zero. - Questionar se é uma interpretação correta da velocidade média.
Erros devido a arredondamentos	<ul style="list-style-type: none"> - Pedir para verificar o cálculo. - Questionar por que usaram o arredondamento. - Perguntar se faz sentido arredondar, se o intuito é escolher intervalos específicos cada vez menores.
Questão 4: itens (c) a (f).	
Objetivo: Perceber que o processo de restringir um intervalo tão pequeno quanto se queira permite obter uma aproximação satisfatória para a velocidade média no instante investigado.	
Ações do estudante	Ações do professor
Selecionar valores aleatórios	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar se existe alguma regularidade. - Questionar o que está acontecendo com o valor da velocidade média.

Fonte: elaborado pela autora.

O uso da tabela para inserir os dados tem como intuito minimizar os erros nos cálculos necessários à realização da tarefa. A tabela também permite organizar as informações e facilitar a visualização do comportamento investigado, à medida que o intervalo de tempo diminui.

Para a última questão, solicitamos que o grupo generalizasse suas hipóteses. Esperávamos que os estudantes percebessem que essa análise pode ser feita em diferentes funções $s(t)$, permitindo uma análise mais geral do comportamento da taxa de variação. A ideia central é manipular a fração $v_m(t, t_1) = \frac{s(t_1)-s(t)}{t_1-t}$ para compreender como ela se comporta quando o intervalo $t_1 - t$ se aproxima de zero. Embora essa expressão não esteja definida para $t_1 - t_1 = 0$, isso não compromete a sua exploração, pois o foco está no comportamento do quociente para valores de t_1 muito próximo de t , mas ainda distintos. Esse procedimento possibilita a generalização da abordagem para diversas situações em que se deseja estimar uma taxa instantânea de variação.

Quadro 15 - Antecipações da questão 5

Questão 5: O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?	
Objetivo: Concluir que considerar intervalos tão pequenos quanto se queira para calcular a velocidade média permite obter uma aproximação satisfatória para a velocidade instantânea em um dado valor entre esses dois intervalos.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não concluir nada	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar o que ocorre quando os intervalos $[t_1, t]$ e $[t, t_1]$ diminuem progressivamente. - Perguntar se esse comportamento seria igual para qualquer função $s(t)$. - Questionar como podemos obter uma aproximação satisfatória da velocidade instantânea em t_1 a partir da velocidade média.
Concluir que $v_m(t)$ se aproxima de $v(t)$	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar quais são as condições para que essa aproximação seja satisfatória. - Perguntar se esse comportamento seria igual para qualquer função $s(t)$.

Fonte: elaborado pela autora.

Reconhecemos que as ações planejadas podem não abranger todas as estratégias que os estudantes poderiam adotar para resolver a tarefa. As estratégias definidas foram baseadas no planejamento do professor e em suposições sobre as escolhas dos alunos, considerando seus conhecimentos prévios e a introdução ao software que foi feita na primeira aula. Partimos do pressuposto de que nenhum deles possuía conhecimento prévio sobre Limite de funções reais de uma variável real, apenas os conceitos abordados na disciplina, de Introdução ao Cálculo sobre Números Reais e intervalos, expressões fracionárias, equações e inequações, funções reais de uma variável real e gráficos de funções, durante no semestre anterior, segundo a ementa da disciplina.

Após a realização da tarefa, o professor conduziu a etapa de discussão e sistematização, considerando as resoluções apresentadas pelos grupos, formalizando, na sequência, a definição de Limite de funções reais de uma variável real.

4.2.2 Tarefa 2

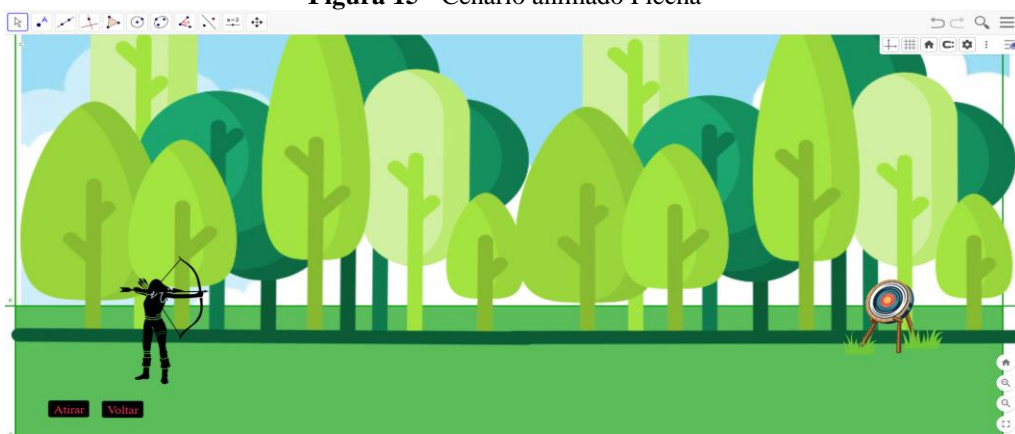
Para a segunda tarefa, abordamos um contexto que parte de um paradoxo que pode ser abordado tanto pela filosofia quanto pela matemática: o paradoxo da flecha, formulado por Zenão de Eleia (490-430 AEC). Segundo o raciocínio de Zenão, supomos que uma certa distância pode ser dividida em infinitas partes, e que a flecha deve percorrer todas elas antes de atingir seu alvo. Inicialmente, ela percorre metade do trajeto, depois metade da metade, e assim sucessivamente. Esse argumento sugere que o movimento seria impossível, pois exigiria a conclusão de uma infinidade de etapas finitas. Além disso, a interpretação de que a flecha está

sempre em um ponto fixo a cada instante leva à conclusão de que ela nunca estaria realmente em movimento. Consequentemente, o paradoxo argumenta que a flecha nunca alcançaria o alvo, pois sempre haveria uma nova fração do caminho a ser percorrida.

Para explorar essa questão na nossa tarefa, consideramos x como a distância do arqueiro até o alvo. Segundo o raciocínio do paradoxo, a flecha percorrerá sempre a metade do que falta para alcançar o alvo; logo, na primeira etapa, ela terá percorrido $\frac{x}{2}$, na segunda etapa $\frac{x}{4}$, e na terceira $\frac{x}{8}$. Podemos generalizar essas frações obtidas no trajeto como $\frac{x}{2^n}$, e a posição da flecha entre o arqueiro e o alvo como $x - \frac{x}{2^n}$, ou de forma equivalente, $x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Conforme n aumenta, mais nos aproximamos da distância total, ou seja $x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, tende a x .

Para representar esse paradoxo no GeoGebra por meio de um cenário animado, construímos um arqueiro a uma distância de quarenta unidades de um alvo, e criamos um controle deslizante a que varia no intervalo $[0,40]$. Para representar o comportamento descrito, subtraímos da distância total a expressão $\frac{40}{2^n}$ e a inserimos em uma soma por meio do comando $Soma = (Expressão, Variável, Valor\ inicial, Valor\ final)$, resultando no número $b = Soma\left(\frac{40}{2^i}, 0, a\right) - 40$. Utilizamos esse número para definir uma das coordenadas do ponto da imagem que era definida por um ponto C e outro D. As coordenadas passaram a ser $C = (b, 8)$ e $D = (b-2, 6.1)$, e permitem que a imagem se desloque como a descrição do paradoxo a partir do momento em que o controle deslizante a é animado.

Figura 15 - Cenário animado Flecha²³



Fonte: elaborado pela autora.

O contexto desse cenário permite propor uma investigação sobre o que acontece à medida que as etapas avançam, sugerindo que o espaço pode ser dividido infinitas vezes. Em

²³ <https://www.geogebra.org/classic/bna9mpjk>

outras palavras, é possível analisar o comportamento do sistema quando o número de divisões tende ao infinito. O objetivo da tarefa, em conjunto com o cenário animado, é que os estudantes explorem o conceito de Limites de sequências e sobre como o infinito pode surgir paradoxo.

Essa tarefa (Quadro 17) foi realizada no encontro seguinte à sistematização da Tarefa 1 com os mesmos estudantes e seguindo a mesma disposição dos grupos, porém o cenário animado não foi construído pelos estudantes. Alguns grupos tentaram finalizar o cenário animado enquanto outros apenas discutiram estratégias.

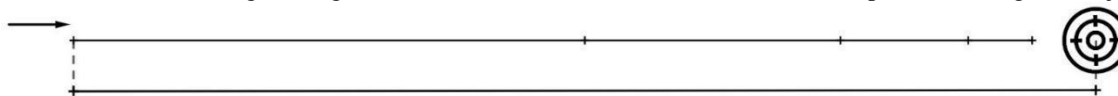
Quadro 16 - Tarefa Flecha

Tarefa 2 - Cenário *Flecha* ²⁴

Nome: _____ e-mail: _____
 Nome: _____ e-mail: _____
 Nome: _____ e-mail: _____
 Nome: _____ e-mail: _____

Vamos analisar um famoso paradoxo proposto por Zenão de Eleia: o paradoxo da flecha. Imagine um arqueiro lançando uma flecha em direção a um alvo. Zenão argumenta que, para a flecha atingir o alvo, ela precisa passar por infinitos pontos ao longo do caminho.

Nesse sentido, vamos dividir o caminho da flecha em etapas: na primeira, ela percorre metade da distância; na segunda, metade da metade restante, e assim por diante. Considerando essa divisão, vamos investigar se a flecha realmente consegue atingir o alvo, assumindo a existência desses infinitos pontos ao longo do trajeto.



1. Complete, no diagrama, a 3ª, 4ª e 5ª etapa.
2. Determine a distância:
 - (a) Entre o alvo e o arqueiro.
 - (b) Correspondente à 1ª etapa do percurso.
 - (c) Correspondente à 2ª etapa do percurso.
 - (d) Correspondente à 5ª etapa do percurso.
3. Como calcular a distância percorrida pela flecha na n -ésima etapa?
4. Como calcular a distância percorrida pela flecha após n etapas?
5. O que podemos concluir sobre a soma dessas divisões e a distância total que a flecha percorre à medida que o número de etapas aumenta?
6. De acordo com o raciocínio de Zenão, a flecha atinge seu alvo? Por quê?
7. A partir das suas resoluções, finalize o cenário.

Fonte: elaborado pela autora.

A primeira questão solicita que os estudantes completem o diagrama como verificação da sua compreensão da lógica das etapas descritas no enunciado. A segunda complementa a primeira, solicitando que calculassem as distâncias correspondentes à primeira, segunda e quinta etapa, a fim de que generalizem o comportamento das divisões da distância para a terceira questão.

²⁴ <https://www.geogebra.org/classic/mjxe8zsn>

Quadro 17 - Antecipações da questão 1

Questão 1: Complete, no diagrama, a 3ª, 4ª e 5ª etapa.	
Objetivo: Verificar se o estudante compreendeu o padrão de divisão presente nas etapas.	
Ações do aluno	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Pedir para que o estudante descreva o processo de divisão apresentado pelo enunciado.
Realizar a divisão de forma incorreta	- Verificar como o aluno realizou a representação. - Questionar o que o enunciado está descrevendo. - Perguntar o que é a metade da metade de algo.
Questão 2: Determine a distância: item a), b), c) e d)	
Objetivo: Compreender o padrão da divisão do trajeto e induzir à ideia de divisões sucessivas. Investigar para casos conhecidos de n etapas.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Explicar que queremos saber a distância percorrida pela flecha em cada etapa. - Perguntar qual o padrão de divisão descrito pelo enunciado. - Perguntar qual o resultado dessa 1ª, 2ª divisão...
Não identificar a distância	- Questionar sobre como obter a distância entre objetos no cenário. - Sugerir habilitar os eixos ou a ferramenta <i>medir distância</i> .
Somar as distâncias	- Destacar que a questão está se referindo às etapas de forma individual, por enquanto.
Questão 3: Como calcular a distância percorrida pela flecha na n -ésima etapa?	
Objetivo: Identificar a distância percorrida na n -ésima divisão $\frac{40}{2^n}$	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Explicar que estamos interessados em saber calcular a distância percorrida pela flecha em uma etapa específica qualquer. - Retomar as etapas anteriores. - Questionar o padrão identificado.
Expressão algébrica incorreta	- Pedir para escrever as expressões numéricas próximas, de modo a permitir comparação. - Questionar o que muda e o que permanece constante.

Fonte: elaborado pela autora.

A terceira questão solicita que os estudantes formulem uma expressão geral para a distância da n -ésima etapa. Era esperado que os estudantes recorressem às ferramentas do software, como planilhas, ou tentassem representar o comportamento diretamente no cenário animado. Nessa questão, o objetivo é identificar o padrão das sucessivas divisões e descrevê-lo algebricamente.

Na questão seguinte, supomos que poderia haver confusão com a questão anterior, dadas algumas sutilezas que a diferem. O foco da quarta questão está em responder qual é a soma das distâncias percorridas em cada uma das etapas, enquanto na terceira, estávamos interessados na distância de uma etapa em específico, apenas.

Quadro 18 - Antecipações da questão 4

Questão 4: Como calcular a distância percorrida pela flecha após n etapas?	
Objetivo: Chegar na soma das distâncias percorridas em cada etapa semelhante a $40 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Explicar que gostaríamos da soma das distâncias de todas as etapas, a distância total percorrida pela flecha.
Confundir com a questão anterior	- Chamar a atenção para as diferenças dos enunciados.
Não conseguir responder	- Pedir para adicionar as etapas conhecidas. - Questionar qual o padrão presente na soma. - Perguntar quais valores variam e quais são constantes.

Fonte: elaborado pela autora.

A diferença entre a terceira e a quarta questão está na inclusão do tamanho total do percurso na expressão algébrica. Os estudantes poderiam descrever de formas diferentes, desde que considerassem a soma dos pequenos trajetos percorridos. Já na quinta questão, o objetivo era que os estudantes chegassem à conclusão de que, mesmo com infinitas etapas, a soma da distância final se aproxima cada vez mais de quarenta, podendo ser escrita como o limite dessa soma. Era esperado que, nessa questão, os estudantes utilizassem a formalização do conceito de Limite, já que esse conteúdo havia sido abordado e sistematizado na aula anterior.

Quadro 19 - Antecipações da questão 5

Questão 5: O que podemos concluir sobre a soma dessas divisões e a distância total que a flecha percorre a medida que o número de etapas aumenta?	
Objetivo: Chegar à conclusão de que $40 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ é igual a 40.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Pedir para que o estudante analise o que ocorre quando o número de etapas aumenta. - Solicitar que realize a soma para etapas maiores. - Perguntar o que ocorre se for a etapa 500, 10000, 1000000... - Perguntar de qual valor estamos nos aproximando. - Perguntar se esse comportamento de selecionar valores cada vez maiores será suficiente em algum momento.
Dizer que cresce infinitamente	- Perguntar o que é crescer infinitamente. - Questionar o que é o infinito. - Perguntar se é possível alcançar o infinito.

Fonte: elaborado pela autora.

A sexta questão remetia a uma resposta que poderia refletir o sentido filosófico do paradoxo, mas que poderia ser fundamentada nas conclusões do grupo a partir das respostas das questões anteriores. Esperava-se que, em algum momento, surgisse a ideia de crescimento indefinido, seja por meio da menção a um número cada vez maior de divisões que aumentariam significativamente, seja pela própria referência ao infinito.

Quadro 20 - Antecipações da questão 6

Questão 6: De acordo com o raciocínio de Zenão, a flecha atinge seu alvo? Por quê?	
Objetivo: Formalizar que, no contexto do paradoxo, mesmo com n tendendo para infinito, a flecha não alcança o alvo.	
Ações do estudante	Ações do professor
Dizer que sim, sem explicar	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar por que alcança. - Perguntar em qual contexto, se na realidade ou no paradoxo. - Perguntar se a soma dos valores das etapas é 40, de fato.
Dizer que não, sem explicar	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar por que não alcança. - Perguntar em qual contexto, se na realidade ou no paradoxo. - Perguntar se a soma dos valores das etapas é 40. - Questionar se o limite é igual à soma dos valores das etapas.

Fonte: elaborado pela autora.

A última questão pedia que os estudantes finalizem o cenário animado utilizando as estratégias desenvolvidas pelo grupo. O objetivo era garantir a transposição dos registros escritos para o software. Nessa etapa, os estudantes já podiam apresentar estratégias diferentes daquelas utilizadas pela pesquisadora, uma vez que a questão é aberta, permitindo que eles criassem com base em suas próprias preferências e escolhas. Era esperado que os estudantes utilizassem as estratégias e ferramentas exploradas na construção do cenário anterior.

Quadro 21 - Antecipações da questão 7

Questão 7: A partir das suas resoluções, finalize o cenário.	
Objetivo: Elaborar ao menos uma estratégia para a finalização do cenário animado para representar o comportamento investigado.	
Ações do estudante	Ações do professor
Associar o controle deslizante	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar o que o controle deslizante representa. - Perguntar quais os objetos estariam associados ao controle.
Dizer que não, sem explicar	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar por que não alcança. - Perguntar em qual contexto, se na realidade ou no paradoxo. - Perguntar se a soma dos valores das etapas é 40. - Questionar se o limite é igual à soma dos valores das etapas.

Fonte: elaborado pela autora.

Como na tarefa anterior foi explorado o conceito de Limite, e o intuito da segunda tarefa era promover a discussão de Limites no infinito, esperávamos que os estudantes trouxessem uma representação matemática mais rigorosa nas suas respostas.

Reconhecemos que as duas tarefas abordam conteúdos distintos, que poderiam ser discutidos ao longo de várias aulas. No entanto, nosso objetivo não era realizar uma abordagem baseada na apresentação de definições e demonstrações de teoremas na fase de desenvolvimento ou discussões das tarefas, embora isso possa ser utilizado em outros

contextos. Cabe destacar que a fase de sistematização define matematicamente os conteúdos abordados por meio das discussões das tarefas.

Na subseção seguinte, descrevemos a proposta pedagógica, os objetivos, as tarefas e os cenários animados, bem como os quadros de antecipação elaborados para a intervenção.

4.3 Descrição dos encontros

O planejamento das intervenções envolveu a construção e a exploração de cenários animados no GeoGebra, e a resolução de duas tarefas de natureza exploratória. As duas primeiras aulas foram dedicadas à construção passo a passo do cenário *Velocímetro* com os estudantes. Embora essa não tenha sido a primeira experiência da turma com cenários animados, já que no semestre anterior os estudantes haviam explorado uma construção envolvendo funções de primeiro grau e funções por partes (não analisada nesta dissertação). A construção foi realizada individualmente, e nesse dia, uma equipe de três pessoas convidadas pela pesquisadora auxiliou os estudantes, esclarecendo dúvidas e repetindo instruções, quando necessário.

O objetivo de construir o cenário com os estudantes foi familiarizá-los com os recursos do software e introduzir conceitos como deslocamento, distância, tempo e velocidade antes de iniciar a resolução da tarefa. No entanto, devido ao tempo limitado, a construção do fundo do cenário não foi concluída nessas duas aulas, restando apenas a inserção das imagens no arquivo, que não foram adicionadas. Decidimos por não retomar a construção no encontro seguinte, entendendo que essa etapa final não acrescentaria informações necessárias para a resolução da tarefa, demandando muito tempo de aula. Assim, a aula seguinte foi iniciada com a proposta da Tarefa 1, vinculada ao cenário *Velocímetro*²⁵. Na primeira aula, a pesquisadora apresentou o cronograma das intervenções, como descrito no Quadro 9, expondo quais seriam as fases das aulas seguintes e qual deveria ser a atividade dos estudantes em cada uma delas.

Para o desenvolvimento da primeira tarefa, os estudantes foram divididos em grupos, de dois a cinco integrantes, sendo orientados a registrar seu trabalho de duas formas: preenchendo diretamente na folha da tarefa suas respostas e anotações, e elaborando um relatório final, no qual os estudantes deveriam relatar, em forma de texto, detalhadamente, as estratégias utilizadas na resolução de cada questão.

²⁵ Além da construção feita na aula anterior, a pesquisadora compartilhou o cenário animado finalizado com os estudantes, de modo a não prejudicar aqueles que não haviam finalizado.

Após a resolução da tarefa, a pesquisadora conduziu a discussão e a sistematização da tarefa a partir das ideias que surgiram do desenvolvimento e da discussão das referidas tarefas. A seleção das resoluções para a discussão coletiva em sala de aula foi fundamentada no acompanhamento, por parte da pesquisadora, das interações ocorridas nos grupos durante a realização das atividades, bem como na análise posterior das respostas escritas pelos estudantes às tarefas propostas. As respostas escolhidas foram projetadas em slides para facilitar a visualização e promover uma análise conjunta. A seleção considerou a relevância das resoluções em relação aos obstáculos apresentados no Quadro 5. Durante a discussão, os estudantes foram incentivados pela pesquisadora a comentarem as estratégias utilizadas pelo grupo e a complementar as ideias apresentadas pelos colegas. Por fim, a sistematização foi realizada com base nas respostas registradas pelos estudantes durante o desenvolvimento da tarefa, em forma de slides, formalizando as definições do conteúdo matemático discutido ao longo das aulas.

Após a sistematização da Tarefa 1, que ocorreu no quinto encontro, os estudantes iniciaram a Tarefa 2. A organização dos grupos e das fases das aulas manteve-se igual, com a diferença de que o cenário animado *Flecha*, construído para essa tarefa, foi disponibilizado incompleto para os estudantes, que deveriam finalizá-lo (última questão da Tarefa 2). O quinto encontro foi dedicado à resolução da tarefa e à finalização do cenário, item não solucionado totalmente pelos estudantes. No sexto e último encontro foi realizada a discussão coletiva e a sistematização.

Na subseção seguinte, descrevemos o processo de coleta de dados para a análise no próximo capítulo desta dissertação.

4.4 Produção de dados

Todas as anotações feitas pelos grupos, incluindo as resoluções das tarefas, relatórios parciais e finais, foram recolhidas ao final das intervenções. As gravações de áudio e vídeo foram armazenadas em um HD pessoal da pesquisadora e salvas em uma pasta privada em nuvem. As tarefas e relatórios, por sua vez, foram digitalizados e salvos nessa mesma pasta. A produção de dados resultou em um grande volume de arquivos, totalizando cerca de 40 horas de gravações, incluindo registros pessoais da pesquisadora. Quatro vídeos foram descartados por apresentarem problemas no processo de gravação ou áudios corrompidos.

