

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR**

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

**ENSINO DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DE  
MEDIÇÃO: IMPLICAÇÕES NO PROCESSO DE  
ENSINO E DE APRENDIZAGEM**

**Margaret Charnei**

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática  
PRPGEM**

União da Vitória,  
2021



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

ENSINO DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: IMPLICAÇÕES NO  
PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Margaret Charnei

Orientadora:  
Maria Ivete Basniak

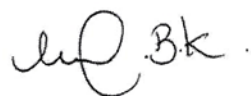
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Tecnologia, diversidade e cultura em educação matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

União da Vitória  
Abril, 2022

Margaret Charnei

ENSINO DE FRAÇÕES NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: IMPLICAÇÕES NO  
PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Comissão Examinadora:



Dra. Maria Ivete Basniak – Presidente da Comissão Examinadora  
Universidade Estadual do Paraná



Dra. Nilce Fatima Scheffer - Membro da Banca  
Universidade Federal da Fronteira Sul



Dra. Regina Maria Pavanello - Membro da Banca  
Universidade Estadual do Paraná

Resultado: Aprovada

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Charnei, Margaret

Ensino de frações na perspectiva de medição:  
implicações no processo de ensino e de aprendizagem  
/ Margaret Charnei. -- União da Vitória-PR, 2022.  
122 f.: il.

Orientador: Maria Ivete Basniak.  
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) --  
Universidade Estadual do Paraná, 2022.

1. Matemática-estudo ensino. 2. Medidas. 3.  
Barras Cuisenaire. I - Basniak, Maria Ivete  
(orient). II - Título.

*Dedico este trabalho aos meus filhos, Eduarda e Gustavo, e ao meu amor, Renato, que estão sempre comigo, me apoiando incondicionalmente. Amo vocês.*

## AGRADECIMENTOS

*Algumas vezes coisas tristes acontecem em nossas vidas para nos colocar na direção de coisas melhores. E desta maneira, em um dos momentos mais difíceis da minha vida, decidi que era o momento de secar as lágrimas e me dedicar a um projeto antigo deixado para trás: cursar um mestrado. Não foi um caminho fácil, mas trouxe muito aprendizado e alegria. Esta dissertação é resultado de um caminho que foi trilhado devido ao apoio e ao desprendimento de diversas pessoas. A elas, toda a minha gratidão.*

*Aos meus filhos, Eduarda e Gustavo, que foram meus maiores apoiadores e incentivadores nesse período tão tumultuado, obrigada por entenderem a minha ausência, por não me deixarem desistir, e por todos os bilhetinhos carinhosos. Vocês me fazem querer sempre ser uma pessoa melhor. Amo vocês mais que tudo nesta vida.*

*Ao meu amor, Renato, que sempre me apoiou, torceu e acreditou em mim. Você foi o primeiro a me ajudar nessa trajetória e ficou ao meu lado em todos os momentos. Obrigada por toda a ajuda com os textos, e por sempre me ouvir e acalmar meu coração nos momentos de angústia. Te amo.*

*À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Ivete Basniak, pela paciência (muita paciência), orientação, carinho, apoio e incentivo. Te admiro por ser essa pessoa maravilhosa, humilde e solidária; e pela profissional competente e apaixonada pelo que faz, que me inspira a ser sempre melhor no que sou e no que faço. Obrigada por “me escolher” e por acreditar em mim. Conte comigo sempre.*

*Ao Prof. Dr. Everton José Goldoni Estevam, pelo olhar atento, o criticar cuidadoso e o apoio com o projeto e no grupo de pesquisa. Seus “pitacos” fizeram muita diferença no meu trabalho. Sou sua fã.*

*Aos membros da banca examinadora, Profa. Dra. Nilce Fátima Scheffer e Profa. Dra. Regina Maria Pavanello, que tão gentilmente aceitaram participar e colaborar com esta dissertação.*

*A minha irmã do coração, Noidicélia, pelo apoio, incentivo e amizade.*

*A minha comadre e amiga Andréia Martins, pelo apoio, incentivo e por sempre torcer por mim.*

*A Vânia Sara Doneda de Oliveira, por tornar possível a pesquisa e sempre me ajudar prontamente. Serei eternamente grata a você. Obrigada por ser esse “ser de luz” que apareceu na minha vida. Te admiro muito.*

*A todos os amigos e colegas do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTeMatE, que colaboraram com esta pesquisa por meio de leitura e discussão dos artigos.*

*Aos meus amigos e colegas do Colégio Estadual Professor Pedro Carli, por sempre me ouvirem, incentivarem e apoiarem.*

*Aos professores, colegas e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná, que contribuíram com a minha formação.*