Para responder ao objetivo geral desta pesquisa, que era identificar potencialidades e limitações no uso de cenários animados em tarefas de natureza exploratória para o ensino de

Limite de funções reais de uma variável real, foi dada sequência à seleção dos dados e resoluções, seguindo critérios que auxiliassem na identificação desses aspectos. Para a triagem inicial, foi feita a leitura da resolução das tarefas e relatórios dos estudantes, focada em identificar respostas que indicassem o uso do software na sua resolução e obstáculos epistemológicos associados à categorização proposta no Quadro 5.

A análise adotou uma abordagem descritiva e interpretativa, estabelecendo comparações entre os registros escritos do grupo, presentes nos relatórios e tarefas, e as discussões realizadas durante o desenvolvimento das atividades. O processo de análise foi dividido em três fases. Para facilitar a organização textual, os grupos foram identificados por letras de A até H. Dentro de cada grupo, os integrantes foram numerados sequencialmente com algarismos cardinais, como descrito no Quadro 22.

Quadro 22 - Siglas dos participantes

Identificação do grupo	Sigla do integrante
A	A1, A2, A3
B	B1, B2, B3, B4, B5
C	C1, C2
D	D1, D2, D3, D4
E	E1, E2, E3, E4
F	F1, F2, F3
G	G1, G2, G3
H	H1, H2, H3

Fonte: elaborado pela autora.

Ao longo do processo de análise, buscamos evidências dos recursos utilizados e de como eles auxiliaram os estudantes a lidar com os obstáculos categorizados no Quadro 5, no que se refere à interpretação e manipulação de símbolos matemáticos no contexto de Limite, relacionados à categoria E_1 .

Buscamos por indícios que identificassem: como os estudantes conceituaram e formalizaram a noção de Limite; se houve dificuldades com a linguagem matemática, uso de termos e se a discussão sobre Limite atinge ou não o valor ao qual está tendendo, relacionados à categoria E_2 ; se houve dificuldades associadas a infinito, à noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno, relacionados à categoria E_3 .

Investigamos se ocorreram rupturas em relação ao pensamento algébrico, desafios ligados à interpretação geométrica e à continuidade, além de dificuldades lógicas na compreensão do conceito de Limite. Tentamos compreender como os estudantes lidaram com a introdução de ideias que iam além de cálculos e deduções lógicas, discutindo o Limite para além da sua definição matemática. Especificamente na segunda tarefa, buscamos compreender

como interpretaram o paradoxo que divergia do que ocorre no mundo físico - como uma flecha que nunca atingiria o alvo - mas cujo comportamento poderia ser descrito matematicamente, aspectos relacionados à categoria E_4 .

Por fim, verificamos se os estudantes tiveram dificuldades em lidar com as diferenças entre a língua materna e a linguagem matemática, relacionadas aos obstáculos da categoria E_5 .

No próximo capítulo, apresentamos o resultado desta pesquisa.

5 ANÁLISES

Para organizar os dados, elaboramos um quadro para cada grupo de estudantes, seguindo a estrutura do Quadro 23. As informações inseridas nesses quadros foram obtidas a partir das respostas às questões, dos relatórios e dos vídeos gravados durante a realização das tarefas, sintetizando o contexto de resolução e as estratégias utilizadas pelos grupos.

Quadro 23 - Estrutura do quadro para levantamento de resultados de cada grupo

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
Gravação do dia 29/08/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	

Fonte: Elaborado pela autora.

Primeiramente, (re)lemos as resoluções das tarefas e os relatórios, identificando as diferentes respostas e estratégias dos grupos para cada questão da tarefa, anotando a estratégia que o grupo utilizou para resolvê-la, ferramentas utilizadas, seja do GeoGebra ou de outro recurso. Detalhamos essas estratégias na coluna *Observações do contexto de resolução*, e complementamos o quadro ao assistir as gravações dos vídeos, anotando os tempos em aspectos relevantes de suas discussões, que deveriam ser transcritas para, se necessário, serem incorporadas ao texto das análises.

Esses quadros orientaram o processo de análise desta dissertação, que são apresentados nas seções 5.1 e 5.2, relacionadas aos resultados das tarefas *Velocímetro* e *Flecha*, respectivamente.

5.1 Resultados da tarefa *Velocímetro*

O objetivo da tarefa *Velocímetro* foi estimar a velocidade instantânea por meio da velocidade média em um dado intervalo de tempo.

Quadro 24 - Tarefa Velocímetro

(continua)

Tarefa 1 - Cenário <i>Velocímetro</i>²⁶	
Nome: _____	e-mail: _____
Nome: _____	e-mail: _____
Nome: _____	e-mail: _____
Nome: _____	e-mail: _____

²⁶ <https://www.geogebra.org/classic/fp6c7hmt>

A posição de um carro em movimento varia com o tempo, sendo $s(t)$ sua posição em cada instante t . A velocidade média é calculada pela razão entre a variação das posições e o intervalo de tempo: $v(t, t_1) = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$. Gostaríamos de investigar a velocidade instantânea em um momento específico t_1 . Para isso, abra seu arquivo no GeoGebra ou pelo link disponibilizado e descreva seu processo de investigação, detalhando as estratégias e procedimentos utilizados para responder às questões.

1. Qual a velocidade média do carro no trajeto?
2. Determine a velocidade média:
 - (a) Entre $1 \leq t_1 \leq 3$.
 - (b) Em pelo menos dois intervalos diferentes daquele do item (a).
3. As velocidades médias da questão 2 diferem da velocidade média da questão 1? Por quê?
4. Determine:
 - a) Intervalos $[2, t]$ e $[t, 2]$ com t próximo de 2, utilizando uma, duas ou três casas decimais.
 - b) A velocidade média $v_m(t, 2)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
2		
2		
2		
2		
t	t_1	
	2	
	2	
	2	
	2	

- c) Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de $t_1 \neq 2$, utilizando uma, duas ou três casas decimais.
- d) A velocidade média $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
t	t_1	

- e) Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de t_1 diferente dos escolhidos nos itens (a) e (c).
- f) As velocidades médias $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
t	t_1	

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

Fonte: elaborado pela autora.

Nos quadros de antecipação da tarefa, supomos que, ao calcular a velocidade média, os estudantes adotariam a estratégia de reduzir os intervalos de tempo. Isso porque, à medida que a diferença entre os instantes inicial e final ($t - t_1$) diminui, a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea no ponto investigado. Esse processo está diretamente relacionado à noção de Limite, pois envolve a análise do comportamento da função conforme os valores do seu domínio se aproximam de um determinado ponto.

Todos os grupos utilizaram o arquivo do cenário animado disponibilizado pela pesquisadora para a resolução da tarefa. Alguns grupos abriram inicialmente as construções que elaboraram, mas ao longo dos testes iniciais, optaram pela construção finalizada, disponibilizada pela pesquisadora. Os quadros a seguir resumem os dados produzidos pelos grupos durante as resoluções dos estudantes e orientam a análise da tarefa.

Quadro 25 - Resoluções do grupo A

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Janela de Álgebra.	Utilizam a Janela de Álgebra para identificar os valores para o cálculo da média com o Controle deslizante.
2	Utilizam um ponto $P=(t, s(t))$ na Janela de Álgebra para identificar os valores e calculam utilizando a calculadora e registros no papel.	Nos itens a) e b) realizam o mesmo procedimento para o cálculo e identificação dos valores, mas obtêm um valor negativo para o tempo na substituição no cálculo da velocidade média.
3	Não respondem à questão 3	
4	Utilizam calculadora.	Na letra c), utilizam um instante 8 que não fazia parte do intervalo de tempo definido no cenário.
5	Usam o ponto sobre a função para calcular a velocidade média e sustentar a afirmação.	Afirmam que a velocidade média se aproxima cada vez mais da posição do carro no instante final.
Gravação do dia 29/08/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
8 min	Para a resolução da 1ª questão, os estudantes utilizaram a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização 2, analisando o gráfico da função que representa a variação da posição do carro ao longo do tempo. Falam sobre deslocamento, sobre a variação de tempo. Ao escrever os valores no papel, discutem a disposição dos valores para o cálculo da velocidade média.	
10 min	Comentam que não conseguiram identificar a posição do carro apenas com o cenário.	
14 min	Calcularam o deslocamento como uma proporção de 1 para 25, mas logo houve uma contradição de outro estudante. Discutem se a velocidade não aumenta exponencialmente também.	
19 min	Com ajuda da pesquisadora, criam um ponto $P=(t,s(t))$ na Caixa de Entrada e definem os valores para a resolução da questão 2.	
23 min	Apesar de não ter registros de respostas na questão 3, os estudantes discutem-na. Afirmam que difere, pois a velocidade média é distinta da velocidade instantânea, e na mudança de intervalos, poderia ter uma variação significativa da velocidade.	
35 min	Os estudantes utilizam a definição do controle deslizante para inserir valores de t e identificar a posição nesse instante específico por meio do ponto P na Janela de Álgebra.	
Gravação do dia 03/09/2024		
33 min	Os estudantes reorganizam os números na tabela em ordem decrescente.	
43 min	Selecionam o valor final como 8 justificando que é uma função exponencial, e por isso podem escolher qualquer valor.	

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 26 - Resoluções do grupo B

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Planilha e registro no papel.	Todos os cálculos solicitados nas questões foram realizados na planilha.
2		
3	Gráfico na Janela de Visualização 2.	Afirmaram que as velocidades médias mudam nos diferentes intervalos selecionados porque o gráfico da função é uma curva exponencial, e o movimento do carro possui uma aceleração.
4	Afirmaram utilizar a planilha para selecionar valores para o cálculo.	Os estudantes realizaram todos os cálculos por meio da planilha, apenas inserindo os valores selecionados e realizando a operação matemática por meio do software. Dividiram a variação de espaço pela variação de tempo sem selecionar os instantes.
5	Lápis e papel.	Afirmam que a velocidade instantânea é a divisão do deslocamento pelo tempo, enquanto a velocidade média é a divisão da variação do espaço pela variação de tempo.
Gravação do dia 29/08/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
1 min	Discutem o que é espaço e deslocamento.	
3 min	Grupo decide usar planilha para realizar os cálculos.	
5 min	Testam adições na planilha, como calcular o deslocamento.	
6min50	B4 pergunta por que o tempo inicial é 1 e não 0. B1 explica que estão calculando a velocidade média entre 1 e 3, fazendo referência a 1 ser o instante inicial e 3 o final naquele intervalo que estão calculando.	
21 min	Discutem sobre as tabelas da tarefa, discutindo o que foi <i>fixado</i> , referindo-se ao tempo.	
51 min	Discussão sobre divisão por zero, integrantes do grupo sugerem dividir por 0,1.	
Gravação do dia 03/09/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
1 min	Finalizam a número 5.	
12 min	Discutem sobre a posição e a velocidade instantânea, o <i>problema</i> de o valor do deslocamento ser igual ao da velocidade média.	

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 27 - Resoluções do grupo C

(continua)

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Janela de visualização.	
2	Planilha e calculadora.	Grupo escolheu valores com três casas decimais e com diferenças de intervalo muito pequenas. Na questão a), selecionaram um intervalo com dois décimos de diferença. Na questão b), com cinco décimos, e na questão c) foi uma diferença de um décimo.
3	Discussão entre o grupo.	Atribuíram a diferença das velocidades médias à mudança dos intervalos.
4	Planilha e calculadora.	Selecionaram valores arbitrários na planilha com duas, até quatro casas decimais. Na terceira coluna da velocidade média, incluíram a aproximação da velocidade naquele instante, pós-sistematização.
5	Discussão entre o grupo.	Afirmam que o valor da velocidade média se aproxima do valor escolhido na tabela. Pelo relatório, é possível afirmar que compreenderam a ideia da aproximação da velocidade instantânea.
Gravação do dia 29/08/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
27 min	Justificam que os valores escolhidos são os disponíveis na planilha.	
Gravação do dia 03/09/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
10 min	Definem posição final e inicial por meio da Janela de visualização.	
17 min	Selecionam dois instantes diferentes, e a escolha por mais casas decimais foi definida pela configuração do cenário animado.	
36 min	A escolha por intervalos menores que dois são os primeiros valores que aparecem na planilha.	
9 min	Supõem que a velocidade instantânea se aproxima do valor médio da tabela.	

(conclusão)

20 min	Afirma que a velocidade instantânea é uma indeterminação.
21min	<i>Então, a gente pode aproximar o máximo do valor possível. Poderia ir reduzindo cada vez mais a diferença, até chegar o mais próximo da velocidade instantânea em t1.</i>
24 min	<i>Se a gente tivesse colocado mais casas decimais, a gente teria chegado mais perto da velocidade em t1, teria conseguido valores mais próximos do que a gente quer [achar], mas a gente demoraria mais para calcular.</i>
32 min	Aumentam os números das casas decimais e usam a calculadora.

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 28 - Resoluções do grupo D

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Planilha, Janela de Visualização e Janela de Álgebra.	Na primeira questão, eles utilizam a construção que fizeram na primeira aula, depois mudam para a finalizada com as imagens por conta dos nomes dos botões.
2	Planilha.	Selecionam os valores na planilha e calculam no papel.
3	Discussão entre o grupo.	Afirmam que, com o passar do tempo, a velocidade média vai aumentar por que é uma função exponencial (eu deveria ter perguntado e se o carro freia em algum momento, ou a função fosse outra).
4	Planilha e calculadora.	Escolhem valores arbitrários da planilha.
5	Pesquisaram na internet.	Justificaram que é necessário pegar um valor bem pequeno, quase igual a zero para obter uma aproximação satisfatória da velocidade instantânea.

Gravação do dia 29/08/2024

Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula
10 min	Iniciam utilizando o cenário animado construído, questionam-se o que cada elemento da construção representa, o que é o b , o que a função representa, o controle deslizante t , a variável d .
15 min	Grupo discute sobre o incremento do controle deslizante.
24 min	Erraram ao calcular a velocidade média, dividindo o deslocamento pelo deslocamento.
30 min	Testam valores para calcular a posição e percebem o erro.
40 min	Perguntam para a pesquisadora sobre a ordem dos valores no cálculo da média, conversam sobre a inexistência de tempo negativo.
46 min	<i>Quanto maior o tempo, maior a velocidade média</i> , justificam que a velocidade aumenta com o passar do tempo. Justificam que é por conta de uma função exponencial.
55 min	Usam a calculadora para definir valores de deslocamento e tempo.

Gravação do dia 03/09/2024

8min30s	Questionam-se sobre o que é velocidade média. Se perguntam se a 2ª coluna da planilha é a velocidade média.
24 min	Ao tentar responder a 5, o estudante sugere <i>jogar um 1,99 para ver o que acontece</i> .
27 min	Eu questiono coisas, trecho fala sobre o problema dos estudantes que apenas concluíram que, quanto maior o tempo, maior a velocidade média.
38 min	Dizem que x^3 é a aceleração
41 min	Pesquisam na internet sobre velocidade instantânea.
50 min	Definem o que é velocidade instantânea no contexto da tarefa com base na pesquisa.

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 29 - Resoluções do grupo E

(continua)

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Janela de Visualização.	Modificam a posição do carro com o controle deslizante no cenário animado que construíram.
2	Janela de Visualização.	
3	Discussão entre o grupo.	Afirmam que estão analisando para tempos diferentes e o carro possui aceleração.
4	Planilha, papel e lápis.	Realizam as contas manualmente, não finalizam a questão.
5	Internet.	Pesquisam no YouTube e na internet, já utilizam notação de Limites.

(conclusão)

Gravação do dia 29/08/2024	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula
8 min	Grupo testa os parâmetros do cenário. Colocam 100 na caixa de diálogo, para testar o que ocorre. Abrem o cenário construído e depois abrem o pronto. Comparam as duas construções em busca de informações para resolver a questão 1 da tarefa.
15 min	Estudante abre o cenário finalizado, altera as casas decimais, abre a Janela de Visualização 2 e plota um ponto sobre a função, por ela identifica que a posição final do carro é 125.
17 min	Abre a planilha e limpa os dados da animação para testar valores com mais casa decimais.
18 min	Questionam-se sobre o que os eixos representam, confirmam a posição final pela planilha e definem a posição inicial sendo 0.
20 min	Eu intervenho, sugerem que <i>as casas decimais são o tempo, porque na planilha deu 5, e nas casas decimais está 5.</i>
Gravação do dia 03/09/2024	
11 min	Estudantes testam números racionais na caixa de entrada.
18 min	Testam valores como 1,99 e 0,998 após estudante G2 sugerir.
41 min	Aluno G2 afirma que o t precisa se aproximar do outro valor para chegar perto da velocidade instantânea.
45 min	Integrante G2 questiona sobre as casas decimais na caixa de entrada, solicita para que estudante G1 tente para 0,001, mas ele coloca esse valor 1,001 na caixa de diálogos.
47 min	Estudante G1 continua tentando valores racionais na caixa de diálogos.

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 30 - Resoluções do grupo F

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Selecionam os valores na Janela de Visualização, pelos eixos.	Selecionam os valores de início e fim na construção feita pelos estudantes, mas invertem na hora da substituição.
2	Planilha e calculadora.	Assim como na questão 1, invertem tempo inicial e final e posição inicial e final.
3	Discussão entre o grupo.	Justificam apenas por conta da mudança dos intervalos investigados.
4	Janela de Álgebra.	Não finalizam a questão.
5	Não respondem à questão	Não respondem à questão.
Gravação do dia 29/08/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
15 min	Identificam os valores no cenário animado construído por um dos integrantes do grupo.	
30 min	Afirmam que $s(t)$ é os valores que substituem. Discutem: “ $s(t_1)$ é a mesma coisa que $s(t)$, só que é um valor diferente”.	
40 min	Selecionam valores na Janela de Visualização no cenário animado construído por eles, selecionam nos valores resultantes da função na Janela de Álgebra.	
Gravação do dia 03/09/2024		
Sem áudio, vídeo descartado.		

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 31 - Resoluções do grupo G

(continua)

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Janela de Visualização e Planilha.	Definem o intervalo com base na construção do cenário, observando o intervalo do controle deslizante.
2	Planilha e calculadora.	Utilizam valores inteiros para o cálculo da velocidade média.
3	Discussão entre o grupo.	Justificam que é por conta da aceleração.
4	Planilha e calculadora.	Escolhem valores com uma e duas casas decimais.
5	Comparação dos quadros.	Afirmam que a velocidade instantânea aumenta, e que quanto menor o intervalo de tempo analisado, mais perto a velocidade média chega da instantânea.

(conclusão)

Gravação do dia 29/08/2024	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula
14 min	Os estudantes exploram o cenário, animam o carro, acionam os botões, observam os valores da planilha.
15 min	G1 pergunta para os demais sobre o que pensaram, G2 afirma que é preciso identificar o tempo.
18 min	G1 afirma que a função velocidade é a variação de espaço pelo tempo, e no cenário, precisaria colocar o tempo para saber quanto ele andou naquele instante em específico. Definem o intervalo de deslocamento e de tempo.
26 min	G1 pergunta para o professor se isso que a tarefa está investigando é Derivada.
34 min	Mudaram o incremento para zero para obter valores inteiros para os intervalos.
49 min	Questionam-se por que a velocidade média mudou, afirmando que os valores são diferentes, mas é o mesmo intervalo de tempo investigado. Concluem que a velocidade aumenta e existe uma aceleração do movimento.
Gravação do dia 03/09/2024	
10 min	Pergunto o que acontece quando eu escolho intervalos cada vez menores de tempo com a velocidade média, e o estudante G1 responde que vamos obter a velocidade instantânea.
29 min	Discutem sobre a aceleração ser constante.
45 min	Discutem que a velocidade média entre dois pontos é a velocidade instantânea.

Fonte: elaborado pela autora.

Quadro 32 - Resoluções do grupo H

Nº	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto de resolução
1	Planilha e Janela de Álgebra.	Acionam os botões do cenário e observam os valores na Planilha e Janela de Álgebra.
2	Planilha e calculadora.	Escolhem valores com três casas decimais.
3	Discussão entre o grupo.	Justificam que é por conta dos intervalos diferentes e porque o carro precisou adquirir velocidade.
4	Planilha.	Consideram valores com duas e três casas decimais.
5	Incompleta.	Afirmam que muda por conta da aceleração.
Gravação do dia 29/08/2024		
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
10 min	Estudantes discutem sobre a disposição dos valores na fórmula para calcular o deslocamento e a variação de tempo.	
22 min	Ao iniciar o movimento do carro e observar os valores dispostos na planilha, a estudante H1 afirma que existem valores que o carro não vai passar por não ser apresentado na planilha do GeoGebra.	
30 min	Estudante H1 comenta que o carro, no final do deslocamento, acelera mais.	
45 min	Estudantes comentam que, apesar de selecionar a mesma diferença entre os intervalos de tempo (3 unidades), a diferença entre os deslocamentos não é a mesma.	
Gravação do dia 03/09/2024		
Sem áudio, vídeo descartado.		

Fonte: elaborado pela autora.

As resoluções dos estudantes à tarefa foram permeadas de peculiaridades que se sobressaem ao assistir aos vídeos dos grupos. De modo geral, os grupos adotaram a estratégia de diminuir os intervalos para obter uma aproximação da velocidade instantânea, e os obstáculos enfrentados foram majoritariamente relacionados às categorias E1, E4 e E5. Apesar de as questões 1 e 2 item a) conduzirem os estudantes a adotarem procedimentos que foram previstos e intencionados pela pesquisadora, deixavam em aberto as ferramentas que poderiam utilizar para auxiliá-los nas respostas.

Na primeira e segunda questão, os grupos A, B, D, F e G escolheram estratégias semelhantes, apresentando respostas considerando valores decimais, com a diferença entre os

grupos C e H, que consideraram centésimos e milésimos, embora todos tenham utilizado recursos distintos: lápis e papel (grupo A e B), calculadora (grupos A, C, F, G e H), e do GeoGebra – Planilha (Grupo B, C, D, F, G, H), Janela de Álgebra (A, D, H) e Janela de Visualização (Grupos B, C, D, E, F).

Os grupos B, C, D, F G e H, que utilizaram a Planilha na questão 2, anotaram nela os valores após iniciar a animação do carro por meio dos botões e acompanharam a listagem dos instantes e das posições nas colunas. A estratégia dos grupos E e F foi selecionar valores arbitrários. Embora o Grupo A não tenha registrado a estratégia utilizada, ao assistir os vídeos, identificamos que utilizaram o gráfico plotado na Janela de Visualização 2 e a Janela de Álgebra (Figura 16) para descobrir os valores extremos do intervalo. Os estudantes selecionaram, no Controle t , os instantes acordados entre os integrantes, como por exemplo, $s(3)$, obtendo a localização do ponto $P = (t, s(t))$ na Janela de Álgebra.



Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Percebemos que o grupo A conseguiu associar elementos das três janelas simultaneamente para responder à primeira e segunda questão: Janela de Álgebra, Janela de Visualização 1 e 2.

Um erro de notação comum nas resoluções dos grupos A e F, observado nas resoluções das tarefas, é a inversão dos valores escolhidos de t , t_1 e $s(t)$, $s(t_1)$ no cálculo da velocidade média. Algebricamente, essa inversão não altera o valor final, se a inversão dos valores da posição for feita em ambos os instantes, ou seja, os estudantes escreverem $s(t_1) - s(t)$ e $t_1 - t$ ao invés de $s(t) - s(t_1)$ e $t - t_1$ (Figura 17). Não consideramos a troca como um obstáculo

epistemológico, visto que os estudantes realizaram a substituição dos valores segundo a notação dada pelo enunciado, e assumiram os índices 1 como referentes ao valor mínimo do intervalo.

Figura 17 - Resposta do Grupo F

2. Determine a velocidade média:

(a) Entre $1 \leq t_1 \leq 3$.

$$v = (0,2) = \frac{0 \cdot 2}{0 \cdot 2} = v = 4$$

(b) Em pelo menos dois intervalos diferentes daquele do item (a).

$$v = (2,3) = \frac{8 \cdot 27}{2 \cdot 3} = v = 19$$

$$v = (3,4) = \frac{27 \cdot 64}{3 \cdot 4} = \frac{-3 \cdot 7}{-1} = v = 37 //$$

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Quando essa troca foi apresentada na discussão geral, o grupo apontou que poderia haver um problema na representação de tempo negativo, decorrente da inversão entre o tempo inicial e o tempo final. Esse posicionamento foi acolhido pelos demais colegas, sendo considerado, nesse caso, um obstáculo da categoria E_1 , relacionado à complexidade dos objetos matemáticos elementares, conforme discutido por Artigue (1995).

No item b) da segunda questão, os grupos, de modo geral, não reduziram os intervalos, com exceção do grupo C (Figura 18). Além disso, nenhum grupo explicitou claramente a estratégia adotada em suas discussões e relatórios, optando apenas por valores arbitrários. Essa abordagem pode ter dificultado a identificação de um padrão na investigação da velocidade instantânea ao longo da resolução da tarefa.

Figura 18 - Resolução do grupo C

2. Determine a velocidade média:

(a) Entre $1 \leq t_1 \leq 3$.

$$\frac{26,709 - 1,0303}{2,99 - 1,01} = \frac{25,7006}{1,98} = 12,98$$

(b) Em pelo menos dois intervalos diferentes daquele do item (a).

$$2 \leq t_1 \leq 2,5 \rightsquigarrow \frac{15,625 - 8}{2,5 - 2} = \frac{7,625}{0,5} = 15,250$$

$$1,5 \leq t_1 \leq 1,6 \rightsquigarrow \frac{4,096 - 3,375}{1,6 - 1,5} = \frac{0,721}{0,1} = 7,21$$

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

O grupo C diminuiu a diferença entre os valores escolhidos na questão 2, mas não especificou se esses valores estavam se aproximando de um valor específico. Essa escolha pode

ter auxiliado na resolução da quinta questão, pois por meio da gravação da tela do computador do grupo C e relatório produzido por eles, verificamos que os estudantes utilizaram a Janela de Visualização, a Planilha do GeoGebra e a calculadora dos seus celulares para responder à questão.

Na questão 3, a aceleração do movimento do carro foi uma justificativa comum identificada nas respostas dos grupos B, E e G para explicar a diferença entre as velocidades em cada intervalo. A ideia de aceleração trazida como justificativa pelos estudantes não estava errada. Ela representa a taxa de variação da velocidade em um instante específico, sendo definida como a derivada da velocidade em relação ao tempo. Essa ideia, embora esteja relacionada, difere sutilmente do objetivo da questão, que era destacar que, à medida que o intervalo de tempo considerado se tornava cada vez menor, a velocidade média se aproximava da velocidade instantânea. O conceito trazido pelos estudantes sugere a derivada da função velocidade, que poderia ter sido explorado a partir das suas respostas. Contudo, nosso foco principal era a percepção do processo de redução do tamanho dos intervalos para a obtenção da velocidade instantânea em um instante específico.

Os demais grupos justificaram escrevendo que a função era exponencial (grupo D) ou atribuíram a variação à mudança dos valores escolhidos para os intervalos (grupo C e G), ou ainda, não responderam (grupo A e F). Identificamos, por meio dos áudios registrados durante a resolução da tarefa do grupo A, a preocupação com a escolha dos intervalos, afirmando que a velocidade média é diferente da velocidade instantânea, como pode ser lido no excerto a seguir:

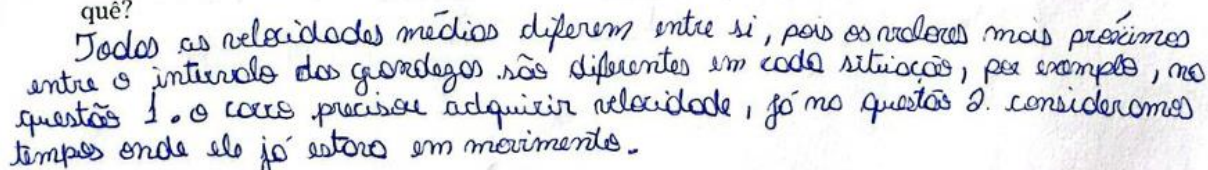
- A1 As velocidades médias da questão dois diferem da velocidade média da questão um? Por quê? *[Realizando a leitura]* Isso que eu não entendi. Que não necessariamente a gente está andando na mesma velocidade, do zero ao vinte e cinco. Eu posso ter começado a andar a dez quilômetros por hora.
- A2 Que é velocidade instantânea e não média.
- A1 Exatamente. Eu posso ter começado a dez quilômetros por hora, e no instante três, eu resolvo ir a cem *[quilômetros]* por hora. Ou sei lá, *[estou a]* vinte metros por segundo, resolvo diminuir *[para]* dez metros por segundo.

O diálogo entre os estudantes do grupo A refere-se às mudanças que a escolha do intervalo provoca no valor obtido para a velocidade média, visto os estudantes citam a possibilidade de uma mudança repentina da velocidade entre os instantes.

O grupo G citou tanto a diferença entre os valores escolhidos no intervalo como a aceleração (Figura 19).

Figura 19 - Resposta do Grupo G

3. As velocidades médias da questão 2 diferem da velocidade média da questão 1? Por quê?



Todas as velocidades médias diferem entre si, pois os valores mais próximos entre o intervalo das grandezas são diferentes em cada situação, por exemplo, na questão 1, o carro precisa adquirir velocidade, já na questão 2, consideramos tempos onde ele já estava em movimento.

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Entendemos que, assim como o grupo C, eles estão se referindo à mudança dos valores utilizados no cálculo da velocidade média, enquanto a expressão *adquirindo velocidade* indica uma referência à aceleração.

A quarta questão, por sua vez, gerou discussões importantes para a compreensão da ideia de Limite, e foi a questão à qual os grupos dedicaram mais tempo para resolver e debater. A questão exigia que os estudantes realizassem cálculos e preenchessem tabelas. A escolha de valores foi semelhante em todos os grupos, os quais utilizaram a Planilha, com destaque para o grupo B, que além da seleção de valores, utilizou a Planilha para gerar as respostas das operações sem recorrer à calculadora.

Ao longo de uma interação apresentada a seguir, entre a pesquisadora e os estudantes, o grupo B sugeriu escolher intervalos muito próximos de zero como estratégia para obter um valor para a velocidade instantânea em um ponto:

- B3 Uma dúvida, professora: o dois é [correspondente ao] oito, se for olhar na tabela, certo? O oito é a velocidade?
- Pesquisadora Um instante, sobre o que vocês estão falando? Qual dois?
- B2 O dois é o tempo, o oito é a velocidade. Não, o oito é a posição, o espaço em que ele está [corrigindo sua afirmação anterior].
- Pesquisadora Certo, a posição que ele está.
- B3 Mas o que seria instantânea?
- Pesquisadora O que seria uma velocidade instantânea?
- B1 Naquele momento.
- Pesquisadora Isso seria a velocidade naquele momento.
- B2 Mas é possível dividir pelo instante?
- Pesquisadora Será que dá pra fazer isso?
- B3 Tentar um 0.90?
- Pesquisadora O que vocês acham?
- B2 Não precisa ser por um segundo, [pode ser] um número pequeno.
- B1 Dividir por zero? [risos].

- Pesquisadora Será que faz sentido dividir por zero? É possível dividir por zero?
 B1, B2 e B3 Não [afirmam em conjunto].
 B2 Mas como que a gente resolve?
 Pesquisadora Como descobrir para o zero? Porque em algum momento a gente vai precisar descobrir, quando a diferença for zero.
 B2 0.1?
 B1 Mas aí [a diferença entre] os instantes não seriam [seria] zero.
 Pesquisadora Discutam e me digam. Talvez o 0.1 seria uma boa [escolha].

Essa discussão possibilita afirmarmos que os estudantes sugerem que, para obter uma aproximação satisfatória, a diferença entre os instantes deveria tender a zero, mas não pode resultar em zero porque gera uma indeterminação, que é reconhecida pelo grupo.

Na mesma questão, a organização da tabela pelo grupo H permitiu que os estudantes notassem que a velocidade média tendia a 27. Ao trabalhar com intervalos pequenos, o grupo percebeu como a posição e , conseqüentemente, a velocidade variavam de forma contínua ao longo do tempo. Esse processo ajudou a identificar uma tendência da velocidade instantânea em um pequeno intervalo em torno do instante três, mesmo que a organização dos valores não seguisse o formato convencional, com números crescendo ou decrescendo em torno do tempo fixado (Figura 20).

Figura 20 - Resposta do Grupo H

- (c) Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de $t_1 \neq 2$, utilizando uma, duas ou três casas decimais. *Utilizamos três casas decimais e escolhemos os itens mais próximos ao esquema dos itens do a).*
 (d) A velocidade média $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
3	3,08	27,725
3	3,214	28,971
3	3,388	30,641
3	3,987	36,857
t	t_1	
2,401	3	21,968
2,601	3	23,568
2,651	3	23,979
2,961	3	26,641

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Já as resoluções do grupo B (Figura 21) mostram que os estudantes tiveram dificuldade em investigar o comportamento nesse mesmo instante. Inicialmente, houve confusão ao interpretar o significado do valor 27, que correspondia tanto à posição do carro no instante três, quanto ao valor para o qual a velocidade média tende no intervalo analisado. No entanto, após

questionamentos da pesquisadora, eles comentam diferenças entre os significados desse valor. Ainda assim, podemos afirmar que os estudantes enfrentaram um obstáculo que não foi totalmente superado, o que comprometeu suas conclusões na questão 5.

Figura 21 - Resolução do grupo B

(e) Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de t_1 diferente dos escolhidos nos itens (a) e (c).

(f) As velocidades médias $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
3	2,7	27,91
3	2,2	28,84
3	2,3	29,79
3	2,4	30,76
t	t_1	—
2,5	3	22,75
2,6	3	23,56
2,7	3	24,39
2,8	3	25,29

Posição no $t = 3 = 27$

variação $v_{médias}$

0,1 — 27,91

0,2 — 28,84

0,3 — 29,79

0,4 — 30,76

$(3, 3,1) v_m = \frac{\Delta(F - i)}{\Delta(F - i)t} = \frac{27 - 20,791}{3 - 3,1} = \frac{2,791}{0,1} = 27,91$

$(2,5; 3) v_m = \frac{27 - 15,625}{3 - 2,5} = \frac{11,375}{0,5} = 22,75$

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

As respostas dos estudantes do grupo B, apesar de corretas, induziram a pensarem que o valor da velocidade média no intervalo em torno do instante três se aproximava do valor da sua posição nesse instante. Por meio dos diálogos apresentados a seguir, foi possível identificar que os estudantes reconheceram uma tendência de aproximação a um determinado valor, o qual interpretaram como a posição. A velocidade média foi compreendida pelo grupo como a razão entre posição e tempo. Os estudantes também discutiram a razão pela qual o valor da posição no instante três correspondia ao limite para o qual a velocidade média tendia.

- Pesquisadora O que é o 27?
- B1 Posição do carro no instante 3.
- Pesquisadora Certo, isso vocês entenderam. E a velocidade média?
- B2 É a variação de espaço pela variação de tempo.
- Pesquisadora Então a minha pergunta para vocês é: quando me falaram que basta dividir a posição pelo tempo e quando falamos de médias, faz sentido calcular a média de um valor?
- B1 Hum, não.
- Pesquisadora Então é por isso que a gente está pegando sempre 2. A gente obtém uma variação. Conforme varia, será que é possível obter algum padrão ali, será que eu consigo identificar alguma coisa ali?
- B1 Então é o nosso resultado do [posição] 3?
- B2 O 27?

- Pesquisadora Aí é que está, gente. É possível descobrir a velocidade instantânea só com essas informações que temos?
- B3 Não.
- Pesquisadora Não consegue?
- B4 Porque não é possível. Velocidade média é a divisão do espaço pelo tempo, não só espaço.
- Pesquisadora São muitas informações, pensem no que vocês me falaram. Você me disse que não consegue obter a velocidade instantânea ali. Então, será que a velocidade média me ajuda a ter uma noção do quanto a velocidade instantânea é ali?
- B1 Ele se aproxima aqui, professora. Tipo, 22, 28.84, ele se aproxima do 27 da posição.
- Pesquisadora Mas a posição é diferente do valor da velocidade média. Se, por exemplo, vocês calcularem aqui do outro [*valor da posição*], já é um resultado distinto.
- B1 Já não é [*igual à*] posição. Por exemplo, no 4 [*posição*], já é outro valor. E já mudou um pouco, para o 13.

Os diálogos indicam que a investigação dos intervalos promoveu a discussão entre o grupo sobre os aspectos que definem a velocidade média e a posição. Além disso, sugeriu a análise de intervalos pequenos para obter uma aproximação da velocidade instantânea. Essa sugestão foi reforçada pelas interações com a pesquisadora, que promoveram a discussão sobre os significados dos valores no problema. No entanto, apesar de os estudantes indicarem diferenças entre as grandezas envolvidas nos diálogos, sua resposta à questão seguinte sugere uma confusão entre o que é velocidade média e posição. Esse erro revela um obstáculo relacionado à transposição do comportamento observado para a linguagem matemática, um desafio que classificamos na categoria E_5 e na compreensão das grandezas que associamos à categoria E_1 .

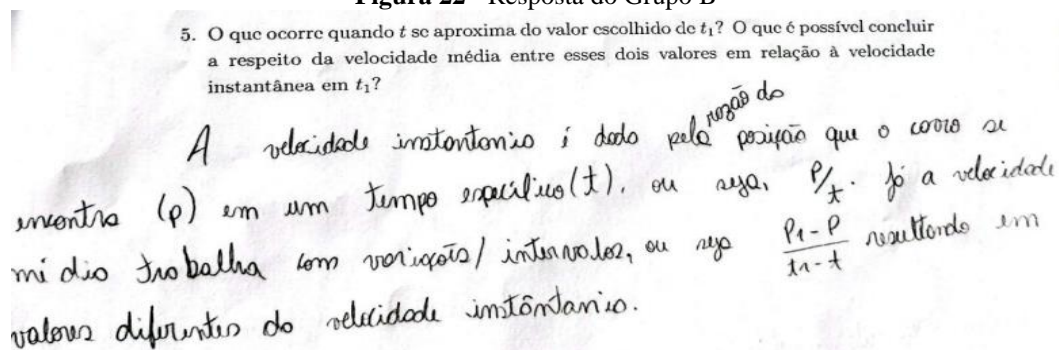
Essa confusão entre os significados, apontada nas discussões anteriores, estendeu-se para a quinta e última questão, com os estudantes do grupo B discutindo novamente a distinção entre essas grandezas ao longo de uma interação com a pesquisadora.

- Pesquisadora O que vocês responderam na 5?
- B2 As nossas contas estavam erradas, as últimas. Investigamos a variação, aumentar [*variar os valores*] para ver o que acontecia.
- Pesquisadora Como vocês refizeram?
- B2 Utilizamos uma casa decimal.
- Pesquisadora E vocês conseguiram identificar algum padrão?
- B2 Quanto maior a variação [*dos intervalos*], mais perto a velocidade média chega da velocidade instantânea.
- Pesquisadora E como vocês chegaram nesse 27 [*aponta para a anotação na tarefa*]? O que ele é [*nesse caso*]?
- B1 É a distância percorrida... A gente dividiu pelo tempo que estava naquela posição.
- Pesquisadora Mas a velocidade média para ser calculada precisa de dois valores, certo?
- B1 Escolhemos o tempo e a posição...

- Pesquisadora Mas quais valores vocês escolheram para chegar que a velocidade instantânea é 27?
- B1 O tempo 3.
- B2 Aqui é a velocidade instantânea em 3, e aqui seria a variação [apontando para os valores escolhidos na tabela da questão 4], que é 3 e 3.1.
- Pesquisadora Mas de onde surgiu esse 27 [aponta para uma anotação diferente]?
- B2 É a posição dele no instante 3.

A seguir, apresentamos a resposta do grupo (Figura 22) na quinta questão, em que, apesar de demonstrarem uma distinção entre os significados dos valores citados na discussão, respondem que o valor da velocidade média tende para o valor da posição no instante investigado.

Figura 22 - Resposta do Grupo B



Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Embora os estudantes demonstrem identificar o comportamento de aproximação a um valor nos diálogos, apresentam uma resposta que não descreve matematicamente algo coerente com aquilo que afirmavam. Esse obstáculo pode fazer parte da categoria E_1 , relacionada à complexidade dos objetos matemáticos elementares ou com a linguagem matemática (E_5). Afinal, bastaria dividir o valor da posição pelo instante investigado e comparar com a velocidade média obtida no intervalo próximo, que resultaria em valores distintos.

Uma resposta recorrente nas resoluções da terceira questão reapareceu na última: a consideração da aceleração como justificativa para as variações entre as médias das velocidades. Esse padrão pode ser observado no excerto a seguir, referente ao Grupo H:

- H1 Nessa última parte da atividade aqui, que pergunta o que ocorre quando você aproxima o tempo final do valor escolhido do tempo inicial [citando a questão 5], preenchemos todas as tabelas e notamos que vai depender de qual instante estamos analisando.
- Pesquisadora Certo.
- H1 Se ele [o carro] está aqui, na posição [referente ao instante] dois, a velocidade média entre um valor muito próximo, vai ser uma velocidade baixa, porque ele não pegou embalo ainda.

Mas se tiver posição [referente ao] quatro, já vai estar embalado. Então, por mais que seja um instante muito pequeno, a velocidade média vai ser alta.

Pesquisadora Entendi. Vocês estão na [questão] 4, ou na 5?

H2 Na [questão] 5.

Pesquisadora Ah, vocês olharam para os instantes? Vocês fizeram essa aproximação [aponta para os valores anotados]. Existe algum padrão dessa velocidade média calculada entre esses instantes?

H1 Teria que olhar na tabela [planilha].

O grupo H, apesar de não ter utilizado o termo, considerou a aceleração como o fator de mudança das médias. Isso pode ser identificado no uso de termos como *velocidade baixa*, *velocidade alta* e *embalado*, indicando que o grupo identificou variação da velocidade, que é causada implicitamente pela aceleração do movimento. O grupo H, assim como os demais, utilizou a Planilha do GeoGebra para selecionar valores, mas realizou os cálculos com o auxílio da calculadora do computador.

A resposta do grupo H na quinta questão revelou que os estudantes usaram a aceleração para justificar a variação da velocidade. O que se difere das respostas dos demais grupos é a escolha da análise em um instante nulo, em que a aceleração é nula, ou como o momento inicial, como se o que estaria mudando fosse a aceleração, e não a velocidade. Essa confusão entre os dois conceitos, que consideramos um obstáculo da categoria E_1 , levou também a erros no cálculo da velocidade no intervalo investigado (Figura 23).

Figura 23 – Resolução do grupo H

O que vai ocorrer depende muito do instante que está, por exemplo, no segundo 2 até 2,14, ambos estão perto do segundo 0 (aceleração 0), então a velocidade ^{média} está mais baixa. Já na cara dos segundos 4+, apesar de ter instantes curtos, a velocidade média é "alta".
A velocidade instantânea em $t_1 = 4$ é 16m/s

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

O grupo G também escolheu um intervalo próximo a zero, como pode ser lido no excerto a seguir.

Pesquisadora Nosso objetivo é descobrir a velocidade instantânea em t_1 . Como conseguimos descobrir isso?

G1 Se eu escolher um intervalo de tempo muito pequeno, eu consigo descobrir uma variação, uma distância muito pequena, e vai ter a velocidade média naquele instante em específico, mas o meu intervalo de tempo tem que ser muito pequeno.

Pesquisadora Mas aí você vai ter a velocidade instantânea?

G1 Vou ter a aproximação da velocidade instantânea que eu posso arredondar, que eu posso considerar.

As respostas de G1 evidenciam que houve menção ao conceito de aproximação da velocidade instantânea por meio da velocidade média na resolução da tarefa, e isso é citado na resposta da quinta questão (Figura 24).

Figura 24 - Resposta do grupo G

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

A velocidade instantânea vai aumentando.
É possível concluir que quanto menor for a distância entre esses dois pontos, a velocidade média entre eles vai se aproximar da velocidade instantânea em um dos pontos.