*Aos meus familiares, pai, mãe, irmãos e cunhada pelo apoio.*

*A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.*

## RESUMO

É de consenso entre os professores dos diversos níveis de ensino que há grandes dificuldades relacionadas ao ensino e a aprendizagem dos conteúdos de matemática, dentre os quais chamam a atenção as lacunas deixadas em relação ao aprendizado dos números fracionários. Neste contexto, este estudo objetiva investigar potencialidades e dificuldades da aprendizagem de frações baseada na perspectiva de medição, relacionada a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental que já estudaram formalmente fração na perspectiva da partição, com o significado parte-todo. Para responder à questão geral do estudo, foi assumida a perspectiva qualitativa de pesquisa de cunho interpretativo. O quadro teórico evidenciou que, para a compreensão efetiva dos Números Racionais, é necessário que os alunos tenham oportunidade de estudar os diferentes significados de frações, entre eles medida, parte-todo, quociente, razão e operador, que devem ser ensinados ao longo da vida escolar, e sugerem que o início do ensino de frações seja com o significado medida. Esta interpretação coincide com a gênese histórica das frações, que emerge da necessidade de medir quantidades contínuas, sendo imprescindível estabelecer uma unidade de medida para realizar comparações multiplicativas, e a equivalência de frações é fundamentada na magnitude numérica. No entanto, de maneira geral, a predominância no ensino de frações é a visão da partição, que privilegia o significado parte-todo. Este significado tende a conduzir os estudantes ao erro, podendo levá-los a compreender que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais, ocasionando confusão com os procedimentos aritméticos de fração, o que prejudica a aprendizagem de Álgebra e demais conteúdos matemáticos. Os dados empíricos utilizados na análise são provenientes de vídeos e transcrições de gravações de aulas desenvolvidas no modelo do Ensino Remoto de Emergência em uma escola pública estadual do interior do Paraná, com 22 alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Esses dados foram complementados pelos registros dos alunos, incluindo fotos do caderno das resoluções das tarefas e da sistematização das aprendizagens matemáticas, além de arquivos de textos enviados pela plataforma Google Classroom. O modelo educacional para o processo de análise foi o denominado Modelo 4A-Instrucional, que consiste em quatro fases de implementação de uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos utilizando barras Cuisenaire; e o quadro de diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários. As análises dos dados revelaram que, inicialmente, os alunos não reconheciam a magnitude numérica dos números fracionários porque utilizavam as propriedades dos números naturais ao comparar e operar com números fracionários, e assim apresentavam dificuldade em representar os números fracionários de maneira simbólica, não reconhecendo, inclusive, que um número fracionário de mesma magnitude possui infinitas representações. Por outro lado, ao manipular, observar e comparar as barras Cuisenaire, os estudantes perceberam as relações entre elas ao realizarem as tarefas, e construíram ideias matemáticas relacionadas às frações. Desta forma, os alunos compreenderam a diferença da magnitude dos números naturais para os fracionários, reconhecendo as frações equivalentes e operando corretamente com números fracionários. Além disso, entenderam que cometiam erros ao operar com frações por utilizarem propriedades dos números naturais. Adicionalmente, foram introduzidos à linguagem algébrica sem gerar qualquer carga cognitiva. Com base nestes estudos, a conclusão é que o ensino de frações na perspectiva da medição utilizando as barras Cuisenaire, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo medidas pela mesma unidade, apresenta-se como alternativa ontológica para

superar a insuficiência da perspectiva dominante parte-todo, favorecendo o entendimento conceitual das frações.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Números Racionais. Medida. Barras Cuisenaire.

## ABSTRACT

It is a consensus amongst teachers of different education levels that there is great difficulty related to the mathematical contents teaching and learning, among which the gaps left regarding fractional numbers learning draws attention. In this context, this study aims at investigating potentialities and difficulties of learning fractions based on the measurement perspective, related to Elementary School 6<sup>th</sup> grade students who have already formally studied fractions from the partition perspective, with the part-whole meaning. To answer the main question of the study, the qualitative perspective of interpretive research was adopted. Theoretical framework showed that for Rational Numbers an effective understanding, students must have the opportunity to study the different meanings of fractions, among them measure, part-whole, quotient, ratio and operator, which must be taught throughout school life, and suggest that the beginning of fractions teaching should start with the measure meaning. This interpretation coincides with the fractions' historical genesis, which emerges from the need to measure continuous quantities, and it is essential to establish a measurement unit to make multiplicative comparisons, and the equivalence of fractions is based on numerical magnitude. However, at large, predominance in fractions teaching is the view of partition that privileges the part-whole meaning. This meaning tends to lead students to error and may lead them to understand that rational numbers set is an extension of the natural numbers set, causing confusion with the arithmetic procedures of fractions, impairing the learning of algebra and other mathematical content. Empirical data used for analysis come from videos and transcriptions of recordings of lessons developed in the Emergency Remote Teaching model in a state public school in State of Paraná countryside with 22 students at elementary school 6<sup>th</sup> grade. These data were supplemented by the students' records, including photos of the task resolutions notebook and systematization of mathematics learning, and text files sent through the Google Classroom platform as well. Educational model for the analysis process was the so-called 4A-Instructional Model, which consists of implementation four stages of a pedagogical approach, the subordination of mathematics teaching to student learning, using Cuisenaire rods, and the difference table of the properties of natural numbers and fractional numbers. Data analyses revealed that initially the students have not recognized the numerical magnitude of fractional numbers, because they used the properties of natural numbers when comparing and operating with fractional numbers and then they present difficulty to represent fractional numbers in a symbolic way, not even recognizing that a fractional number of the same magnitude has infinite representations. On the other hand, by manipulating, observing, and comparing the Cuisenaire rods, they realized the relationships among them when performing the tasks and built mathematical ideas regarding fractions. Thereby, the students understood the difference in magnitude from natural to fractional numbers, recognizing equivalent fractions and operating correctly with fractional numbers. Furthermore, they understood they made mistakes when operating with fractions because they used properties of natural numbers. Additionally, they were introduced to the algebraic language without generating any cognitive load. Based on these studies, the conclusion is teaching fractions from the measurement perspective using the Cuisenaire rods, in which a fraction is a multiplicative comparison between two quantities of the same type measured by the same unit, is presented as ontological alternative to overcome the insufficiency of the dominant part-whole perspective, favoring the conceptual understanding of fractions.