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

No entanto, os estudantes referiram-se à aproximação da velocidade instantânea em um dos pontos, sugerindo que a análise foi feita em um dos extremos do intervalo estabelecido, sem especificar qual, e não em um valor escolhido propositalmente pelo grupo. Essa referência indica a ideia de aproximação da velocidade média pela velocidade instantânea, mas sem definir claramente para qual valor do intervalo. Essa dificuldade reflete um obstáculo na compreensão da aproximação pela direita e pela esquerda dos Limites laterais, que classificamos como parte da categoria E_4 .

Os grupos C e D chegaram a respostas que remetem à ideia de Limite, baseando-se nos resultados obtidos na quarta questão e nas discussões do grupo sobre o padrão identificado a partir do preenchimento e organização dos valores da tabela.

Figura 25 - Resposta do Grupo C

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

Quanto mais próxima t é de t_1 , mais próxima a velocidade média fica do valor médio da tabela, sendo na primeira aproximadamente 12, na segunda aproximadamente 27 e na terceira a um valor entre 3 e 3,0605

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

A resposta (Figura 25), em conjunto com o relatório produzido pelo grupo (Figura 26), evidencia a ideia de reduzir a diferença nos intervalos na obtenção da velocidade média, por meio das aproximações dos valores feitos na tarefa. O grupo identificou que, à medida que reduzem o tamanho do intervalo, a velocidade média se aproxima de um valor que pode representar a velocidade em um instante específico. Além disso, os estudantes identificaram a possível indeterminação decorrente dessa diferença, caso os valores fossem iguais, resultando em zero no denominador.

Figura 26 – Relatório do grupo C

Na questão 5 é pedido para observar o que ocorre quando o valor de t se aproxima do valor escolhido em t_1 . É o que ocorre e que a velocidade média fica mais próxima do valor da velocidade instantânea, mas nunca chega realmente neste tal valor.

Nunca chegamos no valor, pois se substituíssemos os valores na fórmula, teríamos uma divisão por 0, o que resultaria em uma indeterminação.

Nas tabelas que construímos, podemos observar que chegamos em aproximações do valor instantâneo, sendo estas: do instante $2 \cong 12$, do instante $3 \cong 27$ e do instante $4 \cong 3$.

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Apresentamos também, na página seguinte, uma resposta semelhante do Grupo D.

Figura 27 - Resposta do Grupo D

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

Para encontrar a velocidade instantânea, podemos dividir a distância percorrida pelo tempo gasto para percorrê-la, quando o intervalo muito pequeno, quora igual a zero.

ex: $T = 2$

$T_1 = 1,998$

Velocidade instantânea igual a (12)

Quanto mais T_1 se aproxima de T a velocidade média corresponde a velocidade instantânea

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Os grupos C, D e G reduziram os intervalos escolhidos para investigar o comportamento da velocidade média ao redor de um ponto, reconhecendo a vantagem de trabalhar com valores pequenos para obter uma aproximação satisfatória. Por meio das gravações das telas dos computadores, notamos que o grupo E pesquisou vídeos na internet sobre velocidade instantânea, e na quinta questão, escreveu a notação de Limite (Figura 28). A notação não havia sido apresentada previamente na disciplina, e não houve menção, nas discussões dos estudantes, sobre um contato prévio com o conceito.

Na resposta escrita pelo grupo, é possível identificar que, apesar de reconhecerem a relação existente nos processos realizados na tarefa com o conceito de Limite pesquisado, utilizam de maneira incorreta a notação, que podemos caracterizar como um obstáculo E_2 relacionado à noção e formalização do Limite, dado que houve dificuldades na compreensão dos elementos presentes na notação. Isso foi discutido posteriormente, na sistematização da tarefa.

Figura 28 - Resposta do Grupo E

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

É possível concluir que em todas as tabelas, quando t tende a t_1 , a velocidade média apresenta um limite, ou seja, há valores para a velocidade média que oscilam em torno de um dado valor.

$$\lim_{t \rightarrow t_1} X = Y \quad \text{creditamos que seja algo nesse sentido}$$

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

De modo geral, a tarefa permitiu que os estudantes percebessem como intervalos menores favorecem aproximações satisfatórias da velocidade instantânea. Apesar disso, nenhum dos grupos fez uso exclusivo do cenário animado. Os recursos mais utilizados foram a calculadora e a planilha, e apenas um grupo recorreu ao cenário animado no início da atividade. Embora o cálculo de valores por meio da planilha tenha sido um recurso útil, as mesmas operações poderiam ter sido realizadas com papel e lápis. Além disso, identificamos obstáculos relacionados à complexidade dos objetos matemáticos elementares (E_1), Noção e formalização de Limite, Rupturas do Cálculo (E_4) e aos obstáculos da linguagem (E_5).

A análise das resoluções dos estudantes permitiu identificar que o contexto do cenário animado foi explorado, e em todas as interações, os estudantes discutiram a ideia de velocidade, deslocamento de um trajeto percorrido pelo carro e aceleração, referindo-se a uma situação que é parte do cotidiano. Os estudantes interagiram ativamente com o arquivo do cenário, manipulando os botões e registrando os valores na Planilha. Aqueles que utilizaram a Planilha, calculadora e a Janela de Álgebra de diferentes formas associadas para os cálculos, conseguiram concluir a tarefa, pois essas ferramentas facilitam a realização das operações de forma quase instantânea, agilizando o processo de resolução. Em contrapartida, os grupos que realizaram os cálculos manualmente, seja no papel ou apenas na calculadora (grupos E e F), não conseguiram completar a tarefa, embora o grupo E tenha realizado pesquisas na internet para responder às questões.

5.2 Resultados da tarefa *Flecha*

O objetivo da tarefa *Flecha* (Quadro 33) foi possibilitar a discussão sobre Limites no infinito por meio do paradoxo proposto por Zenão de Eleia (485 aEC – 430 aEC).

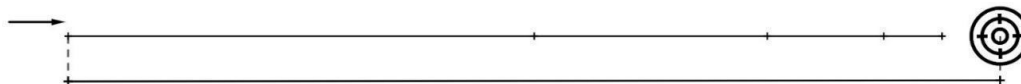
Quadro 33 - Tarefa Flecha

Tarefa 2 - Cenário *Flecha* ²⁷

Nome: _____ e-mail: _____
Nome: _____ e-mail: _____
Nome: _____ e-mail: _____
Nome: _____ e-mail: _____

Vamos analisar um famoso paradoxo proposto por Zenão de Eleia: o paradoxo da flecha. Imagine um arqueiro lançando uma flecha em direção a um alvo. Zenão argumenta que, para a flecha atingir o alvo, ela precisa passar por infinitos pontos ao longo do caminho.

Nesse sentido, vamos dividir o caminho da flecha em etapas: na primeira, ela percorre metade da distância; na segunda, metade da metade restante, e assim por diante. Considerando essa divisão, vamos investigar se a flecha realmente consegue atingir o alvo, assumindo a existência desses infinitos pontos ao longo do trajeto.



1. Complete, no diagrama, a 3ª, 4ª e 5ª etapa.
2. Determine a distância:
 - (a) Entre o alvo e o arqueiro.
 - (b) Correspondente à 1ª etapa do percurso.
 - (c) Correspondente à 2ª etapa do percurso.
 - (d) Correspondente à 5ª etapa do percurso.
3. Como calcular a distância percorrida pela flecha na n -ésima etapa?
4. Como calcular a distância percorrida pela flecha após n etapas?
5. O que podemos concluir sobre a soma dessas divisões e a distância total que a flecha percorre, à medida que o número de etapas aumenta?
6. De acordo com o raciocínio de Zenão, a flecha atinge seu alvo? Por quê?
7. A partir das suas resoluções, finalize o cenário.

Fonte: Elaborado pela autora.

Alguns aspectos do contexto para a resolução da segunda tarefa devem ser destacados: os estudantes já haviam passado pela sistematização da primeira tarefa; logo, a notação de Limite já havia sido introduzida, apesar de a tarefa, agora, envolver Limite de sequências, o que foi um contexto investigado diferente do anterior. Eles possuíam experiências da construção de pelo menos um cenário animado, além de familiaridade com o GeoGebra; os grupos permaneceram os mesmos, com exceção da ausência de alguns estudantes devido a faltas; o cenário animado que representava a situação apresentada deveria ser construído pelos

²⁷ <https://www.geogebra.org/classic/mjxe8zsn>

estudantes como parte de um item da tarefa, sendo disponibilizado para os estudantes apenas uma construção com as imagens.

Houve problemas na gravação dos vídeos de dois grupos: o grupo B registrou apenas o áudio das discussões, sem imagem, enquanto o grupo H capturou o vídeo, mas com baixa qualidade de áudio, o que dificultou um pouco a compreensão da pesquisadora das resoluções do grupo, e o grupo E não teve seu áudio capturado. Além disso, o grupo A não entregou o relatório escrito da segunda tarefa após a finalização das aulas; logo, a análise da sua resolução considerou apenas as respostas registradas na tarefa e as discussões gravadas.

Apresentamos, a seguir, os quadros preenchidos que orientam a análise dessa tarefa.

Quadro 34 - Resoluções do grupo A

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Janela de visualização.	Definem os valores observando as distâncias entre as imagens.
2	Anotações no papel.	Realizam as divisões das etapas no papel.
3	Progressão Geométrica.	Pesquisam na internet sobre sequência numérica e discutem sobre progressão geométrica.
4	Progressão Geométrica.	Em discussão entre o grupo e em conjunto com o grupo H, os estudantes afirmam que a soma da progressão geométrica ajudaria a descobrir a distância total.
5	Discussão entre o grupo.	Afirmam que nunca chegará até o alvo, pois sempre restará uma distância a ser percorrida.
6	Discussão entre o grupo.	Acordam que a flecha nunca chegará até o alvo.
7	Não respondem à questão.	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
8 min	Estudantes afirmam que a flecha nunca alcançará o alvo.	
11 min	Definem os valores da distância pela Janela de Visualização e realizam as divisões no papel.	
24 min	Pesquisam na internet sobre sequências numéricas. Analisam as progressões e entram em acordo que a sequência de números pode ser descrita como uma progressão geométrica.	
36 min	Respondem à quarta e quinta questões com as fórmulas de uma progressão geométrica, assim como a soma de uma progressão geométrica.	
44 min	Afirmam que a flecha nunca chegará, pois quarenta é o limite; a distância nunca será igual ao trajeto percorrido pela flecha, pois conforme as divisões ocorrem, ele se aproxima de zero, mas sempre restará uma distância para ser percorrida.	
58 min	Tentam inserir um controle deslizante para mover a imagem no cenário.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 35 - Resoluções do grupo B

(Continua)

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Janela de Visualização.	Definem os valores na Janela de Visualização.
2	Janela de Visualização e manipulação aritmética.	Os estudantes elaboram uma tabela com os valores de cada etapa.
3	Manipulação algébrica.	Os estudantes escrevem os valores e identificam os padrões existentes, deixam em evidência as constantes e estabelecem a variável como n .
4	Manipulação algébrica.	Ao longo da discussão, sugerem realizar a subtração da expressão algébrica obtida na questão anterior da distância total, mas registram, na folha da tarefa, apenas a expressão $\frac{40}{2^n}$. No relatório, explicam corretamente.

(conclusão)

5	Discussão entre o grupo.	Afirmam que a distância total é igual à distância percorrida entre a flecha. Grupo discute e entra em acordo que a distância total é a soma das etapas.
6	Discussão entre o grupo.	Afirmam que, pelo raciocínio de Zenão, a flecha nunca vai atingir o alvo; o resultado não irá se aproximar de 40. A metade da divisão anterior sempre estará faltando.
7	Utilizam os resultados da tarefa.	Apenas discutem entre os integrantes do grupo.
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
9 min	Grupo discute sobre valores iniciais e finais de onde a flecha saiu e onde ela irá chegar: B1 comenta sobre instante um, onde a flecha saiu; e cinco, onde a flecha chega. B2 afirma que nunca chegará em 5.	
10 min	Definem a distância entre o alvo e o arqueiro pelas imagens na Janela de Visualização. Dividem os valores conforme o enunciado até a etapa 5.	
13 min	Realizam sucessivas divisões por números múltiplos de dois.	
14 min	Afirmam que a constante sempre será quarenta divididos por alguma coisa; questionam-se o que os resultados têm em comum, e afirmam que o resultado atual sempre será o dobro do próximo, e concluem que o padrão é dividir por dois. B4 afirma que a divisão do 40 será n vezes dois, em que n é o número da etapa.	
15 min	Discutem se a etapa 2 é dez ou trinta. Estudante B3 afirma que o grupo está fazendo ao contrário.	
20 min	Questionam-se sobre a divisão por $2n$, testam valores e percebem que alguns resultados não batem. Sugerem que seria uma potência.	
25 min	Discutem a número 4 e utilizam a expressão encontrada na questão anterior subtraída de quarenta. O estudante B4 questiona novamente a respeito do valor da terceira etapa; o grupo discute se é a soma das etapas ou apenas o valor da divisão na etapa específica. Grupo utiliza os termos “antes” e “depois” para se referir à soma das etapas anteriores e o valor da etapa específica, respectivamente.	
29 min	B2 comenta ser uma PG de razão 2.	
30 min	Leem novamente o texto introdutório das perguntas para responder à questão 4.	
43 min	Grupo discute novamente qual a diferença entre as expressões $\frac{40}{2 \cdot n}$ e $\frac{40}{2^n}$.	
50 min	Grupo tenta construir o cenário. Afirma que n deve ser o controle deslizante, discute qual seria a função que descreveria o comportamento da flecha, até citam o 2^n , mas não relaciona com aquilo que elaboraram nas questões anteriores.	
57 min	Grupo tenta criar uma função com as expressões criadas nas questões anteriores. Eles discutem que, no cenário feito anteriormente (em uma construção feita anteriormente, externa a essa pesquisa), o caminho era traçado por uma linha reta.	
59 min	Grupo afirma que o Limite é de zero a quarenta.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 36 - Resoluções do grupo C

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Janela de Visualização.	Grupo identifica, com base na construção do cenário.
2	Manipulação aritmética.	Estudantes já dividem enquanto discutem.
3	Manipulação algébrica.	Estudantes definem enquanto discutem.
4	Manipulação algébrica.	Estudantes sugerem ser uma PG.
5	Discutem entre o grupo.	Afirmam ser uma PG.
6	Discutem entre o grupo.	Afirmam que é uma divisão infinita.
7	Caixa de ferramentas.	Criam um controle deslizante com o tamanho do trajeto e associam aos pontos da flecha.
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
15 min	Pesquisadora pergunta para os estudantes por que a etapa 1,25 não existe, e o estudante C1 afirma que não é usual.	
44 min	Estudantes afirmam que é uma PG que está tendendo ao 40, mas nunca chega.	
47 min	Afirmam que é infinito, o número de etapas, e que é uma divisão infinita.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 37 - Resoluções do grupo D

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Régua.	Grupo faz as divisões com o auxílio da régua.
2	Régua e calculadora.	Grupo define a distância no diagrama presente na folha da tarefa e divide os valores na calculadora.
3	Manipulação algébrica.	Grupo apresenta dificuldades em diferenciar multiplicação de potência.
4	Manipulação algébrica.	Conseguem identificar o padrão repetindo a distância inicial e realizando sucessivas divisões com o passar das etapas.
5	Discussão entre o grupo.	Citam progressão aritmética e geométrica, mas não dão continuidade no raciocínio.
6	Discussão entre o grupo.	Entram em consenso que a flecha nunca atinge, pois <i>a divisão é infinita</i> .
7	Não resolvem a questão.	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
11 min	Medem com a régua para responder às questões 1 e 2.	
24 min	A pesquisadora sugere que os estudantes escrevam os números resultantes das divisões e tentem reorganizá-los, a fim de reconhecer algum padrão.	
30 min	Identificam que a divisão por dois é um padrão, e discutem se essa constante será multiplicada pelo número das etapas ou será o expoente. Testam valores.	
35 min	Sugerem que é uma progressão aritmética.	
37 min	Optam por manter o valor da distância total e fazer sucessivas divisões para tentar obter uma expressão algébrica para descrever o comportamento da flecha.	
38 min	Estudante D2 sugere fazer o caminho inverso, multiplicando por dois.	
46 min	Afirmam que o número de etapas será o expoente de dois, pelo qual farão a divisão da distância total.	
49 min	Afirmam que a distância percorrida é o somatório das <i>n</i> etapas.	
52 min	Confundem multiplicação com potenciação.	
59 min	Afirmam que a flecha não atinge o alvo porque existem infinitas divisões.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 38 - Resoluções do grupo E

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Não há registros.	Apenas afirmam que a distância é um número positivo pertencente ao conjunto dos reais.
2	Criam uma sequência cujo próximo termo será dividido por dois. Somam as frações obtidas.	Afirmam que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Registram a resposta da questão em porcentagem.
3	Soma dos termos de uma progressão geométrica.	Utilizam a fórmula de soma da progressão geométrica e apenas substituem por <i>n</i> etapas.
4	Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.	Citam que o número de etapas é infinito.
5	Escrevem o Limite da progressão geométrica.	Concluem que a soma das divisões se aproxima progressivamente da distância total.
6	Discussão entre o grupo e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.	Afirmam que o paradoxo difere da realidade e justificam com a soma de uma progressão geométrica infinita.
7	Segmento, Círculo com o ponto de centro sobre o segmento, Controle Deslizante.	Os estudantes tentam mover a flecha sobre um segmento criado. Para isso, criam um círculo sobre o segmento e tentam associar à imagem, sem sucesso.
A discussão não foi registrada devido a problemas técnicos, o áudio não foi capturado na gravação.		

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 39 - Resoluções do grupo F

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Janela de Visualização.	
2	Janela de Visualização e calculadora.	
3	Não respondem à questão.	
4	Manipulação algébrica.	Somam o ponto em que a flecha está ao valor final e dividem por dois.
5	Não respondem à questão.	
6	Discussão entre o grupo.	Afirmam que não alcança, pois sempre faltará a metade da quantia que resta até o final.
7	Não respondem à questão.	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
15 min	Grupo abre o arquivo do cenário e identifica os valores para responder à primeira e segunda questão.	
35 min	Discutem a terceira questão afirmando que é sempre a metade da metade, mas não concluem uma generalização.	
40 min	Discutem a quarta questão dizendo que será sempre a metade da distância que falta mais o valor percorrido.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 40 - Resoluções do grupo G

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Anotações na tarefa.	
2	Janela de Visualização.	Realizam as divisões dos valores da etapa enquanto discutem.
3	Manipulação algébrica.	Realizam anotações em um esboço e anotam frações que representam as divisões com o passar de cada etapa.
4	Manipulação algébrica.	Pesquisam na internet a fórmula da soma finita da progressão geométrica.
5	Discussão entre o grupo.	Afirmam que, com o passar das etapas, a flecha se aproximará cada vez mais da distância entre o arqueiro e o alvo.
6	Discussão entre o grupo.	Grupo entra em consenso de que sempre faltará uma distância para ser percorrida pela flecha.
7	Não respondem à questão.	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
7 min	Grupo abre o cenário não finalizado.	
14 min	Definem os valores das etapas por meio da distância entre o arqueiro e o alvo na construção, e dividem os valores enquanto discutem.	
20 min	Testam valores e tentam obter uma generalização, manipulam expressões no papel.	
30 min	Obtêm uma generalização por meio de uma manipulação algébrica.	
33 min	Comentam sobre a progressão geométrica.	
36 min	Estudante explica para os demais colegas sobre como adaptar a expressão obtida à soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.	
37 min	Estudantes discutem como adaptar a resposta obtida a uma progressão geométrica.	
40 min	Discutem sobre o padrão de soma, e qual será a distância final atingida pela flecha. Tentam responder e diferenciar a resposta da questão três da questão quatro.	
44 min	Afirmam que haverá um somatório das etapas para conseguir obter a distância percorrida pela flecha após a n -ésima etapa. Estudantes conferem as frações obtidas no esboço.	
55 min	Afirmam que vai chegar bem perto do arqueiro com o passar das etapas. Quanto mais etapas existirem, mais próximo o valor da distância percorrida chegará da distância do arqueiro até o alvo.	

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 41 - Resoluções do grupo H

Questão	Estratégias utilizadas na resolução	Observações do contexto
1	Anotações na tarefa.	
2	Janela de Visualização.	O grupo define a distância com base nos valores de posicionamento das imagens do cenário.
3	Manipulação algébrica.	Eles definem a distância total como n e a dividem por dois.
4	Progressão geométrica.	Grupo afirma que a fórmula para encontrar um termo qualquer de uma progressão geométrica, considerando a distância inicial como vinte, pode determinar a distância percorrida pela flecha após n etapas.
5	Discussão entre o grupo.	Afirmam que a distância total é quarenta.
6	Discussão entre o grupo.	Para o grupo, a flecha nunca alcançará o alvo.
7	Não respondem à questão.	
Tempo	Elementos complementares aos textos escritos e observações da aula	
10 min	Utilizam o cenário para definir as distâncias da primeira e segunda questão por meio da Janela de visualização, consideram casas decimais entre os pontos das imagens.	
14 min	Definem o tamanho das etapas com uma incógnita n . $n/2$, $n/2$ e assim sucessivamente.	
30 min	Comentam sobre a possibilidade de ser uma progressão geométrica.	
34 min	Afirmam que o quarenta vai ser a soma dos termos da sequência.	
39 min	Afirmam não estar compreendendo a questão número quatro.	
43 min	A pesquisadora interage com os estudantes do grupo e explica a questão que eles não sabiam responder, solicitando uma generalização do comportamento da flecha, uma expressão que descreve o comportamento de divisão conforme o número de etapas avança.	
47 min	Grupo discute se a flecha chega ou não no alvo. Um dos integrantes afirma que chegará cada vez mais próximo e uma hora ele chegará, pois teoricamente, a soma vai resultar em quarenta unidades. Contudo, apresentam fortes dúvidas sobre a flecha chegar no quarenta.	
58 min	Questionam-se se é uma progressão geométrica finita ou uma progressão geométrica infinita.	

Fonte: Elaborado pela autora.

A primeira questão da tarefa pedia que os estudantes identificassem, no diagrama, a posição de cada etapa, conforme a descrição das divisões no enunciado. O objetivo era que os grupos interpretassem o padrão de divisão apresentado. A representação dessas divisões no diagrama permitiu que a pesquisadora identificasse, durante o desenvolvimento da tarefa, quais grupos haviam compreendido o padrão investigado nas demais questões.

Nessa questão, uma diferença que pode ser destacada foi o uso de régua pelo grupo D, que ao longo de toda a tarefa, fez a resolução com base nas medições feitas com a régua nas questões 1 e 2. Diferentemente dos grupos A, B, C, F, G e H, que utilizaram as coordenadas dos pontos das imagens para definir a distância entre o arqueiro e o alvo, o grupo utilizou o software apenas para a última questão que, por conta do tempo, não foi resolvida.

O grupo E, por sua vez, representou seus resultados na segunda questão em porcentagem, e definiu a distância entre o arqueiro e o alvo com um valor x , o que difere dos demais grupos (A, B, C, F, G e H) que utilizaram as distâncias entre as imagens da construção para responder às questões 1 e 2.

Um diálogo que merece destaque, do grupo B, ao resolver a questão 1, é apresentado abaixo. Na conversa entre os integrantes do grupo, ao preencher o diagrama, já discutem sobre

o fato de a flecha alcançar ou não o alvo, situação que é discutida apenas na questão número seis.

- B3 [Lê a questão 1]. É para completar aqui? [referindo-se ao espaço em branco].
- B2 Acho que é aqui, né? [Aponta para o diagrama] Então, aqui é um, dois, três e quatro [referindo-se às etapas]. [Aponta para intervalos no diagrama] ou quatro, cinco, seis e sete?
- B1 Não, aí não faz sentido.
- B2 [Conta os intervalos novamente no diagrama].
- B4 Mas aí, no cinco, não é quando ele chega no alvo?
- B2 Não, nunca vai chegar no alvo.
- B4 É por que sempre é a metade, um paradoxo.
- B1 Mas o cinco é o quê, então?
- B2 O cinco, ele vai ficar mais ou menos aqui [aponta próximo ao alvo], porque será sempre a metade, e a metade disso daqui [trajeto anterior] é isso daqui, e assim sucessivamente.

B1, B4 Entendi.

Esse diálogo demonstra que o objetivo da questão foi atingido, visto que os estudantes discutiram o padrão de divisão e já se questionam sobre o que esse padrão ocasionará no percurso da flecha. Nessa mesma questão, o grupo C já tentou descrever matematicamente o padrão das divisões em uma interação com a pesquisadora, apresentada abaixo.

Pesquisadora E aí, galera, como vocês estão [na tarefa]?

C1 A [número] um a gente já completou, definimos a distância total como quarenta porque, no GeoGebra [apontando para o cenário-problema], daqui até o alvo é quarenta. A gente não colocou unidade de medida.

Pesquisadora Certo.

C1 Primeira etapa é vinte. Metade de quarenta é vinte, metade de vinte é dez. Na terceira etapa seria cinco; na quarta etapa é dois vírgula cinco; na quinta etapa um e meio. Então a gente pensou em um jeito de calcular, porque como a gente vai cortando sempre na metade, a gente vai multiplicando por meio. Então seria a distância total, quarenta, vezes meio elevado a quantas vezes a gente vai dividindo, a qual etapa a gente está considerando.

Pesquisadora Entendi. [Aponta para a descrição do aluno no papel] Então o que x representa?

C2 As etapas.

Pesquisadora E qual o conjunto de valores que x pode assumir?

C2 Nos reais?

Pesquisadora Ele pode assumir qualquer valor real?

C1 Eu acho que seria os naturais. Seria a primeira etapa, segunda, terceira, quarta... A gente não consideraria a etapa de número dois vírgula setenta e sete.

Pesquisadora Por quê?

C1 Se a gente fosse seguir uma ordem, a gente pode considerar, mas não é usual.

O grupo C descreveu o padrão das divisões e identificou a variável como o número de etapas. Quando questionados pela pesquisadora sobre quais valores essa variável poderia

assumir, os estudantes afirmaram que apenas os números naturais deveriam ser considerados na expressão descrita, mas não souberam justificar matematicamente a escolha.

Nessa mesma questão, o grupo D apresentou mais dificuldades em identificar esse padrão, e como sugestão da pesquisadora, começaram a escrever as frações que representam a distância em cada etapa para identificar o que acontecia conforme as divisões aumentavam. Na Figura 29, podemos notar que, no processo de identificar os elementos que são constantes ao longo da divisão, o grupo anota na tarefa o termo $\frac{D}{n \cdot 2^*}$ e $D_1 \frac{D}{2^{etapas}}$. Esses dois termos representam suposições do grupo na tentativa de generalizar o comportamento observado, mas ainda há incertezas sobre se a relação correta envolve a multiplicação pelo número de etapas ou a exponenciação de dois por esse número.

Figura 29 - Resolução do Grupo D

2. Determine a distância:

(a) Entre o alvo e o arqueiro. $14,00$ $\frac{14}{2}$

(b) Correspondente a 1ª etapa do percurso. $7,00$ $\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{14}{2}$

(c) Correspondente a 2ª etapa do percurso. $3,50$ $\frac{3,5}{2} \Rightarrow \frac{14}{2}$

(d) Correspondente a 5ª etapa do percurso. $0,437$ $\frac{D}{n \cdot 2^*} = \frac{0,437}{2}$

$0,437 \cdot 2 = 0,874$

$D_1 \frac{D}{2^{etapas}}$

<https://www.geogebra.org/classic/njxe8zsn>

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Ao longo de seu relatório, o grupo D cita a multiplicação por dois, mas apresenta a expressão com uma potenciação, não deixando evidente o porquê da escolha das operações para a expressão numérica escrita.

Figura 30 – Relatório do Grupo D

Para chegarmos a uma fórmula para calcular a distância percorrida pela flecha, analisamos as respostas anteriores e tentamos identificar um padrão que nos permitisse calcular a enésima etapa de forma precisa. Buscamos um modelo que fosse aplicável em qualquer etapa, chegando à conclusão de que a distância percorrida na enésima etapa é igual à distância total dividida por 2, multiplicada pelo número da etapa. Além disso, a distância percorrida total é igual à distância total menos a distância da enésima etapa, resultando nas seguintes fórmulas:

$$D_n = D_t / 2^n$$

$$D_p = D_t - D_n$$

Onde:

- D_n : Distância da enésima etapa
- D_p : Distância percorrida
- D_t : Distância total
- n : Número de etapas

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

O grupo não deixa claro qual escolha descreve melhor o padrão de divisões, e não há uma atribuição de significado matemático ao longo da elaboração da expressão. Essa confusão também foi observada no grupo B durante a resolução da terceira questão, que consideramos ser um obstáculo da categoria E_1 , visto que nenhum desses grupos citados descreve com clareza o que os elementos da expressão significam ou representam no comportamento investigado. A seguir, apresentamos o contexto em que esse problema surge, em uma interação com a pesquisadora, que questiona os integrantes sobre esse aspecto e orienta a verificar as diferenças entre os dois casos.

- Pesquisadora E aí, pessoal pensaram na três?
- B2 Nós estávamos errados.
- Pesquisadora Por que vocês estavam errados?
- B1 Porque a gente testou com todos. Calculamos cada um deles [*referindo-se às etapas*] e viu a distância entre o alvo e a flecha. Só que daí, quando a gente chegou aqui [*referindo-se à etapa número 3*], montamos uma fórmula, porque ele diz que a distância percorrida pela flecha após a etapa n não era o que a gente estava calculando, pois estávamos pensando no percurso.
- Pesquisadora Me explique novamente, para que eu possa entender o raciocínio de vocês.
- B2 Nessas primeiras [*questão 1 e 2*], nós lemos e definimos a distância entre o alvo e o arqueiro: 40. Na primeira etapa, pensamos que daqui até aqui [*referindo-se à metade do trajeto*] tem vinte. Aí, na segunda etapa, concluímos que é metade disso aqui [*distância anterior*], e se já tínhamos vinte dividimos por dois, resulta em dez.
- Pesquisadora Certo.
- B1 Calculamos sempre esse pedaço, que consideramos ser a etapa do percurso, no caso o que a flecha tinha percorrido, e não essa outra que estávamos calculando [*referindo-se ao percurso total*].
- Pesquisadora Entendi. E na três, qual foi a conclusão de vocês pensando nisso?
- B1 Dividimos sempre o quarenta por um número, que era o número de etapas. Entretanto, percebemos que não era bem o número de etapas, porque primeiro

dividimos por dois. O dois [*segunda etapa*] a gente dividiu por quatro, depois por oito, então precisávamos encontrar uma relação. Descobrimos que o número de etapas era sempre multiplicado por dois ou o dois elevado.

B3 Elevado ao número de etapas.

B1 Não sabíamos por quanto dividir e pegamos o dois e multiplicamos pelo número de etapas.

B2 É isso, né?

Pesquisadora Entendi. Só [*essas*] duas coisas que você me falou são diferentes: dois elevados a n não é o mesmo que dois vezes n .

B1 Sim.

Pesquisadora Qual é o certo? Perdão, qual descreve melhor o comportamento?

B3 Dois elevados a n .

B2 Não...

B1 [*Começa a testar valores*]

B3 Não, gente, está errado.

Pesquisadora Vou deixar vocês discutindo.

Após a saída da pesquisadora, o grupo discute, testa valores e conclui que a expressão que descreve o comportamento investigado é 2^n , com 2 como base da potência que divide a distância total. No relatório, os estudantes organizaram as medidas em uma tabela, apresentada na Figura 31, abaixo.

Figura 31 - Relatório do Grupo B

Etapas	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Divisão	2	4	8	16	32	64
Distância entre a flecha e o alvo	20	10	5	2,5	1,25	0,625
Distância percorrida	20	30	35	37,5	38,75	39,375

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Essa dificuldade em distinguir a diferença entre as operações matemáticas, encontrada pelos grupos B e D, é relacionada à dificuldade com objetos matemáticos elementares, e é descrita por Artigue (1995) quando a autora cita obstáculos que dificilmente serão superados apenas pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Essa dificuldade dos estudantes em estabelecerem a relação matemática correta entre a operação utilizada e o padrão de variação identificado na tarefa é solucionada pelo grupo B, ao testar valores (Figura 31), mas em relação ao grupo D, não possuímos evidências para fazer a mesma afirmação. Essa confusão sugere uma compreensão ainda inicial da estrutura matemática do problema, indicando uma dificuldade na interpretação e generalização dos resultados.

Ainda na segunda questão, o grupo E identificou o padrão de divisão por dois, mas sem determinar a distância total, referindo-se a ela apenas como x .

Figura 32 – Resolução do grupo E

2. Determine a distância:

(a) Entre o alvo e o arqueiro.
 Chamei a distância de X , com $X \in \mathbb{R}_+$

(b) Correspondente a 1ª etapa do percurso.
 como 1ª etapa do percurso é o ponto inicial a distância é zero

(c) Correspondente a 2ª etapa do percurso.
 Se X é a distância total e as etapas são determinadas por uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, a distância será $\frac{X}{2}$

(d) Correspondente a 5ª etapa do percurso.
 Para facilitar usarei a PG da distância: $(\frac{X}{2}, \frac{X}{4}, \frac{X}{8}, \frac{X}{16}, \dots)$
 Se fizermos a soma dos 4 primeiros termos, teremos:

¹<https://www.geogebra.org/classic/mjxc8zsn> $\frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{8} + \frac{X}{16} = \frac{15X}{16}$

Ou seja a distância será 93,75% de X na 5ª etapa.

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Na questão dois, item d, o grupo E descreveu o padrão de divisão das flechas e a sequência de valores correspondentes à cada etapa por meio de uma progressão geométrica. O grupo listou os quatro primeiros termos dessa progressão e realizou a soma desses termos. Podemos afirmar que o grupo reconheceu que, a cada nova etapa, era percorrida metade da distância da etapa anterior, mas representaram a distância percorrida na quinta etapa como uma porcentagem, indicando que correspondia a 93,75% do percurso total. Não existe uma explicação do cálculo realizado e de como essa porcentagem foi obtida, mas ela se refere à soma das etapas até a quarta, e não a quinta etapa, como a resposta afirma. O grupo não aprofundou esse raciocínio na questão três (Figura 33), na qual citaram novamente a progressão geométrica.

Figura 33 – Resposta do grupo E

3. Como calcular a distância percorrida pela flecha na n-ésima etapa?

A soma de n termos de uma P.G é dada por $S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$ *
 Podemos usar essa ideia para somar os "n" trajetos que são uma PG. Assim, ficará $10 = X \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]$

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Na terceira questão, foi solicitada uma forma de calcular a distância percorrida após n divisões, ou seja, em uma etapa qualquer. A representação desse padrão por meio de uma

progressão geométrica, como descrito pelo grupo E, apareceu também na resolução do grupo A e, posteriormente, na quarta questão, na resposta do grupo H. Os demais grupos (B, C, D, F e G) responderam à terceira questão utilizando uma expressão matemática semelhante àquela prevista no quadro de antecipação para descrever o comportamento observado. Abaixo (Figura 34), apresentamos a resposta do grupo B, que havia se deparado com a dificuldade citada anteriormente.

Figura 34 – Resolução do grupo B

3. Como calcular a distância percorrida pela flecha na n -ésima etapa?

Handwritten solution: $\frac{40}{n}$ and $\frac{40}{2^n}$ onde n é número da etapa

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

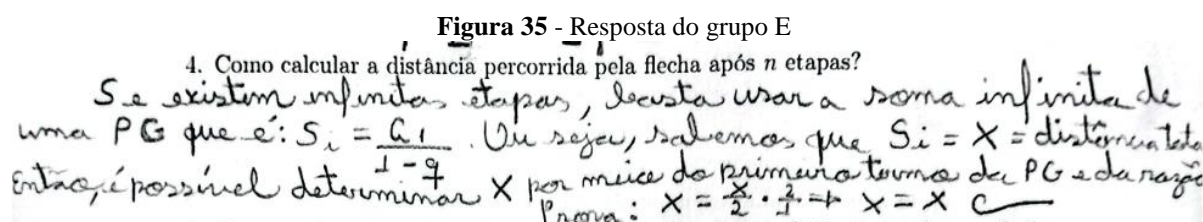
Essa resposta foi semelhante nos demais grupos citados, e em uma interação com o grupo G, descrita abaixo, os integrantes explicam o raciocínio que os levou à expressão obtida por meio de manipulação algébrica, utilizando lápis e papel na terceira questão. Optamos por apresentar esse diálogo para resumir as estratégias adotadas pelos demais grupos (C, D, F e G) que seguiram um raciocínio semelhante, usando os mesmos recursos (lápis e papel).

- Pesquisadora O que vocês pensaram nessa n -ésima etapa?
- G1 É a distância sobre dois elevados a n .
- Pesquisadora Como vocês chegaram a isso?
- G2 A gente vai mostrar. Porque a gente foi fazendo a anotação que seria sempre a metade, e daí para n casas.
- Pesquisadora Mas esse n é o que?
- G1 É o número do período que eu quero.
- Pesquisadora Que tipo de período?
- G1 Etapas percorridas, etapas do percurso ou número da etapa. A quinta etapa é quarenta dividido por dois elevados a cinco.
- Pesquisadora Entendi.
- G1 Assim como o primeiro era quarenta dividido por dois elevados a um, que é o primeiro período.
- G2 Que vai dar o vinte.
- G1 Que é a metade da distância.
- G2 Aí o dois, o segundo período, é 10.
- G1 Que é quarenta dividido por dois elevados ao quadrado, que é [resulta em] quatro, que resulta no comprimento do período, que é dez.

De modo geral, os grupos A, B, C, D, E, G, e H perceberam que, ao dividir a distância total de 40 unidades em infinitas partes, começando com metade da distância, depois metade do que restou, e assim por diante, o valor da soma dessas partes menores se aproximava cada

vez mais do valor total de 40. Todos os grupos utilizaram lápis e papel para chegar na expressão algébrica nas questões 3 e 4, chegando a essa conclusão do valor da soma se aproximar de quarenta ao longo das discussões entre os integrantes. O grupo F não apresentou respostas para as perguntas três e cinco, afirmando, na quarta questão, que a soma é o cálculo da distância inicial e da etapa percorrida, dividido por dois. Não conseguimos compreender o contexto dessa resposta por não haver informações suficientes na gravação, tarefa ou relatório.

A ideia de dividir infinitamente a distância, principal aspecto do paradoxo da flecha, foi citada pelo grupo E na resolução da questão quatro.



Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Contudo, a demonstração que o grupo apresenta consiste em substituir os valores na fórmula, e entendemos que apenas realizar essa substituição não constitui uma demonstração válida, pois não evidencia o raciocínio que justifica a expressão. A demonstração deveria incluir uma argumentação que explicasse a construção da fórmula e a relação entre os elementos envolvidos, em vez de apenas apresentar resultados numéricos.

Na quinta questão era solicitado que os estudantes descrevessem o que acontecia com o valor da soma dessas divisões à medida que o número de etapas aumentava gradativamente. O objetivo da questão era que os estudantes percebessem que o Limite da soma tenderia a quarenta, e escrevessem ou citassem termos relacionados à ideia de Limites. No entanto, apenas o grupo E escreveu o Limite da função criada, e os grupos C e G utilizaram termos como *se aproxima da distância total* ou *tende a quarenta*. Os demais grupos responderam de forma incoerente (A e H), algo diferente daquilo que foi solicitado (B, D), ou nem responderam essa questão (F).

Entretanto, apesar de apenas o grupo E associar a ideia de Limite, os grupos A, B, C, D, G e H mencionaram, em questões anteriores, um padrão de divisão que se repetiria infinitamente e se aproximaria cada vez mais da distância total, sem, no entanto, explicitar essa relação com o conceito de Limite. Entendemos que os estudantes reconheceram a estrutura do paradoxo, mas não estabeleceram sua conexão formal com o conceito matemático. Essa recusa em utilizar a ideia de Limite, que já havia sido vista na tarefa anterior, pode sugerir que os estudantes ainda trabalharam com seus *modelos espontâneos* (Cornu, 2002), e que seus

modelos próprios ainda estão distantes do conceito de Limite, ou sendo elaborados. Também resgatamos a afirmação de Sierpiska (1985), sobre a ausência de quantificadores e o não uso de símbolos que indiquem a passagem para o Limite no processo de construção de modelos próprios, o que configura um obstáculo de natureza lógica. Associamos esse aspecto à categoria E_4 , sendo essa, possivelmente, a causa do entrave observado na tarefa.

As respostas incoerentes dos grupos A e H, na quarta questão, têm contradições ou erros na formulação, deixando incerto o que o grupo quis dizer. As discussões do grupo H, ao contrário do grupo A, não deixam claro o significado das respostas, já que faltam informações para entender exatamente a ideia que queriam passar na quinta questão. Já as respostas que divergem do solicitado (B e D) apenas repetem o que foi dito nas questões anteriores, ou trazem afirmações incompletas.

Já na quinta questão, as respostas e discussões dos grupos C, D e E permitem reconhecer que os estudantes afirmaram que, embora a flecha precise percorrer infinitas frações da distância, a soma dessas frações converge para um valor finito. Apesar de o grupo B não ter escrito uma resposta que permitisse identificar o reconhecimento desse comportamento, ao longo de uma discussão, captamos um extenso debate entre os integrantes do grupo sobre a questão cinco.

Durante a discussão, alguns integrantes argumentam que, somando a distância de todas as etapas, a flecha percorre exatamente a distância total, enquanto outros insistem que sempre faltará um pequeno valor, por menor que seja. Essa divergência reflete um obstáculo citado por Cornu (1981), que o autor comenta sobre essa discussão do Limite atingir ou não o valor para o qual está tendendo, associado à categoria E_2 deste trabalho. A seguir, apresentamos o trecho do diálogo em que eles debatem essa questão.

- B2 O que podemos concluir [*referindo-se à questão 5*] é que sempre vai faltar metade.
- B1 É verdade, pensando bem...
- B2 [*lê novamente a questão*]
- B4 Que nunca chegará. Que será a metade da divisão anterior.
- B1 É por que se soma todas... Vai somar o dez, o vinte, o cinco...
- B2 Você nunca vai chegar no quarenta.
- B4 Mas calma, o negócio nunca vai ter fim?
- B1 Será que a gente respondeu errado, essa? [*referindo-se à questão anterior*].
- B4 Não eu acho que [*a resposta*] está certa.
- B1 B3, o que você entendeu da cinco?
- B3 [*Lê a questão*] para mim é a mesma coisa [*referindo-se à distância percorrida e à distância total*].
- B2 Mas não vai chegar ao quarenta.

- B3 Mas não é essa a resposta. O que ela quer é a soma das divisões, o que é essa soma?
- B2 É quanto a flecha percorreu.
- B3 Que é basicamente a distância total.
- B2 Então é basicamente igual?
- B4 Não, mas... Eu acho que não é essa resposta. Mas eu entendi o que você quis dizer.
- B1 Só concorde e siga a minha estratégia [referindo-se à flecha nunca alcançar].
- B2 É o mesmo? [referindo-se à distância total e ao percurso da flecha.]
- B3 É o mesmo. Que é a distância total.
- B2 Mas não é a distância total.
- B4 Mas não é isso que B3 estava falando antes?
- B2 Não é o quarenta.
- B4 Foi o que B3 disse. Não foi?
- B3 O quê?
- B4 Que a soma das divisões é igual à distância total.
- B3 Sim...
- B2 Não é. A distância total é diferente.
- B3 Claro que é [igual]!
- B1 O que é a distância total?
- B4 Mas siga o raciocínio dele [referindo-se a B1]. Vai faltar sempre a metade pra chegar no quarenta.
- B2 Mas é quarenta.
- B3 Não, gente, não é a distância total [referindo-se ao raciocínio da colega]. Essa é a distância total que a flecha percorre no número de etapas n .
- Demais Concordam.
integrantes

É possível perceber uma discordância entre os integrantes do grupo B no diálogo sobre a soma das distâncias percorridas em cada etapa, e se esse valor atinge ou não a distância total. Por fim, a resposta dos estudantes é que as somas das distâncias após as divisões e a distância total são iguais, contradizendo a afirmação feita pelo grupo na questão 1. Esse obstáculo pode ser enquadrado na categoria E_2 , relacionada à incerteza sobre o Limite alcançar ou não o valor para o qual tende, discutido por Cornu (1981).