**Keywords:** Mathematics Education. Rational Numbers. Measurement. Cuisenaire Rods.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Medição de segmentos .....	27
Figura 1.2 – Comparação entre comprimento de dois segmentos 1 .....	27
Figura 1.3 - Comparação entre comprimento de dois segmentos 2 .....	27
Figura 1.4 -Localizando $3/4$ na reta numérica.....	34
Figura 1.6 - (a) A barra marrom é igual a quatro barras vermelhas. (b) A barra vermelha é um quarto da barra marrom. (c) Três barras vermelhas são três-quartos da barra marrom.....	37
Figura 1.7 – Medir o comprimento da barra laranja tendo a barra roxa como a unidade de medida .....	38
Figura 2.1 - Interconexões dos principais componentes do senso numérico.....	47
Figura 2.2 - O relacionamento entre os três componentes da compreensão de frações .....	49
Figura 2.3 - Barras Cuisenaire .....	53
Figura 2.4 - Tela do applet Cuisenaire .....	58
Figura 2.5 - Tela do G5 indicando o comprimento horizontal do <i>applet</i> com as barras .....	59
Figura 2.6 - Tela reduzida do G5 indicando as barras que sobravam .....	59
Figura 2.7 - Comparação barra preta com a branca.....	61
Figura 2.8 - Explicação do G5 da equivalência das frações $1/3$ e $3/9$ .....	62
Figura 2.9 - Letras escolhidas para representar as barras .....	63
Figura 2.10 - Resolução do item b da Tarefa 2 (parte1) pelo G5 .....	63
Figura 2.11 – Combinações e registros tarefa 2 (parte2) G5.....	66
Figura 2.12 - Resolução do item b e c da Tarefa 3 pelo G4 .....	68
Figura 3.1 - Tela indicando as barras que sobravam do G4 .....	86
Figura 3.2 - Medindo o comprimento horizontal do <i>Applet G1</i> .....	86
Figura 3.3 - Comparação de frações .....	88
Figura 3.4 - Barras escolhidas pelo G4 no jogo do Trem.....	89
Figura 3.5 - Registro tarefa 2 (parte2) .....	92

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados .....	18
Quadro 2 - Trecho quadro de análises .....	19
Quadro 1.1 – Ideias e Significados Relacionados às Interpretações de Frações .....	30
Quadro 1.2 - Interpretações para a fração $1/4$ .....	31
Quadro 2.1 - Quatro fases do Modelo Instrucional 4A, usando barras Cuisenaire .....	51
Quadro 2.2 - As Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados .....	54
Quadro 2.3 – Codinome dos participantes .....	55
Quadro 2.4 – Diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários .....	56
Quadro 3.1 - Diferenças das propriedades dos Números Naturais e Números Fracionários ...	79
Quadro 3.2 - Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de produção dos dados .....	83
Quadro 3.3 – Codinome dos participantes .....	83