Uma resposta que evidencia outro obstáculo associado ao conceito de infinito (Categoria E_3) é a do grupo C, que usa o termo *divisão infinita* em sua resposta na tarefa. O grupo utilizou essa expressão ao justificar que, à medida que o divisor cresce indefinidamente, o quociente tende a zero. No relatório, afirmam que a distância percorrida pela flecha tende a 40, mas nunca atinge esse valor. Além disso, destacam que a divisão nunca resultará em zero, ou seja, a flecha nunca alcançará o alvo, embora se aproxime cada vez mais dele.

Figura 36 – Resposta do grupo C

Na quinta questão, observamos que os valores correspondentes a cada etapa formam uma progressão geométrica. Além disso, a soma desses valores tende a 40, mas nunca chega. Deste modo, a questão 6 também é respondida ou seja, a flecha não atinge o alvo, apesar de estar cada vez mais próxima dele, uma vez que uma divisão nunca resultaria em zero, a não ser que este seja seu divisor (a divisão em questão sendo a distância entre a flecha e o alvo).

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Essa conclusão esclarece o paradoxo, mostrando que, dentro do contexto do paradoxo, embora a flecha nunca percorra exatamente toda a distância, ela se aproxima indefinidamente do alvo, à medida que o número de divisões tende ao infinito, diferentemente da realidade, em que a flecha atinge o alvo.

Por fim, ainda na questão cinco, os estudantes do grupo E formalizam essa ideia com o conceito de Limite, conforme apresentado na Figura 37.

Figura 37 – Resposta do grupo E

5. O que podemos concluir sobre a soma dessas divisões e a distância total que a flecha percorre a medida que o número de etapas aumenta?

É possível concluir a soma dessas divisões aproxima-se da distância total entre arqueiro e alvo, ou seja, $\lim_{m \rightarrow \infty} |X(\frac{1}{2})^m - 1| = X$

prova
progressivos
da distân

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

A não formalização dos grupos C, D e B pode estar associada à quarta categoria de obstáculos, a qual seria coerente em um contexto de rupturas necessárias em relação aos modos de pensamento algébrico. Isso também se relaciona às dificuldades de natureza lógica enfrentadas pelos grupos, e à dificuldade em associar o conceito de Limite, conforme discutido por Sierpinska (1985, 1987), visto que se trata de uma ideia que vai além de apenas descrever expressões algébricas.

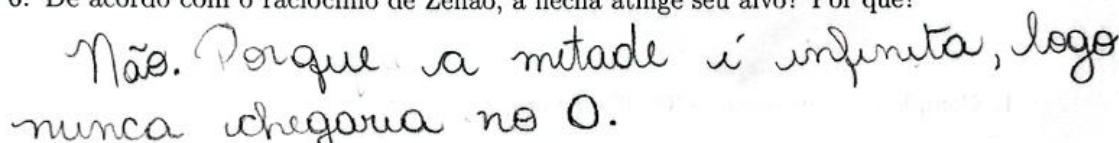
Na sexta questão, de forma unânime, os grupos afirmaram que a flecha nunca alcançará o alvo nos termos enunciados. Suas justificativas foram escritas todas no teor de que sempre faltará uma pequena parte do trajeto, que poderá ser dividida novamente. Alguns grupos (A e E) adicionaram que o paradoxo difere da realidade, visto que isso nunca aconteceria fisicamente, mas a situação era possível de se representar matemática ou filosoficamente. Novamente, o grupo B contradisse a afirmação feita na questão anterior. Podemos afirmar que os estudantes não tinham clareza sobre as respostas que descreveram, ora afirmando que a

flecha alcançava o alvo (questão 5 e 7), ora dizendo que ela nunca alcançaria (questões 1, 6 e 7).

Destacamos, nessa questão, a resposta do grupo C, que utilizou o termo *metade infinita*, o que entendemos como uma tentativa de descrever o processo de sempre dividir pela metade, de forma que, mesmo após muitas etapas realizando o processo de divisão, ainda restaria uma distância a ser percorrida, e a flecha nunca alcançaria o alvo de fato.

Figura 38 – Resposta do grupo C

6. De acordo com o raciocínio de Zenão, a flecha atinge seu alvo? Por quê?



Não. Porque a metade é infinita, logo nunca chegaria no 0.

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

Na última questão, que consistia em construir um cenário animado que representasse o paradoxo investigado na tarefa, apenas os grupos B, C e E tentaram construir. O grupo B inicialmente supõe a criação de uma função que descreve *uma reta e que nunca chega até o 40*. Ao longo das discussões, o grupo conclui que podem criar uma função com a expressão obtida na tarefa, criam um controle deslizante n , mas não conseguem associar ao ponto da flecha. Discutem que precisariam, além da função da tarefa, uma *função de linha reta*, que supomos que estariam se referindo a uma função constante, em que a flecha iria percorrer.

Percebemos que o grupo B associa com os passos do cenário da tarefa anterior, ao tentar encontrar uma reta que possui o que descrevem como *Limite do zero até o quarenta*. Entendemos que esse termo se refere ao intervalo que desejam, e não ao Limite da função, que consideramos ser um obstáculo da linguagem (E_5). A aula termina e os estudantes não finalizam o restante na construção. Abaixo, trazemos um excerto do diálogo entre os integrantes no momento de discussão a respeito da última questão.

- B1 No final, a flecha não se importa com o que Zenão pensa, ela vai atingir o alvo. Mesmo que ele diga que é impossível.
- B2 Será que a gente precisa fazer com que ela atinja no meio? [referindo-se à figura].
- B4 Eu acho que sim.
- B2 Como que a gente cria uma sequência no percurso do GeoGebra? Precisamos pensar em uma função que será sempre metade.
- B4 Precisamos de uma função do primeiro grau que vá até o alvo.
- B2 Mas ele nunca vai chegar.
- B4 Pois é, como terminaria esse cenário [animado]? Ele termina?
- B2 Como que a gente fez na versão passada? A gente não fez algo que nunca chegava ao resultado?

- B4 Fez? Não estou me lembrando.
- B2 Tenho alguma coisa anotada, algo deve ajudar né. *[olha para anotações no caderno]*. *[Lendo]* criação de controle deslizante, faça a função... Ah não, era de acordo com outros “negócios”.
- B4 Pois é, não é que ele nunca chegava, ele chegava e parava.
- B1 Mas se a nossa expressão nunca chega, e fizemos de acordo com o paradoxo...
- B2 A gente tem que colocar uma função que nunca chegue no quarenta.
- B4 É... Teria que colocar o n ao quadrado... Não o dois elevado a n .
- B2 Sim, onde n é o número de etapas. Certo, como a gente irá fazer isso?
- B1 Aí é que está, vamos fazer uma função primeiro, aqui.
- B2 Como que faz função?
- B4 $f(x)$ igual...
- B2 O primeiro é o quê?
- B1 Eu acho que agora o $f(x)$ vai ser quarenta divididos por dois elevados a n .
- B2 *[Insere a expressão na Janela de Álgebra do GeoGebra]*.
- B4 E teria que ter um controle deslizante, eu acho. E o n vai ser o controle deslizante.
- [testam a função e percebem que não modifica as coordenadas da flecha]*.
- B4, B1 Não mudou nada, também.
- B2 Estamos com dificuldades. Por que está errado, aqui? B3, você sabe?
- B4 Nós queremos que a função vá como o cara *[Zenão]* diz que vai.
- B2 *[Testa]* Mas não mudou nada.
- B3 Mas é quarenta menos isso *[aponta para a expressão]*.
- B1 Ah, então coloca o quarenta menos a expressão, é verdade.
- B2 *[Testa]* Não deu certo. A gente precisa de uma linha reta.
- B4 Uma função de primeiro grau.
- B3 F igual a três?
- B1 F igual a quarenta?
- B2 *[Testa as funções]* É disso aqui que a gente precisa. Agora a gente precisa delimitar o limite dela, que vai ser do zero até o quarenta.

Por meio do diálogo acima, percebemos que o grupo demonstrava grande potencial para desenvolver uma estratégia para a elaboração do cenário, pois seus integrantes haviam considerado associar a expressão encontrada ao movimento da imagem, e haviam definido o intervalo do controle deslizante. Além disso buscaram, na construção anterior, algo que pudesse ajudá-los, mas devido ao tempo, suas discussões não puderam ser concluídas. Também recuperaram a discussão sobre o Limite atingir ou não o quarenta (categoria E_2), e pelo contexto, compreendemos que os estudantes buscavam uma função que assumisse valores que se aproximassem do quarenta, mas nunca chegasse.

A estratégia do grupo C (Figura 39) foi a criação de um controle deslizante, que variava do zero ao quarenta, e a associação dos pontos da imagem ao controle, mas o grupo não estabeleceu nenhuma relação com o desenvolvimento da tarefa.

Figura 39 – Resposta do grupo C

7. A partir das suas resoluções, finalize o cenário.

* Criação de controle deslizante
 $L \rightarrow \min: 0 \quad \max: 40$

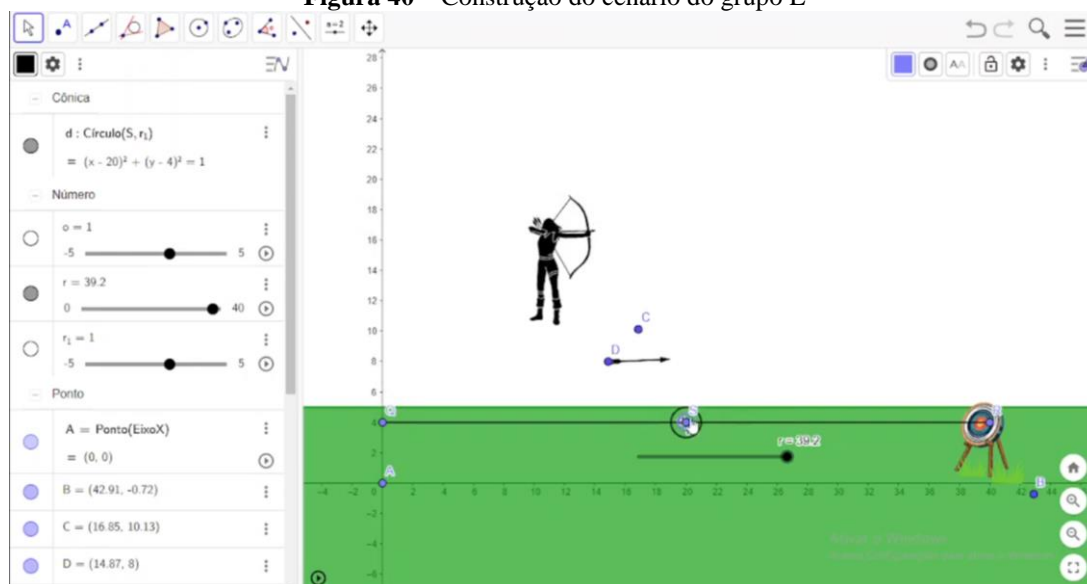
* Substituição da abscissa dos pontos C e D (pontos da imagem da flecha).
 $L \rightarrow C(a+2, y)$

• FALTOU: Planilha e função que descreve o parâmetro.

Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

O grupo E, de forma semelhante aos grupos B e C, criou controles deslizantes, mas utilizaram um segmento e uma circunferência para tentar associar os pontos da imagem e mover a flecha, como mostra a Figura 40, mas não estabeleceram nenhuma relação com aquilo que desenvolveram ao longo da tarefa.

Figura 40 – Construção do cenário do grupo E



Fonte: Dados produzidos durante a intervenção (2025).

De modo geral, a tarefa possibilitou que os estudantes explorassem a ideia de dividir um valor em múltiplas etapas e analisassem a tendência para um determinado valor. No entanto, apenas um grupo mencionou explicitamente a notação de Limite ao longo da atividade.

O cenário animado foi utilizado exclusivamente para a definição de valores nas primeiras questões (1 e 2) e para a resolução da última questão pelos grupos B, C e E, que conseguiram chegar até essa etapa da tarefa. Os demais grupos não discutiram essa questão e

não conseguiram concluir a resolução de todas as etapas. A construção do cenário com todos os grupos foi feita na aula seguinte, mas consistiu apenas em instruções por parte da pesquisadora, e não foi analisada nessa pesquisa.

É notável que, para a resolução das questões, os grupos focaram principalmente no processo de descrever o comportamento algebricamente, e deixaram a construção de lado, o que prejudicou a análise no sentido de observar o processo de construção do cenário. Se para a resolução da última questão houvesse mais tempo disponível, isso não teria sido um problema. Contudo, a falta de tempo foi algo que não havia sido previsto pelo quadro de antecipações, mas que comprometeu o andamento da resolução da tarefa.

Assim como na primeira tarefa, o uso do cenário animado como contexto foi amplamente explorado. Entretanto, notamos que não houve uma associação clara entre a construção e a tarefa resolvida pelo grupo. Os estudantes tiveram dificuldades em associar as duas coisas, vendo como problemas completamente separados, sem utilizar das conclusões que haviam respondido para pensar e transpor estratégias para o software.

Embora os estudantes já tivessem passado pela sistematização da tarefa anterior, identificamos que não houve associação direta com o conceito de Limite, o que foi feito apenas por um grupo (E). Os obstáculos que surgiram ao longo dessa resolução estavam relacionados à complexidade dos objetos matemáticos elementares (E_1), Noção e formalização de Limite (E_2), Infinito (E_3), Rupturas do Cálculo (E_4) e aos obstáculos da linguagem (E_5).

5.3 Síntese das análises

Houve muitos obstáculos encontrados no decorrer da resolução das tarefas. Retomamos, aqui, um quadro que complementa aqueles das seções 5.1 e 5.2. A seguir apresentamos, nos quadros 42 e 43, uma síntese dos obstáculos enfrentados pelos estudantes em cada questão.

Quadro 42 - Obstáculos identificados nos resultados da Tarefa 1

Categoria	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
E1: Complexidade dos objetos matemáticos elementares	-	-	-	B	H
E2: Noção e formalização de Limite	-	-	-	-	E
E3: Infinito	-	-	-	-	-
E4: Rupturas do Cálculo	-	-	-	-	G
E5: Obstáculos da linguagem	-	-	-	B	-

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 43 - Obstáculos identificados nos resultados

Categoria	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
E1: Complexidade dos objetos matemáticos elementares	-	D	B	-	-	-	-
E2: Noção e formalização de Limite	-	-	-	-	-	-	-
E3: Infinito	-	-	-	-	C	-	-
E4: Rupturas do Cálculo	B	-	B	-	C, D, E	B	B
E5: Obstáculos da linguagem	-	-	-	-	-	-	B

Fonte: Elaborado pela autora.

Essa síntese resgata o objetivo da pesquisa e auxilia na discussão sobre se as tarefas, aliadas aos cenários animados, possibilitaram superar ou refletir sobre os obstáculos epistemológicos.

Em relação aos obstáculos da categoria E_1 , o uso dos cenários animados, especialmente na Tarefa 1, facilitou a realização de cálculos onerosos. A tarefa exigia a investigação de vários intervalos para compreender o comportamento na vizinhança de um instante específico, demandando cálculos de médias e aproximação de intervalos. As janelas do software, como a Planilha, a Janela de Álgebra e a calculadora, tornaram esses cálculos mais rápidos e diminuíram a chance de erros no processo.

Compreendemos que essa listagem de valores poderia ter sido realizada em outros softwares, como Excel ou LibreOffice. No entanto, o uso do cenário animado construído no GeoGebra permitiu diferentes representações simultaneamente: o contexto na Janela de Visualização 1, a representação gráfica na Janela de Visualização 2 e a plotagem dos valores na Planilha à medida que o carro se deslocava na Janela de Visualização 1. Dessa forma, os estudantes puderam explorar essas representações de maneira articulada. Essa diversidade de possibilidades está em consonância com a abordagem proposta por Tall (2012), que sugere a conexão entre a discussão dos conceitos do Cálculo e a experiência do mundo real.

Além disso, a variedade de representações oferece múltiplos recursos para que os estudantes desenvolvam a capacidade de lidar com a complexidade do conceito de Limite, o que vai ao encontro de Tall (2012), que destaca a importância de o estudante saber escolher a representação mais adequada para cada situação específica.

No que se refere ao obstáculo da categoria dois, percebemos que os estudantes, apesar de utilizarem termos que são associados ao Limite, como *tendendo a*, não associam formalmente ao Limite, especialmente na Tarefa 2. Houve o caso mais claro da discussão do grupo B, sobre a flecha chegar ou não ao quarenta, e na última questão, eles estavam associando aquilo que desenvolveram na tarefa para a construção do cenário, buscando transpor a expressão que criaram para a construção do cenário animado.

Resgatamos aqui, também, o uso da palavra *Limite* na última questão para se referir ao intervalo que os estudantes gostariam que o domínio da função tivesse delimitado na Tarefa 2. Esse obstáculo da linguagem é discutido por Cornu (1981), que cita os múltiplos significados que são atribuídos à palavra *Limite*. Esses múltiplos significados são gerados pelos *modelos espontâneos* dos estudantes que, ao longo das aulas, se desenvolvem em *modelos próprios*, após a discussão e sistematização das tarefas, quando são confrontados pelo *modelo matemático* apresentado pela professora.

Na terceira categoria, relacionada aos obstáculos do infinito, podemos estabelecer uma conexão com os obstáculos da linguagem, presentes na quinta categoria. Observamos que os estudantes utilizaram termos como *divisão infinita* e *metade infinita*, o que indica não apenas uma dificuldade em compreender a noção de infinito, mas também em expressá-la de forma precisa na escrita.

Por fim, destacamos as dificuldades de natureza lógica na compreensão do conceito de Limite. Diferentemente de uma operação matemática ou de um simples símbolo, o Limite carrega uma amplitude de significados que envolve a noção de tendência, aproximação e infinitude. Essa categoria reúne desafios tanto na interpretação formal do conceito quanto na sua aplicação em diferentes contextos matemáticos. Podemos ver esse obstáculo ao reconhecer as dificuldades dos grupos em associar o conceito de Limite ao comportamento investigado na Questão 5 da Tarefa 1; e na segunda tarefa, nas questões 1, 3, 5, 6 e 7. Além disso, a necessidade de articular ideias como variação, precisão e aproximação de um valor exige um raciocínio que vai além da manipulação algébrica (Artigue, 1995), o que pode representar um obstáculo para muitos estudantes.

Os obstáculos que surgem ao longo do desenvolvimento da tarefa são inerentes a qualquer metodologia de ensino e à perspectiva adotada pelo professor em sua aula. Nenhum método está livre de desafios. Nessa pesquisa, reconhecemos as potencialidades dos cenários animados aliados a tarefas de natureza exploratória no ensino de Limites. Esses cenários não apenas ofereceram um contexto para as discussões, como também disponibilizam ferramentas por meio do software que auxiliam no processo de investigação e discussão entre os estudantes. Dessa forma, os cenários animados mostram-se como estratégia promissora, permitindo que os alunos explorem, testem e reflitam sobre as questões propostas. Contudo, assim como qualquer recurso, possui fragilidades e pontos a serem melhorados.

Resumimos abaixo (Quadro 37) os elementos identificados pela pesquisa que podem ser compreendidos como potencialidades e limitações do uso de cenários animados construídos no GeoGebra, aliados a tarefas de natureza exploratória para o ensino de Limite de funções

reais. Destacamos que esse quadro não tem o intuito de afirmar que esses aspectos são definitivos, mas apenas de reuni-los para destacar os resultados trazidos por esta pesquisa.

Quadro 44 – Potencialidades e limitações identificadas na pesquisa

Aspecto	Descritor
Contexto do cenário	Potencialidade do uso dos cenários animados para contextualizar a investigação.
Ferramentas do GeoGebra	Recursos que facilitaram a realização de cálculos onerosos.
Fundo do cenário	Fundo carregado de informações que possivelmente prejudica a visualização.
Janelas de Visualização	Potencialidade de múltiplas representações. Particularidades de cada Janela na oferta de ferramentas e recursos para o usuário.
	Relação entre as Janelas do software feita de maneira implícita na construção.

Fonte: elaborado pela autora.

Não podemos afirmar com certeza de que o contexto da realização da tarefa e uso de cenários animados permitem superar todos os obstáculos epistemológicos com que o professor e os estudantes podem se deparar no processo de ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo, dado que o contexto da sala de aula, assim como a elaboração e uso dos cenários, é permeado de subjetividades. Entretanto, com base nas evidências apresentadas, podemos concluir que permitiu a promoção de um contexto para discutir e explorar o conceito de Limite de funções reais de uma variável real.

6 CONCLUSÕES

Neste capítulo, trazemos possíveis encaminhamentos futuros da pesquisa e nossas conclusões. Na seção 6.1, buscamos refletir sobre possíveis melhorias nas tarefas, ajustes que poderiam ter sido feitos e aspectos que poderiam ser modificados. Ressaltamos que se trata apenas de sugestões, que podem ser consideradas e utilizadas como complemento para o desenvolvimento posterior das tarefas e cenários apresentados nesta dissertação. Na seção 6.2, concluímos nossa pesquisa, resgatando os resultados obtidos.

6.1 Considerações para encaminhamentos futuros

Nesta subseção, buscamos refletir sobre possíveis melhorias nas tarefas, ajustes que poderiam ter sido feitos e aspectos que poderiam ser modificados. Ressaltamos que são apenas sugestões. Elas podem ser consideradas e utilizadas como complemento para o desenvolvimento posterior das tarefas e cenários apresentados nesta dissertação.

A análise abrange uma quantidade substancial de dados, totalizando aproximadamente trinta horas de gravações, que incluem as resoluções dos grupos, as discussões e sistematizações das aulas, as gravações da pesquisadora, além das tarefas e relatórios produzidos pelos estudantes. Ainda há possibilidades de aprofundamento na análise, considerando a discussão e a sistematização das tarefas, aspectos que não foram explorados nesta pesquisa.