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
O percurso pessoal/profissional da pesquisadora .....	15
Contexto e pressupostos teórico-metodológicos .....	17
<b>1 FRAÇÕES E SUAS INTERPRETAÇÕES: DISCUSSÕES E REFLEXÕES SOBRE MEDIDA .....</b>	<b>24</b>
1.1 Introdução .....	25
1.2 O Conceito de Fração e sua Construção Histórica .....	26
1.3 Fração e suas Interpretações.....	28
1.4 O que dizem as pesquisas relacionadas à perspectiva de medição .....	32
1.5 Medida: Reta Numérica X uma Relação de Comparação Multiplicativa entre Quantidades.. .....	34
1.6 Introdução ao Ensino de Frações com as Barras Cuisenaire.....	36
1.7 Afinal, qual é a interpretação indicada para a introdução do conceito de fração?.....	39
1.8 Referências .....	40
<b>2 A COMPREENSÃO DE FRAÇÕES COMO MEDIDA POR ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL .....</b>	<b>44</b>
2.1 Introdução .....	45
2.2 Compreensão de números e o senso numérico .....	46
2.3 As Barras Cuisenaire.....	52
2.4 Contexto e Pressupostos Metodológicos.....	53
2.5 Análise de Dados.....	58
2.6 Considerações finais.....	70
2.7 Referências .....	71
<b>3 FRAÇÕES: POR QUE NINGUÉM ENSINOU DESSE JEITO? .....</b>	<b>74</b>
3.1 Introdução .....	75
3.2 Predominância parte-todo e outras perspectivas para o ensino de frações .....	76
3.3 Contexto e Pressupostos Metodológicos.....	81
3.4 Análise de Dados.....	85
3.5 Conclusões e Considerações .....	94
3.6 Referências .....	96
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>100</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>106</b>

<b>APÊNDICES .....</b>	<b>112</b>
------------------------	------------

## INTRODUÇÃO

As dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem são preocupação constante para professores e toda a comunidade escolar. Após mais de duas décadas como professora de matemática da Educação Básica, são muitos os questionamentos elencados sobre como lidar com as dificuldades com as quais nos deparamos em sala de aula, especificamente aquelas relacionadas à não aprendizagem dos alunos, que estão imbricadas às nossas dificuldades de ensino, enquanto professores. Estas dificuldades motivaram a então professora e agora pesquisadora a retornar para a Universidade.

Tratando mais especificamente das dificuldades apresentadas nos conteúdos matemáticos da Educação Básica, chamam a atenção as imensas dificuldades quanto aos números fracionários, fato continuamente relatado por professores após décadas de atuação no magistério. A problemática relacionada à dificuldade dos estudantes com os números fracionários já foi amplamente discutida por vários autores (MARTIN *et al.*, 2007; LIN *et al.*, 2013; POWELL, 2018b).

O conhecimento sobre números fracionários é base para estudantes serem bem-sucedidos na Álgebra e disciplinas matemáticas desenvolvidas posteriormente (BAILEY *et al.*, 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; SIEGLER *et al.*, 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015).

Lamon (2012) alerta para as grandes perdas que ocorrem devido às lacunas no entendimento conceitual sobre frações, proporções e outros tópicos relacionados. De acordo com essa autora, as consequências da falta do conhecimento desses conceitos podem afetar direta ou indiretamente as atitudes de uma pessoa em relação à matemática, reduzindo significativamente sua motivação para a aprendizagem, assim como induzindo-a ao desinteresse na seleção de cursos de graduação nas áreas de matemática e de ciências. Conseqüentemente, é possível que afete também o desempenho profissional, repercutindo na menor flexibilidade na carreira e até mesmo na diminuição da capacidade de apreciar alguns dos fenômenos mais simples do dia a dia (LAMON, 2012).

São muitas as tentativas para que o ensino de frações seja mais eficaz, com vários modelos de material manipulável, jogos, softwares e metodologias diferenciadas. Entretanto, nada parece ter surtido efeito significativo na aprendizagem, podendo isto ser constatado nas dificuldades encontradas pelos estudantes na série em que são trabalhadas especificamente as frações e nas séries seguintes. A dificuldade com frações também é observada em muitos docentes (SILVA, 2005).

Behr *et al.* (1983), Lamon (2012), Kieren (1980) afirmam que, para a compreensão efetiva dos Números Racionais, é necessário que os alunos tenham oportunidade de estudar os diferentes significados de frações ao longo da vida escolar. Para estes autores, são cinco os significados assumidos pelas frações: parte-todo, quociente, razão, medida e operador, todos baseados na noção de partição de uma quantidade.

No entanto, de maneira geral, a predominância no ensino de frações é a visão de partição que privilegia o significado chamado de parte-todo (parte/inteiro) (LAMON, 2012). Segundo Powell (2018a), essa abordagem gera problemas epistemológicos, tal como o fato de os estudantes utilizarem propriedades e procedimentos assumidos pelos números naturais, tanto para fazer inferências sobre números fracionários quanto no momento das operações, como por exemplo, quando relacionam o número de partes de uma partição com o tamanho de cada parte; sendo,  $\frac{1}{5}$  maior que  $\frac{1}{4}$ , pois 5 é maior que 4; e ao adicionar frações, realizam a adição de números naturais:  $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2}{9}$ . Corroborando, Ni e Zhou (2005, p. 29, tradução nossa) destacam a questão da exigência de partes iguais, “contar partes não congruentes para nomear uma fração  $\frac{1}{3}$  em um círculo que está dividido ao meio e dois quartos”.

Além disso, os estudantes têm dificuldades em entender frações impróprias, cujo numerador é maior que o denominador, como  $\frac{7}{4}$ , e admitir que uma fração representa uma magnitude, não apenas parte de algo (TUCKER, 2008). Magnitude, de acordo com Powell (2019d, p. 3), fundamentado em Carraher (1996), “é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida”. Desse modo, magnitude é o tamanho de um número ou, em outras palavras, a quantidade representada por ele. Sendo assim, a magnitude possui importância central para a compreensão numérica.

Nesse sentido, é possível que um dos problemas dos alunos em compreender os números fracionários não seja devido somente à metodologia como é abordado o conceito de frações, mas à perspectiva. Como alternativa para superar esses obstáculos, Powell (2019b) propõe o ensino de frações baseado na medição, utilizando as barras Cuisenaire.

Powell (2018b, p. 404) adverte que “poucas pesquisas sustentadas têm investigado a base ontológica alternativa conhecida para o conhecimento das frações, a perspectiva da medição”, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. Fato este constatado no Brasil por Scheffer e Powell (2020), ao realizar um estudo analisando dissertações, teses e artigos brasileiros publicados de

2013 a 2019. Esses autores concluíram que, nos estudos realizados nesse período, predomina a abordagem do particionamento (parte-todo).

A pesquisa conduzida por Powell (2019b) com alunos do 2º ano da Educação Básica evidenciou que os estudantes revelaram a possibilidade de superar limitações documentadas nas abordagens tradicionais do conhecimento das frações, utilizando as barras Cuisenaire na perspectiva de medição e questões mais amplas da sociedade geradas por essas limitações. De acordo com Powell (2019b), foram encontradas mudanças significativas na capacidade dos alunos em interpretar grandezas de fração utilizando modelos discretos e contínuos.

Assim, decidimos investigar potencialidades e dificuldades da aprendizagem de frações baseada na perspectiva de medição, proposta por Powell (2019b), com alunos que já possuíam instrução formal prévia de fração como parte de um todo (parte/todo), verificando quais seriam as possíveis implicações no processo de aprendizagem desses estudantes.

Para que o leitor compreenda a escolha do tema da pesquisa, faz-se necessária uma apresentação da trajetória percorrida pela autora, primeiro como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e posteriormente como professora de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

### **O percurso pessoal/profissional da pesquisadora<sup>1</sup>**

Cursei o magistério no Ensino médio em um colégio interno, pois esta era a única maneira de continuar estudando, visto que residia em uma localidade do interior e não havia transporte até a cidade. Cursar o magistério despertou o gosto pela docência. Sempre gostei muito de Matemática, era uma disciplina que tinha facilidade em aprender e ensinar aos amigos e colegas, mas já observava, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, a dificuldade e a repulsa que muitos sentiam por esta disciplina, fato este que sempre me incomodou.

A opção por cursar Licenciatura em Matemática na graduação aconteceu naturalmente. Tinha certeza de que queria ser professora de Matemática, mas confesso que senti uma espécie de frustração no decorrer do curso, pois havia a ilusão de que fosse aprender como ser professora de Matemática, ao invés de somente ter disciplinas em que não conseguia estabelecer uma relação com o que precisava ensinar na escola. Enquanto cursava Matemática no período noturno, já trabalhava como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental durante o período diurno, e desta forma, vivenciava a rotina e as necessidades de uma sala de aula.

---

<sup>1</sup> Esta parte do texto foi desenvolvida em primeira pessoa por se tratar de experiências pessoais.

No período em que lecionei nos anos iniciais do Ensino Fundamental, costumava trabalhar com a 4ª série, hoje 5º ano, e era recorrente ouvir que muitas das professoras não gostavam de trabalhar com esta série, porque ensinar Matemática era muito difícil, especialmente ensinar frações! Isso gerava em mim uma angústia muito grande, pois pensava em como os alunos iriam aprender matemática se o professor não gostava, ou muitas vezes não tinha domínio do conteúdo.

Passados mais de 20 anos lecionando na Educação Básica, ainda sinto a mesma motivação em estar em uma sala de aula, de ensinar e aprender que sentia no início da carreira. Porém, confesso que a rotina de trabalhar 40 horas/aula semanais e filhos pequenos acabaram adiando o sonho que sempre tive de cursar uma pós-graduação. Na vida, precisamos sempre fazer escolhas; certas ou erradas, quando as fazemos sempre temos a intenção de buscar o melhor.