Após o desenvolvimento das tarefas, diversas questões surgiram a partir das interações dos estudantes, como a utilização de estratégias distintas. Como exemplo, importa registrar o uso da progressão geométrica na Tarefa 2, dificuldades na elaboração de expressões e na investigação do comportamento das funções, além do emprego de recursos como calculadora e régua. Também observamos desafios, como o tempo reduzido para a resolução da tarefa. Essas situações podem ser incluídas no quadro de antecipação para complementar e enriquecer o material.

Na Tarefa 1, notamos que a ausência da especificação de um instante fixo para a investigação da velocidade instantânea dificultou a identificação de um padrão nos intervalos analisados. A intenção dessa abordagem era estimular a generalização, mas talvez essa etapa devesse ser introduzida apenas ao final, após uma análise inicial com intervalos específicos. A ausência dessa estrutura pode ter dificultado a percepção da aproximação dos intervalos da velocidade média para obtenção da velocidade instantânea. No entanto, não podemos afirmar

com certeza que essa modificação facilitaria essa associação por parte dos estudantes; trata-se apenas de uma sugestão para futuros ajustes e testes na tarefa.

No item b) da segunda questão, a maioria dos grupos não reduziu os intervalos, contrariamente ao previsto. Isso sugere a necessidade de reformulação da questão para enfatizar a importância da aproximação por intervalos menores. Além disso, nenhum grupo explicitou claramente suas estratégias, o que pode ter prejudicado a identificação de padrões na investigação da velocidade instantânea.

Seria mais eficiente considerar um único valor central para a investigação, como o número dois, variando apenas o tamanho dos intervalos. Isso evitaria a confusão observada entre os estudantes ao explorar diferentes intervalos, dificultando a identificação de padrões. Nas tabelas, uma opção seria adotar uma abordagem gradual, iniciando com uma casa decimal, depois duas, e assim por diante, facilitando a percepção dos padrões de aproximação.

No cenário animado *Velocímetro*, notamos que não houve uma associação clara das Janelas do software. O uso delas poderia ter sido associado de outra forma, e talvez reduzir o uso de imagens de fundo, que pode ter poluído a Janela de Visualização 1, algo citado pelo grupo A ao longo do desenvolvimento.

Especificamente na Tarefa 2, o principal agravante para a realização da tarefa como previsto foi o tempo. Uma sugestão que pode ser deixada é o desenvolvimento da tarefa em duas aulas, assim como na Tarefa 1. A finalização do cenário pode ser deixada para o final, contanto que haja tempo suficiente para que os estudantes explorem suas estratégias e ideias. Uma possibilidade para discussão seria elencar diferenças entre o processo de construção do cenário *Velocímetro*, que foi desenvolvido passo a passo com os estudantes, para o cenário animado *Flecha*, que deveria ser construído segundo as estratégias adotadas por cada grupo.

Para ampliar a discussão sobre os cenários animados, pode-se levantar a questão sobre a possibilidade de construção em outros softwares, considerando as diferenças que talvez surjam com essa mudança. Compreendemos, ainda, que o processo de construção de um cenário animado envolve muito mais do que simplesmente aprender matemática, pois o usuário mobiliza sua cognição ao transpor ideias presentes no papel ou em outras representações para a linguagem do software. Essa mudança do GeoGebra para outro software mudaria a forma como o indivíduo mobiliza sua cognição para pensar a construção do cenário? Esse aspecto pode ser aprofundado futuramente, partindo da análise dos três pilares da cognição distribuída, Distribuição da cognição entre membros de um grupo social, Coordenação entre estruturas internas e externas, e Distribuição ao longo do tempo, que podem ser identificados nas resoluções elaboradas pelos estudantes e apresentadas nesta dissertação.

De modo geral, essas sugestões serão implementadas em trabalhos futuros e publicadas em formato de artigos para divulgação entre a comunidade científica. Esperamos que elas possam ser ampliadas e discutidas, promovendo reflexões sobre o ensino de Cálculo e o uso de cenários animados.

6.2 Considerações finais

Esta pesquisa dedicou-se a investigar quais eram as potencialidades e limitações do uso de cenários animados aliados a tarefas de natureza exploratória para o ensino de Limites de funções reais. Iniciamos a pesquisa com uma revisão de literatura para compreender quais são as dificuldades mais comuns na aprendizagem de Limites na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A primeira etapa foi realizar a revisão de literatura, que nos permitiu acessar os trabalhos de Artigue (1995), Cornu (1981, 2002) e Sierpinska (1985, 1987), que propõem categorizações para os obstáculos epistemológicos na aprendizagem de Limite, e que compõem nosso quadro teórico.

Resumidamente, as dificuldades mais comuns no aprendizado de Limites que encontramos nas dissertações e teses brasileiras estão ligadas à complexidade dos conceitos básicos, à definição formal de Limite e às mudanças de pensamento que a disciplina exige. Muitos estudantes têm dificuldades com números reais, sequências e funções, que são essenciais para entender o conceito de Limite. Embora o curso de Cálculo não tenha como objetivo corrigir lacunas da Educação Básica, essas dificuldades acabam sendo grandes obstáculos para a aprendizagem.

Uma das principais barreiras está no entendimento dos conceitos anteriores ao Limite, como apontam Sierpinska (1985) e Cornu (1991). Dependendo da formação do estudante, esses desafios podem ser ainda maiores. Além disso, há dificuldades na interpretação da própria definição de Limite, especialmente por conta de termos como *tende para L* e *converge para L*, que podem gerar confusão.

Outra questão importante é a transição entre Álgebra e Geometria no Cálculo. Resolver problemas como limites infinitos e assíntotas exige um tipo de raciocínio mais abstrato e avançado. O excesso de interpretação geométrica também pode ser um obstáculo, já que a ideia de Limite moderna difere da visão puramente geométrica usada pelos gregos no método da Exaustão.

Compreender o infinito também não é simples. Sierpinska (1985) e Cornu (2002) destacam as dificuldades dos estudantes em lidar com quantidades infinitamente pequenas ou

grandes. Além disso, a própria ideia de Limite já foi, no passado, uma questão filosófica, o que mostra como sua compreensão exige uma mudança de paradigma. Também há dificuldades com a notação matemática do conceito, que foi formalizada mais tarde por Cauchy.

Ainda, os estudantes geralmente criam modelos próprios para interpretar os conceitos, e esses modelos nem sempre são corretos, mas fazem parte do aprendizado. Com o tempo, e conforme são usados nas aulas e nos estudos, eles vão sendo ajustados e ficando mais precisos, mesmo que ainda possam ser diferentes da formalização matemática.

Essa revisão de literatura não só ajudou a construir o quadro teórico do trabalho, como também foi essencial para o planejamento das aulas e a análise das tarefas e resoluções dos estudantes. No caso das atividades propostas, o software permitiu explorar a tarefa em um contexto que ofereceu ferramentas para a discussão e elaboração de estratégias, que foram discutidas pelos grupos, que reforçaram o aspecto colaborativo do desenvolvimento da tarefa. Isso está alinhado com a ideia de que a cognição é distribuída no ambiente em que o estudante está inserido, seja por meio das interações com seus colegas, seja pelo uso das ferramentas que auxiliam na resolução dos problemas.

A elaboração do quadro de antecipações, por sua vez, não surge no sentido de definir as ações dos estudantes, mas de tentar prever para conseguir conduzir as ações dos estudantes ao longo da aula, de modo a atingir o objetivo didático da tarefa. Reconhecemos que o processo de ensino é extremamente complexo, e o papel do professor, ao antecipar as ações dos estudantes, permite que o docente construa um ambiente favorável à aprendizagem. As tarefas desta pesquisa foram discutidas com orientadores e no grupo GEPTeMatE, mas ainda assim houve imprevistos não contemplados nos quadros de antecipação. Isso não representa uma fragilidade das tarefas, mas uma evidência da complexidade de elaborar tarefas para o ensino, ressaltando a necessidade de constante reestruturação e aprimoramento.

Por fim, como conclusão do nosso trabalho, reconhecemos a potencialidade do uso dos cenários animados para contextualizar a investigação, e das ferramentas disponibilizadas pelo software GeoGebra. No sentido das múltiplas possibilidades de construção e exploração que um cenário animado permite, oriundas das ferramentas do software, ressaltamos a importância de um quadro de antecipação detalhado para que o professor aproveite suas potencialidades e esteja preparado para eventuais dificuldades. No entanto, registros em vídeo sugerem, como limitação, um fundo carregado de informações que possivelmente prejudica a visualização, como relatado pelo grupo A ao longo da resolução da sua tarefa. Além disso, observou-se que os estudantes interagiram separadamente com os elementos do software, sem integrar diretamente a Janela de Visualização, a Planilha e a Janela de Álgebra.

As características específicas que apresentaram indícios que ajudaram a superar os obstáculos foram as múltiplas Janelas de Visualização, que oferecem acesso direto a diferentes representações do comportamento investigado, facilitando rupturas necessárias à construção do raciocínio dos estudantes, e o uso de ferramentas e Planilha para auxiliar nos procedimentos algébricos e aritméticos. Isso evita erros no cálculo das grandezas e reduz o tempo necessário para sua realização.

É importante afirmar, nesta pesquisa, que as potencialidades e limitações encontradas levam em consideração o contexto em que a investigação foi realizada. Entendemos que os cenários possuem uma variedade de alternativas para sua construção e elaboração, o que consideramos ser mais um potencial para o seu uso em sala de aula, visto que as ferramentas, comando e estratégias do usuário combinadas podem gerar um número muito alto de possibilidades e alternativas para discutir conteúdos de Matemática.

A pesquisa também permitiu que o conceito de cenário animado fosse discutido e ampliado, assim como seu processo de elaboração. Consideramos que um cenário animado não precisa representar fielmente um fenômeno ou simular a realidade, visto que seu principal objetivo é promover uma conjuntura que permita discutir conteúdos da Matemática em um dado contexto. Sua construção pode ser elaborada de formas distintas, com conteúdos envolvidos nesse processo, ou apenas conceitos intuitivos que podem ser abordados pela construção. Seu processo de construção pode ser iniciado de muitas formas e com diferentes propósitos, geralmente o professor é que fará essa seleção dos conteúdos a serem discutidos.

Um resultado que caminha ao lado do que pontua Artigue (1995), visto que a autora afirma que o trabalho com computadores e calculadoras gráficas poderia ser útil para amenizar as dificuldades na compreensão dos diferentes registros, é que reconhecemos que isso, de fato, ocorreu, e essa diferença pode ser destacada com as vantagens de tempo e cálculos que o software permitiu.

Em conclusão, compreendemos que os desafios no ensino de Limites vão muito além dos problemas citados pela nossa pesquisa. Por isso, consideramos fundamental promover a discussão e a continuidade de pesquisas sobre alternativas para o trabalho com esse conteúdo. Nosso objetivo não é responsabilizar o professor pelas dificuldades do ensino, mas destacar que ensinar não se resume a seguir um conjunto de etapas. Pelo contrário: buscamos apresentar estratégias que possam auxiliar no enfrentamento dos desafios em sala de aula. Além disso, é essencial reconhecer que o processo educacional faz parte de um contexto político e cultural, e que os professores precisam, antes de qualquer coisa, de condições dignas de trabalho, não devendo ser responsabilizados isoladamente pelos obstáculos enfrentados no ensino.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, R. D.; LOFTSGAARDEN, D. A special calculus survey: preliminary report. *In: STEEN, L. A. (Ed.). Calculus for a New Century: A Pump Not a Filter*, MAA Notes No. 8, Washington, DC, Mathematical Association of America, 1987, p. 215–216.
- ARAÚJO, M. M. **A construção do conceito de Limite através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2020.
- ARTIGUE, M. Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. *In: GUERSHON, H. The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. 1992. v. 25, p. 109-132.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1947-1996.
- BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999
- BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 43-58, 2020. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p43-58>
- BASNIAK, M. I.; CARNEIRO, E. B. A comunicação na construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 16, p. 1-22, 2021. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e80940>
- BATESON, G. Form, substance, and difference. *In: BATESON, G. Steps to an ecology of mind* (2d ed.). New York: Ballantine Books, 1972.
- BORUCH, I. G.; BASNIAK, M. I. Animações no GeoGebra e o Ensino de Matemática: uma experiência com alunos com altas habilidades/superdotação. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, [S. l.], n. Extraordin, p. 1–7, 2018. Disponível em: <https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/9028>. Acesso em: 19 set. 2024
- BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 7.2, p. 33-116, 1986.
- BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895
- BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I.; GARCÍA CUÉLLAR, D. J. Função afim e suas características abordadas por meio do cenário animado Abelha no GeoGebra. **PNA**, 2023a.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Cenários animados no GeoGebra e o estudo de funções por alunos com altas habilidades/superdotação. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 4, n. 1, p. 134–154, 2021. DOI: 10.30612/tangram.v4i1.12629. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12629>. Acesso em: 21 set. 2024.

BUENO, A.; BASNIAK, M. I.; CUÉLLAR, D. J. G. Cenário animado Abelha no GeoGebra e a dialética esquema-técnica. **Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 19, n. 68, 2023b.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática. Castelo de Vide. **Actas...** Portalegre: SPIEM, 2012, p. 255-266.

CARVALHO, H. A. **A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. **Perspectives on mathematics education: Papers submitted by members of the Bacomet Group**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1986. p. 243-307.

COLE, M.; ENGESTRÖM, Y. A cultural-historical approach to distributed cognition. **Distributed cognitions: Psychological and educational considerations**, p. 1-46, 1993.

COMINOTTI, S. M. **Práticas alternativas no ensino do componente curricular Cálculo Diferencial e Integral nas Engenharias: uma revisão integrativa da literatura**. Dissertação. Programa de Mestrado Profissional em Educação. Centro Universitário Adventista de São Paulo, 2020.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. **Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME**, 1981, p. 322-326.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1991. p. 153-166.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. p. 153-166.

COSTA NETO, A. D. **O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo 1 na Universidade: Entender e Intervir**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. (Org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: elaboração e perspectivas**. Londrina: Eduel, 2016. p. 19–32.

DANTAS, S. C.; MATUCHESKI, S. Resolução de um problema com o uso de diferentes ferramentas do GeoGebra. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 9, n. 1, p. 588-605, 2019.

DEWEY, J. **Experience and education**. 1938. Reprint. New York: Touch, 1963.

DUBINSKY, E.; TALL, D. Advanced mathematical thinking and the computer. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1991. p. 231-248.

ECKL, W. C. **Ensino do conceito de Limite: aplicação de UEPS para identificar indícios de aprendizagem significativa com estudantes de Ciências Contábeis**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2020.

EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. p. 140-152.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I.; PAULEK, C. M.; SCALDELAI, D.; FELIPE, N. A. Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo software GeoGebra. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 3, 2018.

GRABINER, J. V. Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. **The American Mathematical Monthly**, v. 90, n. 3, p. 185-194, 1983.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J.; KREIS, Y.; LAVICZA, Z. Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. ICME 11 Mexico 2008. **11th International Congress on Mathematical Education**. Resource document. <https://archive.geogebra.org/static/publications/2008-ICME-TSG16-Calculus-GeoGebra-Paper.pdf>.

HOHENWARTER, M.; JARVIS, D.; LAVICZA, Z. Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 16, n. 2, 2009.

HOLLAN, J.; HUTCHINS, E.; KIRSH, D. Distributed cognition: toward a new foundation for human-computer interaction research. **ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI)**, v. 7, n. 2, p. 174-196, 2000.

HUTCHINS, E. Distributed cognition. **International encyclopedia of the social and behavioral sciences**, v. 138, n. 1, p. 1-10, 2000.

GEOGEBRA. GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 21 set. 2024.

KOFTUN, C. M. **Movimentos associados a habilidades espaciais em construções de cenários animados no GeoGebra para a diferenciação de objetos da geometria plana e espacial**. Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual do Paraná, 2023.

LEONTIEV, A. N. **Atividade. Consciência. Personalidade**. Trad. de Priscila Marques. 1ª ed. Bauru, SP: Mireveja, 2021.

LIMA, G. L. A Implantação e o Desenvolvimento da Disciplina de Cálculo no Brasil: o modelo difundido pela USP. **Actas...** VII Congresso Iberoamericano de Etnomatemática - CIBEM, Montevideo, Uruguay.

LOPES, Alice Casimiro. Bachelard: o filósofo da desilusão. **Caderno brasileiro de ensino de Física**, v. 13, n. 3, p. 248-273, 1996.

MACHADO, N. J. **Noções de Cálculo**. Coleção Matemática por Assunto. Vol. 9. São Paulo: Editora Scipione. 1988.

MELLO, D. E.; VALLINI, S. A.; VIEIRA, V. D. As tecnologias digitais: Uma análise a partir da teoria da cognição distribuída. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, p. 0768-0780, 2022.

MENDES, I. A.; MORAES, M. S. F. Obstáculos epistemológicos sobre el concepto de límite de funciones en manuales de historia de matemáticas. **Paradigma**, v. 41, n. 1, p. 240-265, 2020.

MORAES, M. S. F. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2013.

MORAES, M. S. F. **Processos de superação dos obstáculos epistemológicos na história do conceito de Limite de função**: potencialidades conceituais e didáticas para a formação de professores de matemática. Doutorado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT, 2021.

MORAES, M. S. F.; MENDES, M. J. F. Obstáculos epistemológicos relativos ao conceito de Limite de função. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, São Paulo. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016.

MULLER, T. J. **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo**: uma proposta baseada em análise de erros. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

PADILHA DOS SANTOS, L.; BASNIAK, M. I. Construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação como atividade Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1–20, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n3a20

PASTERNAK, L. **The Passion of Creation**. [1892-1896]. Óleo sobre tela. Museu de Arte de Voronezh, Voronezh, Rússia. Disponível em: <https://www.theparisreview.org/blog/2019/03/13/a-poets-complaints-against-fiction/>. Acesso em: 14 maio 2025.

PONTE, J. P. Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 6, n. 21, 2010.

PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Unidef, 2014.

RAFAEL, Rosane Cordeiro. **Cálculo Diferencial e Integral**: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação. Tese de Doutorado. Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017.

REZENDE, W. M. **Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite**. Rio de Janeiro: IEMUSU, 1994.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROMERO ALBALADEJO, I. M.; GARCÍA LÓPEZ, M. M. Mathematical attitudes transformation when introducing GeoGebra in the secondary classroom. **Education and Information Technologies**, v. 29, n. 8, p. 10277-10302, 2024.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2013

SCHWARTZ, T. The structure of national cultures. **Understanding the USA: A cross-cultural perspective**, p. 110-149, 1989.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 6, n. 1, p. 5-67, 1985.

SIERPINSKA, A. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. **Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 4, p. 371-387, 1987.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

TALL, D. A sensible approach to the calculus. **El Cálculo y su Enseñanza**, v. 3, p. 81–128, 2012.

TALL, D. Students' difficulties in calculus. In: **Proceedings of Working Group**, p. 13–28, 1993.

TALL, D. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In: GROUWS, D. A. (org.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 495–511.

TALL, D. The three worlds of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 23, n. 3, p. 29–33, 2004.

TALL, D. The transition to formal thinking in mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 5–24, 2008.

VYGOTSKI, L. S. A formação social da mente. **Psicologia**, v. 153, p. V631, 1989.

ZEFERINO, M. V. C.; WROBEL, J. S.; CARNEIRO, T. C. J. Cálculo diferencial e integral no Enem: um mapa da produção científica na última década. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. **Anais...**, Brasília: SBEM, 2013

APÊNDICE A – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO - VELOCÍMETRO²⁸

Passo	Ação	Nome/Comando	Descrição
1	Inserir ponto	P	Ponto sobre a malha
2	Criar controle deslizante	Controle deslizante crescente só uma vez nome= t min=0, máx=5, incremento = 1	Controle deslizante t para representar o tempo
3	Modificar na Janela de Álgebra	$s(x)=Se(0 \leq x \leq t, x^3)$	Função deslocamento para mover a imagem
		Na função s: Configurações/Avançado	Habilitar visualização apenas na Janela de Visualização 2
		$P=(t,s(t))$	Ponto P
		No ponto P: Configurações/Avançado	Habilitar visualização apenas na Janela de Visualização 2
4	Inserir imagem	Selecionar imagem do carro	Inserir imagem ²⁹ do carro, definida pelos pontos A e B
5	Mudar na Janela de Álgebra/configurações	$A=(s(t),0)$ e $B=(x(A)-20,0)$	Mudança de coordenadas dos pontos da imagem
6	Criar controle deslizante	Controle deslizante nome= b min=0, máx=5, incremento=1	Controle deslizante b
7	Digitar na Caixa de Entrada	$d=0.1^b$	incremento das casas decimais
8		Objeto associado: b	Casas decimais
9	Incremento do controle t	Incremento do controle deslizante	alterar para d
10	Planilha	Habilitar Planilha	Habilitar Planilha para plotagem dos valores do ponto P
11	Janela de Álgebra	No ponto P: Gravar valores na planilha	
12	Botão	Apagar[A2:A900] Apagar[B2:B900]	Botão para apagar Planilha
13	Digitar na Caixa de Entrada	$a: -5 \leq y \leq 5$	
		$c: 20 < y < 40 \wedge -30 < x < 50$	gramado
		$f: -30 < x < 50 \wedge 20 < y < 60$	céu
		$a: -5 \leq y \leq 5 \wedge -30 < x < 50$	estrada
14	Criar segmento	Segmento estilo Pontilhado	Segmento para representar as faixas na estrada
15	Botão	IniciarAnimação[t,false]	Botão intitulado <i>Parar</i>
		IniciarAnimação[t,true]	Botão intitulado <i>Iniciar</i>
		IniciarAnimação[t,false] DefinirValor[t,0]	Botão intitulado <i>Voltar</i>
16	Inserir imagens	Inserir imagens da paisagem	

²⁸ Link da construção finalizada: <https://www.geogebra.org/classic/fp6c7hmt>

²⁹ link para imagens: <https://acesse.one/WZJ0R>

APÊNDICE B – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO - FLECHA³⁰

Passo	Ação	Nome/Comando	Descrição
1	Inserir imagens	Alvo	Imagem ³¹ definida pelos pontos A e B.
		Arqueiro	Imagem definida pelos pontos E e F.
		Flecha	Imagem definida pelos pontos C e D.
2	Criar controle deslizante	creciente só uma vez nome=a min=0 máx=40 incremento =	Controle deslizante para o trajeto.
3	Digitar na Caixa de Entrada	$b = \text{Soma}(\frac{40}{2i}, i, 0, a) - 4$	Distância percorrida pela flecha
4	Alterar coordenadas dos pontos C e D	$C=(b,8), D=(b-2,6.1)$	Valores sugeridos para os pontos da flecha.
5	Criar botão	IniciarAnimação[a,true] DefinirValor[a=0]	Botão intitulado <i>Atirar</i>
		IniciarAnimação[a,false] DefinirValor[a=0]	Botão intitulado <i>Voltar</i>
6	Desigualdade	$C: 15 \leq y \leq 5 \wedge 8 \leq x \leq 50$	Gramado
7	Inserir imagens da paisagem	Inserir elementos da paisagem	

³⁰ Link para a construção finalizada: <https://www.geogebra.org/classic/bna9mpjk>

³¹ Link para imagens:

APÊNDICE C – TAREFA 1 – CENÁRIO VELOCÍMETRO³²

Nome: _____ e-mail: _____
Nome: _____ e-mail: _____
Nome: _____ e-mail: _____
Nome: _____ e-mail: _____

A posição de um carro em movimento varia com o tempo, sendo $s(t)$ sua posição em cada instante t . A velocidade média é calculada pela razão entre a variação das posições e o intervalo de tempo: $v(t, t_1) = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$. Gostaríamos de investigar a velocidade instantânea em um momento específico t_1 . Para isso, abra seu arquivo no GeoGebra ou pelo link disponibilizado e descreva seu processo de investigação, detalhando as estratégias e procedimentos utilizados para responder às questões.