Atuei como supervisora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) durante 8 anos, o que trouxe grandes contribuições para a minha prática docente e estreitou os laços com a Universidade. Quando decidi que voltaria a estudar, comecei a pesquisar programas que ofertassem um mestrado que atendesse minhas expectativas, porque não estava procurando somente um título: queria um programa que contribuísse para que eu me tornasse uma professora mais qualificada. Foi então que me deparei com um programa novo, a 200 quilômetros da minha cidade, que me chamou a atenção. No ano de 2019 cursei duas disciplinas como aluna não regular e fiquei encantada e decidida a cursar o mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), pois a proposta do programa se alinhava às minhas expectativas. Na disciplina *Investigando a Representação e o Ensino de Números Fracionários: o Atual e uma Alternativa*, ministrada pelo professor Arthur B. Powell, encontrei inspiração para meu projeto de pesquisa, pois o tema estava relacionado com o que me angustiava enquanto professora de Matemática: ensino e aprendizagem de frações.

Entretanto, a pesquisa inicialmente desenhada a partir da abordagem *Design-Based Research* (DBR), desenvolvendo uma sequência de tarefas utilizando o material manipulável Cuisenaire para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental precisou ser adaptada, devido à instabilidade ocasionada pela pandemia da COVID-19.

## Contexto e pressupostos teórico-metodológicos

O período previsto para ser realizada a coleta de dados (abril a setembro de 2021) com os estudantes da rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná era muito instável. Na rede estadual de ensino público paranaense, estávamos no ensino remoto desde março de 2020, o qual passou por várias mudanças e adequações. No primeiro semestre de 2020, as aulas remotas aconteciam pelo Aula Paraná, por meio de TV aberta, YouTube e aplicativo. A interação entre professores e estudantes acontecia através do Google Classroom. Para os alunos que não tinham acesso à internet, eram enviadas atividades impressas, de acordo com o planejamento da escola. No segundo semestre, a interação entre professores e alunos, além do Google Classroom, passou a acontecer no Google Meet, ocorrendo uma vez por semana em cada disciplina. Essa dinâmica de aulas remotas foi mantida no início do 1º semestre de 2021, mas as aulas síncronas por meio do Google Meet passaram a ser realizadas seguindo a carga horária de cada disciplina.

Em meados de 2021, migramos para o modelo denominado *híbrido* pela Secretaria do Estado da Educação do Paraná. Este modelo correspondia, na verdade, à alternância de turmas e/ou alunos, na tentativa de realizar as aulas presenciais para os alunos que apenas retiravam material impresso nas escolas para estudo, pois não possuíam acesso à internet. Este cenário de dúvidas e incertezas impossibilitou o desenvolvimento da pesquisa, pois o ensino presencial era necessário para que o projeto se efetivasse. A determinação do retorno de todos os estudantes para as aulas presenciais ocorreu somente em outubro de 2021, impossibilitando a coleta dos dados no prazo previsto. Assim, como alternativa para não abandonar completamente o objetivo inicial da pesquisa, considerando que outra pesquisadora do programa, havia coletado dados para sua pesquisa no segundo semestre de 2020, relacionado ao mesmo objeto de estudo, solicitamos a ela se poderíamos utilizar esses dados para nosso estudo. Ela desenvolveu tarefas de natureza exploratória abordando o conteúdo de frações na perspectiva da medição utilizando as barras Cuisenaire virtuais com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de modo remoto.

Desta forma, os dados empíricos utilizados nesta dissertação são provenientes de dados secundários coletados por Oliveira (2020<sup>1</sup>). Segundo Malhotra (2004), dados secundários são aqueles coletados para fins diferentes do problema em pauta, enquanto dados primários são os originados pelo pesquisador para solucionar o problema da pesquisa.

---

<sup>1</sup> Por se tratar de uma dissertação multipaper, estará disponível na página do PRPGEM quando todos os artigos forem publicados.

Os dados coletados no ano de 2020 constituem-se na gravação de 19 aulas, planejadas e realizadas no Ensino Remoto de Emergência, pela plataforma Google Meet. Para a pesquisa, a professora regente e responsável por planejar e desenvolver as tarefas convidou 71 alunos de duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino do interior do Paraná. Dos 71 alunos convidados, 30 preencheram os termos de assentimento e consentimento da pesquisa, e 22 alunos participaram do início ao fim do estudo, distribuídos em 4 grupos (G1, G3, G4 e G5) constituídos por três a seis alunos, denominados por pseudônimos escolhidos por eles.

Primeiramente, antes de realizar a análise desses dados, construímos o referencial teórico alicerçado nas pesquisas sobre as diversas interpretações de frações (BEHR, 1983; KIEREN 1980; 1983; LAMON, 2012), principalmente na interpretação como medida (CARAÇA, 1951; 1989; POWELL, 2018a; 2018b; 2019b; 2019c), que é objetivo central em nosso estudo e constitui o primeiro artigo deste trabalho, intitulado *Frações e suas interpretações: discussões e reflexões sobre medida*.

Essas bases teóricas foram essenciais para a análise dos dados empíricos, que foram constituídos pela gravação das 19 aulas detalhadas no Quadro 01.

**Quadro 1 - Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados**

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento e minutos gravados		
		IT e RT		DCT e SAM
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	15/09/2020 G1: 124 min G3: 99 min	16/09/2020 G4: 100 min G5: 61 min	18/09/2020 Todos os alunos 91 min
Tarefa 2: Medindo com Barras <i>Cuisenaire</i> (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; - Compreender a representação fracionária.	22/09/2020 G1: 107 min G3: 87 min	23/09/2020 G4: 97 min G5: 80 min	25/09/2020 Todos os alunos 66 min
Tarefa 2: Medindo com Barras <i>Cuisenaire</i> (Parte 2)	- Comparar frações; - Compreender a adição de frações com denominadores iguais.	29/09/2020 G1: 112 min G3: 75 min	30/09/2020 G4: 105 min G5: 82 min	02/10/2020 Todos os alunos 112 min
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; - Compreender adição e subtração de frações com denominadores diferentes.	14/10/2020 G1: 95 min	14/10/2020 G4: 96 min G5: 53 min	16/10/2020 Todos os alunos 76 min

Fonte: Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 318).

Para estruturar as análises, assistimos às gravações das aulas, parando e voltando o vídeo quando identificadas falas e registros (telas) relativos ao nosso objeto de pesquisa. Elaboramos um quadro que foi sendo construído durante o período em que assistíamos as

gravações das aulas, contendo a data, a tarefa realizada, o intervalo de tempo no vídeo e as observações contendo as falas dos alunos em que identificamos as potencialidades e as dificuldades na aprendizagem de frações na perspectiva da medição utilizando o Cuisenaire digital, e os excertos trazidos das transcrições dos vídeos. Após assistir todos os vídeos, o quadro foi reorganizado, separando os episódios observados relativos às potencialidades e às dificuldades, conforme mostra o recorte do quadro de análises das potencialidades (Quadro 02).

**Quadro 2 - Trecho quadro de análises**

POTENCIALIDADES				
Data	Tarefa e Grupo	Tempo	Observação	Excerto
15/09/2020	Tarefa 2 – Parte 1. Grupo 05	1:02'	Começam a escrever as relações matemáticas do menor para o maior com muita tranquilidade. $1B = \frac{1}{6}E$	Viúva Negra: Agora é 1L também, né. Luffy: É, igual a 5V [...] Agora 1L equivale à 10V [...] E agora tem que fazer ao contrário. Viúva Negra: Como que é ao contrário? Doguinha: 1A fica $\frac{1}{2}$ Viúva Negra: Hã? Luffy: 1A = $\frac{1}{2}$ L Viúva Negra: Tá... 1A de novo? Luffy: Não, agora fica 1V, equivale a quanto Poster? Poster: $\frac{1}{5}$ Luffy: Agora 1B equivale a... Poster: $\frac{1}{10}$ Luffy: Agora a barra marrom. Viúva Negra: Barra M né... 1M = 2R. Luffy: Isso mesmo. Agora 1M equivale a 4V [...] 1M equivale a... Viúva Negra: 8B. Luffy: Isso. Agora invertido. Poster: 1R equivale à metade do M. Luffy: Agora 1V equivale a... Viúva Negra: $\frac{1}{4}$ do M. Luffy: 1B equivale a $\frac{1}{8}$ do M. Poster: Comparando assim, 1 bloco é bem mais fácil. Luffy: Agora é a azul, barra Z [...] 1Z equivale a 3C. Viúva Negra: O que mais? 1Z... Luffy: Equivale a 9B [...] Agora 1C equivale a... Poster: $\frac{1}{3}$ .

Fonte: Arquivo nosso (2021).

Assim, as análises dos dados empíricos foram articuladas em dois artigos (artigo 2 e 3, respectivamente): o primeiro que investiga as potencialidades, e o outro que investiga as dificuldades da aprendizagem de frações baseada na perspectiva de medição, proposta por Powell (2019b), com alunos que já possuíam instrução formal prévia de fração como parte de um todo (parte/todo). Sentimos a necessidade de esclarecer os diferentes significados de

frações, baseados na perspectiva da partição, bem como a perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. Desta maneira, optamos pelo modelo de organização de dissertações e teses *multipaper*, um documento organizado na forma de vários artigos científicos. Este modelo vem sendo utilizado em vários estudos (DUKE; BECK, 1999; GARNICA, 2011; COSTA, 2014; BARBOSA, 2015), destacando-se inclusive argumentos favoráveis à sua adoção no contexto das pesquisas qualitativas.

O Quadro 03 apresenta a forma como organizamos os diferentes capítulos ou artigos da dissertação.