1. Qual a velocidade média do carro no trajeto?

2. Determine a velocidade média:
 - a. Entre $1 \leq t_1 \leq 3$.
 - b. Em pelo menos dois intervalos diferentes daquele do item (a).

3. As velocidades médias da questão 2 diferem da velocidade média da questão 1? Porquê?

³² <https://www.geogebra.org/classic/fp6c7hmt>

4. Determine:

- Intervalos $[2, t]$ e $[t, 2]$ com t próximo de 2, utilizando uma, duas ou três casas decimais.
- A velocidade média $v_m(t, 2)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
2		
2		
2		
2		
t	t_1	
	2	
	2	
	2	
	2	

- Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de $t_1 \neq 2$, utilizando uma, duas ou três casas decimais.
- A velocidade média $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
t	t_1	

- e. Intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para qualquer valor de t_1 diferente dos escolhidos nos itens (a) e (c).
- f. As velocidades médias $v_m(t, t_1)$ em cada um dos intervalos escolhidos.

t_1	t	velocidade média
t	t_1	

5. O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?

APÊNDICE D - ANTECIPAÇÕES

Questão 1: Qual a velocidade média do carro no trajeto?	
Objetivo: Determinar a velocidade média no trajeto todo levando em consideração o deslocamento total ao longo de todo intervalo de tempo.	
Ações do estudante	Ações do professor
Habilitar a malha e os eixos	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar sobre a precisão dos dados coletados. - Perguntar sobre como obter o deslocamento a partir da cena animada. - Perguntar do que depende o movimento do carro. - O que cada botão interfere na cena (posição final/inicial).
Habilitar a Planilha	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar o que são os valores que aparecem na planilha. - Perguntar qual a relação entre os dois valores. - Perguntar por que esses valores aparecem.
Habilitar a Janela de Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar quais são as informações buscadas. - O que são os objetos visíveis na Janela de Álgebra. - Qual deles podem oferecer informações úteis para obter a velocidade média
Habilitar a Janela de visualização 2	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar quais informações a função oferece para obter a velocidade média.
Não entender a pergunta Calcular a posição	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar o que é o deslocamento. - Questionar o que é a média de algo. - Perguntar o que é a velocidade média de um carro. - Pedir para que identifiquem no cenário posição inicial e final do carro. - Perguntar qual foi o tempo total decorrido da saída. - Perguntar do que depende o movimento do carro. - O que cada botão interfere na cena (posição final/inicial).
Questão 2: a) Determinar a velocidade média entre $1 \leq t_1 \leq 3$.	
Objetivo: Perceber que a escolha de intervalos diferentes altera o valor da velocidade média do carro	
Ações do estudante	Ações do professor
Calcular somente a posição do carro	<ul style="list-style-type: none"> - Questiona se existe alguma variação no cenário - Perguntar o que significa a posição em um dado t. - Pedir para diferenciar "deslocamento" de "posição". - Perguntar qual foi o deslocamento entre os instantes.
Não entender a pergunta ou calcular a velocidade em um intervalo diferente	<ul style="list-style-type: none"> - Pedir para identificar quais são os respectivos valores da posição $s(1)$ e $s(3)$. - Perguntar o que é o deslocamento. - Questionar o que é a média de algo. - Perguntar o que é a velocidade média de um carro. - Pedir para que identifiquem no cenário posição inicial e final do carro. - Perguntar qual foi o tempo total decorrido da saída. - Perguntar do que depende o movimento do carro. - O que cada botão interfere na cena (posição final/inicial).
Questão 2: b) Em pelo menos dois intervalos diferentes do item a)	
Objetivo: Identificar dois intervalos de deslocamento diferentes do item a)	
Ações do estudante	Ações do professor
Confundir t_1 e t	<ul style="list-style-type: none"> - Verificar se o aluno usou $v_m(t, t_1) = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ em vez de $v_m(t, t_1) = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$, resultando em valores de velocidade com o sinal invertido.

Questão 3: As velocidades médias da questão 2 diferem da velocidade média da questão 1? Por quê?	
Objetivo: Perceber que a velocidade média depende do intervalo t escolhido	
Ações do estudante	Ações do professor
Afirmar que não muda	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar por que não varia. - Questionar quais foram os valores obtidos. - Verificar quais foram os intervalos escolhidos - Pedir para comparar as velocidades médias calculadas anteriormente. - Solicitar que analisem a variação da função $s(t)$ dentro dos intervalos.
Afirmar que muda	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar quanto muda. - Perguntar se as diferenças são significativas. - Questionar por que os valores diferem. - Pedir para comparar as velocidades médias calculadas anteriormente.
Questão 4: Determine intervalos $[t, t_1]$ e $[t_1, t]$ para $t = 2$. Determine V_m em cada um dos intervalos escolhidos.	
Objetivo: Perceber que a escolha de valores em um intervalo pequeno em torno de $t = 2$ permite obter um valor mais próximo da velocidade nesse instante.	
Ações do estudante	Ações do professor
Escolher intervalos muito grandes	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar a escolha de intervalos grandes. - Questionar a respeito da diferença já calculada em intervalos maiores e menores nas questões anteriores. - Perguntar se faz sentido calcular para intervalos cada vez menores. - Questionar sobre a escolha de valores mais próximos de 2. - Questionar o quão próximo de 2 podemos chegar.
Confundir t_1 e t	<ul style="list-style-type: none"> - Verificar se o aluno usou $v_m(t, t_1) = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ em vez de $v_m(t, t_1) = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$, resultando em valores de velocidade com o sinal invertido. - Perguntar se faz sentido obter uma média negativa.
Escolher valores errados para t e t_1	<ul style="list-style-type: none"> - Verificar se houve a escolha de um t_1 diferente do valor fixo que deveria ser usado, como $t_1 = 1$ em vez de $t_1 = 2$.
Usar o mesmo valor para t e t_1	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar a escolha dos valores. - Perguntar sobre a divisão por zero. - Questionar se é uma interpretação correta da velocidade média.
Questão 4: itens (c) à (f).	
Objetivo: Perceber que o processo de restringir um intervalo tão pequeno quanto se queira permite obter uma aproximação satisfatória para a velocidade média no instante investigado.	
Ações do estudante	Ações do professor
Selecionar valores aleatórios	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar se existe alguma regularidade. - Questionar o que está acontecendo com o valor da velocidade média. - Perguntar se os valores aleatórios de t podem ser organizados.
Não perceber nenhuma regularidade	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar se é possível organizar os valores de t. - Incentivar a escolha de intervalos cada vez menores. - Pedir para comparar com os intervalos maiores calculados anteriormente.
Questão 5: O que ocorre quando t se aproxima do valor escolhido de t_1 ? O que é possível concluir a respeito da velocidade média entre esses dois valores em relação à velocidade instantânea em t_1 ?	
Objetivo: Concluir que considerar intervalos tão pequenos quanto se queira para calcular a velocidade média, permite obter uma aproximação satisfatória para a velocidade instantânea em um dado valor entre esses dois intervalos.	

Ações do estudante	Ações do professor
Não concluir nada	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar o que ocorre quando os intervalos $[t_1, t]$ e $[t, t_1]$ diminuem progressivamente. - Perguntar se esse comportamento seria igual para qualquer função $s(t)$. - Questionar como podemos é possível obter uma aproximação satisfatória da velocidade instantânea em t_1 a partir da velocidade média.
Concluir que $v_m(t)$ se aproxima de $v(t)$	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar quais são as condições para que essa aproximação seja satisfatória. - Perguntar se esse comportamento seria igual para qualquer função $s(t)$.

APÊNDICE E - TAREFA 2 – CENÁRIO *FLECHA*³³

Nome: _____ e-mail: _____

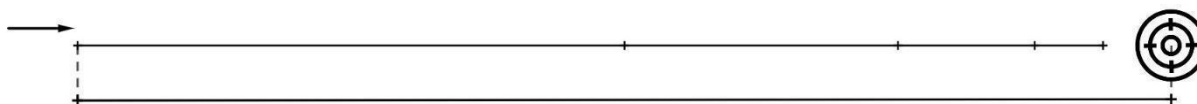
Nome: _____ e-mail: _____

Nome: _____ e-mail: _____

Nome: _____ e-mail: _____

Vamos analisar um famoso paradoxo proposto por Zenão de Eleia: o paradoxo da flecha. Imagine um arqueiro lançando uma flecha em direção a um alvo. Zenão argumenta que, para a flecha atingir o alvo, ela precisa passar por infinitos pontos ao longo do caminho.

Nesse sentido, vamos dividir o caminho da flecha em etapas: na primeira, ela percorre metade da distância; na segunda, metade da metade restante, e assim por diante. Considerando essa divisão, vamos investigar se a flecha realmente consegue atingir o alvo, assumindo a existência desses infinitos pontos ao longo do trajeto.



1. Complete no diagrama a 3^a, 4^a e 5^a etapa.
2. Determine a distância:
 - a. Entre o alvo e o arqueiro.
 - b. Correspondente a 1^a etapa do percurso.
 - c. Correspondente a 2^a etapa do percurso. (d) Correspondente a 5^a etapa do percurso.
3. Como calcular a distância percorrida pela flecha na n -ésima etapa?
4. Como calcular a distância percorrida pela flecha após n etapas?
5. O que podemos concluir sobre a soma dessas divisões e a distância total que a flecha percorre a medida que o número de etapas aumenta?
6. De acordo com o raciocínio de Zenão, a flecha atinge seu alvo? Por quê?
7. A partir das suas resoluções, finalize o cenário.

³³ <https://www.geogebra.org/classic/mjxe8zsn>

APÊNDICE F - ANTECIPAÇÕES

Questão 1: Complete no diagrama a 3ª, 4ª e 5ª etapa.	
Objetivo: Verificar se o estudante compreendeu o padrão de divisão presente nas etapas.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Pedir para que o estudante descreva o processo de divisão apresentado pelo enunciado.
Realizar a divisão de forma incorreta	- Verificar como o aluno realizou a representação. - Questionar o que o enunciado esta descrevendo. - Perguntar o que é a metade da metade de algo;
Questão 2: Determine a distância: item a), b), c) e d)	
Objetivo: Compreender o padrão da divisão do trajeto e induzir a ideia de divisões sucessivas. Investigar para casos conhecidos de n etapas.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Explicar que queremos saber a distância percorrida pela flecha em cada etapa. - Perguntar qual o padrão de divisão descrito pelo enunciado. - Perguntar qual o resultado dessa 1ª, 2ª divisão...
Não identificar a distância	- Questionar sobre como obter a distância entre objetos no cenário. - Sugerir habilitar os eixos ou a ferramenta <i>medir distância</i> .
Questão 3: Como calcular a distância percorrida pela flecha na n -ésima etapa?	
Objetivo: Identificar a distância percorrida na n -ésima divisão $\frac{40}{2^n}$	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Explicar que estamos interessados em saber calcular a distância percorrida pela flecha em uma etapa específica qualquer. - Retomar as etapas anteriores. - Questionar o padrão identificado.
Expressão algébrica incorreta	- Pedir para escrever as expressões numéricas próximas de modo a permitir comparação. - Questionar o que muda e o que permanece constante.
Questão 4: Como calcular a distância percorrida pela flecha após n etapas?	
Objetivo: Chegar na soma das distâncias percorridas em cada etapa semelhante a $40 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Explicar que gostaríamos da soma das distâncias de todas as etapas, a distância total percorrida pela flecha.
Confundir com a questão anterior	- Chamar a atenção para as diferenças dos enunciados.
Não conseguir responder	- Pedir para adicionar as etapas conhecidas. - Questionar qual o padrão presente na soma. Perguntar quais valores variam e quais são constantes.
Questão 5: O que podemos concluir sobre a soma dessas divisões e a distância total que a flecha percorre a medida que o número de etapas aumenta?	
Objetivo: Chegar à conclusão de que $\lim_{n \rightarrow \infty} 40 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ é igual a 40.	
Ações do estudante	Ações do professor
Não entender a pergunta	- Pedir para que o estudante analise o que ocorre quando o número de etapas aumenta. - Solicitar que realize a soma para etapas maiores.

	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar o que ocorre se for a etapa 500, 10000, 1000000... - Perguntar qual valor estamos nos aproximando. - Perguntar se esse comportamento de selecionar valores cada vez maiores, será suficiente em algum momento.
Dizer que cresce infinitamente	<ul style="list-style-type: none"> - Perguntar o que é crescer infinitamente. - Questionar o que é o infinito. - Perguntar se é possível alcançar o infinito.
Questão 6: De acordo com o raciocínio de Zenão, a flecha atinge seu alvo? Por quê?	
Objetivo: Formalizar que, no contexto do paradoxo, mesmo com n tendendo para infinito, a flecha não alcança o alvo.	
Ações do estudante	Ações do professor
Dizer que sim, sem explicar	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar por que alcança. - Perguntar em qual contexto, se na realidade ou no paradoxo. Perguntar se a soma dos valores das etapas é 40 de fato.
Dizer que não, sem explicar	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar por que não alcança. - Perguntar em qual contexto, se na realidade ou no paradoxo. - Perguntar se a soma dos valores das etapas é 40. Questionar se o limite é igual a soma dos valores das etapas.
Questão 7: A partir das suas resoluções, finalize o cenário.	
Objetivo: Elaborar ao menos uma estratégia para a finalização do cenário animado para representar o comportamento investigado.	
Ações do estudante	Ações do professor
Associar o controle deslizante	<ul style="list-style-type: none"> - Questionar o que o controle deslizante representa. - Perguntar quais os objetos estariam associados ao controle.

ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MAIORES DE 18 ANOS

Prezado(a),

Solicitamos sua autorização para a participação na pesquisa intitulada: O ensino de Limite por meio da construção de cenários animados no GeoGebra, que faz parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, sob a responsabilidade da Prof^a Dra. Maria Ivete Basniak da Universidade Estadual do Paraná. O objetivo da pesquisa é estudar como a construção de cenários animados podem favorecer o ensino e a aprendizagem de Limite no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral.

O presente projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa - CEP UNESPAR.

1. **PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA:** A sua participação é muito importante, e ela se dará da seguinte forma: realizando construções de cenários animados com o uso de tecnologia, realização de tarefas e produção de relatórios. As telas dos computadores serão áudio e videogravadas e a sala onde estiverem também. Esses dados serão analisados a fim de compreender como a realização desse tipo de tarefa pode favorecer o ensino e aprendizagem de Matemática. O seu nome não será citado.

Lembramos que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a autorizar tal participação, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa.

2. **RISCOS E DESCONFORTOS:** Informamos que poderão ocorrer os riscos/desconfortos no sentido de se sentir incomodado com as gravações realizadas. Podendo solicitar que o equipamento seja desligado.

BENEFÍCIOS: Os benefícios esperados são contribuir para que a aprendizagem da Matemática aconteça de forma mais dinâmica e prazerosa.

3. **CONFIDENCIALIDADE:** As informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade, cujos registros gravados permanecerão sob posse do pesquisador e poderão ser por você solicitados a qualquer momento.

Além disso, os dados a serem coletados só poderão ser utilizados para fins de publicações científicas, num período de até 10 anos, contados a partir do ano de 2024. Após este período os dados serão descartados.

4. **SEGURANÇA:** Foi informado de que será assegurada, bem como sobre a garantia do livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que queira saber antes, durante e depois da participação.

5. **ESCLARECIMENTOS:** Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UNESPAR, cujo contato consta deste documento.

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador responsável, conforme o endereço abaixo:

Nome: Maria Ivete Basniak

Endereço: Rua Professora Amazília, 713, apartamento 303, União da Vitória, PR

Telefone: (42) 991038917

Email: basniak2000@yahoo.com.br

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (CEP) envolvendo Seres Humanos da UNESPAR, pelo telefone (44)3482-3212, ou pelo email cep@unespar.edu.br.

DESPESAS: Caso você aceite participar da pesquisa, não haverá qualquer despesa decorrente da participação na pesquisa.

6. **PREENCHIMENTO DO TERMO:** Este termo deverá ser preenchido pelo pesquisador e por você. Além da assinatura nos campos específicos solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito de forma a garantir o acesso ao documento completo.

TERMO 1

Eu _____ (nome por extenso),
declaro que recebi todas as explicações sobre esta pesquisa coordenada pela Professora Maria
Ivete Basniak e concordo em participar.

Cidade, _____ de _____ de _____.

Assinatura do participante ou impressão datiloscópica

TERMO 2

Eu _____ (nome do
pesquisador ou do membro da equipe que aplicou o TCLE), declaro que forneci todas as
informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

Cidade, _____ de _____ de _____.

Assinatura do Pesquisador

ANEXO B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MENORES DE 18 ANOS

Prezado(a),

Solicitamos sua autorização para a participação de seu filho(a) na pesquisa intitulada: A construção de cenários animados no software GeoGebra por alunos do Ensino Fundamental, que faz parte do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, sob a responsabilidade da Prof^a Dra. Maria Ivete Basniak da Universidade Estadual do Paraná. O objetivo da pesquisa é estudar como a construção de cenários animados podem favorecer o ensino e a aprendizagem de Limite no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral.

O presente projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa - CEP UNESPAR.

1. **PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA:** A participação de seu filho(a) é muito importante, e ela se dará da seguinte forma: realizando construções de cenários animados com o uso de tecnologia. As telas dos computadores serão áudio e videogravadas e a sala onde os alunos estiverem também. Esses dados serão analisados a fim de compreender como a realização desse tipo de tarefa pode favorecer o ensino e aprendizagem de Matemática. O nome de seu(sua) filho(a) não será citado.

Lembramos que a participação de seu filho(a) é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a autorizar tal participação, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa ou ao seu filho.

2. **RISCOS E DESCONFORTOS:** Informamos que poderão ocorrer os riscos/desconfortos no sentido de seu(sua) filho(a) sentir-se incomodado com as gravações realizadas. Podendo solicitar que o equipamento seja desligado.

3. **BENEFÍCIOS:** Os benefícios esperados são contribuir para que a aprendizagem da Matemática aconteça de forma mais dinâmica e prazerosa.

4. **CONFIDENCIALIDADE:** As informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade, sua e a de seu(sua) filho(a), cujos registros gravados permanecerão sob posse do pesquisador e poderão ser por você solicitados a qualquer momento.

Além disso, os dados a serem coletados só poderão ser utilizados para fins de publicações científicas, num período de até 10 anos, contados a partir do ano de 2022. Após este período os dados serão descartados.

5. **SEGURANÇA:** Foi informado de que será assegurada, bem como sobre a garantia do livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que queira saber antes, durante e depois da participação.

6. **ESCLARECIMENTOS:** Caso você tenha mais dúvidas ou necessite maiores esclarecimentos, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UNESPAR, cujo contato consta deste documento.

Qualquer dúvida com relação à pesquisa poderá ser esclarecida com o pesquisador responsável, conforme o endereço abaixo:

Nome: Maria Ivete Basniak

Endereço: Rua Professora Amazília, 713, apartamento 303, União da Vitória, PR

Telefone: (42) 991038917

Email: basniak2000@yahoo.com.br

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (CEP) envolvendo Seres Humanos da UNESPAR, pelo telefone (44)3482-3212, ou pelo email cep@unespar.edu.br.

7. **DESPESAS:** Caso o(a) seu filho(a) aceite participar da pesquisa, não haverá qualquer despesa decorrente da participação na pesquisa.

8. **PREENCHIMENTO DO TERMO:** Este termo deverá ser preenchido pelo pesquisador, pelo aluno participante e por você, responsável pelo aluno. Além da assinatura nos campos específicos solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito de forma a garantir o acesso ao documento completo.

TERMO 1

Eu _____ (nome por extenso do responsável pelo aluno menor de idade), declaro que fui devidamente esclarecido e autorizo a participação do meu(minha) filho(a) na pesquisa coordenada pela Professora Maria Ivete Basniak.

, _____ de _____ de _____.

Assinatura do responsável pelo aluno ou impressão datiloscópica

TERMO 2

Campo para assentimento do sujeito menor de pesquisa (para crianças escolares e adolescentes com capacidade de leitura e compreensão):

Eu _____ (nome por extenso do aluno que irá participar da pesquisa /menor de idade), declaro que recebi todas as explicações sobre esta pesquisa e concordo em participar da mesma, desde que meu pai/mãe (responsável) concorde com esta participação.

, _____ de _____ de _____.

Assinatura do aluno ou impressão datiloscópica

TERMO 3

Eu _____ (nome do pesquisador ou do membro da equipe que aplicou o TCLE), declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

, _____ de _____ de _____.

Assinatura do Pesquisador