**Quadro 3** – Organização dos capítulos da dissertação

<b>Artigo</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Quadro Metodológico</b>
Capítulo 1 - Frações e suas interpretações: discussões e reflexões sobre medida	Esclarecer aspectos referentes às diferentes interpretações de fração, sobretudo a interpretação de fração como medida.	Ensaio teórico que discute as diferentes interpretações de frações, sobretudo a interpretação como medida, esclarecendo a interpretação como medição e como particionamento.
Capítulo 2 - A compreensão de frações como medida por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental	Investigar atividades matemáticas desencadeadas pela prática, quando são desenvolvidas tarefas com o material Cuisenaire abordando frações na perspectiva de medição no 6º ano do Ensino Fundamental, considerando as quatro fases do Modelo 4A- Instrucional na compreensão de frações.	Qualitativo de cunho interpretativo, pautado nos registros dos alunos e nas gravações das aulas e transcrições em que se busca identificar elementos que evidenciem que atividades são mobilizadas pelos alunos no contexto de prática, que se articulem como modelo instrucional 4A, e como essas atividades encaminham a compreensão de frações como medida.
Capítulo 3 - Frações: Por que ninguém ensinou desse jeito?	Investigar as dificuldades dos alunos na compreensão de frações como campo diverso dos naturais, quando tiveram a formação inicial sobre frações na perspectiva parte-todo.	Qualitativo de cunho interpretativo, alicerçado no quadro de diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários e pautado nos registros dos alunos e nas gravações das aulas e transcrições, em que se busca identificar elementos que esclareçam as dificuldades na compreensão de frações, tendo seu ensino iniciado na perspectiva parte-todo.

**Fonte:** Dados da pesquisa (2021).

Desta forma, os questionamentos deste trabalho foram discutidos e encaminhados ao longo dos artigos, em que procuramos esclarecer a interpretação de fração como medida (artigo 1), destacando a noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. A partir disto, analisamos as tarefas e as aulas, que permitiram verificar quais atividades matemáticas são desencadeadas por essa prática, articuladas com a proposta ao

modelo instrucional 4A na compreensão de frações como medida (artigo 2). Além disso, foi possível estabelecer a relação dessa compreensão ou incompreensão com o ensino de frações iniciada com a perspectiva parte-todo (artigo 3).

Finalizamos nossa dissertação com a conclusão geral do trabalho, de forma que a questão norteadora da pesquisa fosse respondida, consolidando e conectando os diversos artigos elaborados ao longo desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.
- BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, v. 1, p. 347-367, 2015.
- BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.
- BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392>. Acesso em: 22 nov. 2021.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, p. 107-152, 1951.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.
- COSTA, W. N. G. Dissertações e teses Multipaper: uma breve revisão bibliográfica. **Anais Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 8, n. 1, 2014.
- DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Fracciones: comprensión de alumnos del 6º año em prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición. **PARADIGMA**, [S. l.], v. 42, n. 3, p. 307-339, 2021. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p307-339.id1133. Acesso em: 22 nov. 2021.
- DUKE, N. K.; BECK, S.W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.
- GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E., (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

KIEREN, T. E. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E., *et al* (Ed.). **Rational numbers: An integration of research**. New Jersey: Erlbaum., p.49-84, 1993.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 3.ed. New York: Routledge, 2012.

LIN, C.Y. *et al*. Preservice Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Fraction Operations: A Comparative Study of the United States and Taiwan. **School Science and Mathematics**, v. 113, n. 1, p. 41-51, 2013. Disponível em: <https://login.proxy.libraries.rutgers.edu/login?url=http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1009005&site=eds-live>. Acesso em: 23 nov. 2021.

MALHOTRA, N. K. **Pesquisa de marketing: uma orientação aplicada**. São Paulo: Editora Bookman, 2004.

MARTIN, W. G. *et al*. **The learning of mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

NI, Y; ZHOU, Y.D. Teaching and learning fraction numbers: The origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist**, v.40, n. 1, p. 25-52, 2005

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECeM**, Cascavel, PR, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **XIII ENEM**, Brasil, jun. 2019d. Disponível em: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1258/1834>. Acesso em: 04 junho 2021.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.20, 2020.

SIEGLER, R. S. *et al.* Early Predictors of High School Mathematics Achievement. **Psychological Science**, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.

TUCKER, A. Fractions and units in everyday life. *In*: MADISON, B. L.; STEEN, L. A. (Org.). **Calculation vs. context: Quantitative literacy and its implications for teacher education**. Washington, DC: Mathematical Association of America, p. 75-86, 2008.

# 1 FRAÇÕES E SUAS INTERPRETAÇÕES: DISCUSSÕES E REFLEXÕES SOBRE MEDIDA

Margaret Charnei<sup>1</sup>  
Maria Ivete Basniak<sup>2</sup>

**Resumo:** Este trabalho teórico discute aspectos referentes às diferentes interpretações de fração, sobretudo a interpretação de fração como medida. Ao menos cinco interpretações devem ser consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador. No entanto, não é oportunizada, aos estudantes brasileiros e de muitos países, a instrução de frações com os diversos significados, ficando restrita, principalmente na introdução das frações, somente ao significado parte-todo, o qual não tem sido eficaz. Contudo, pesquisas têm apontado resultados favoráveis ao ensino de frações na perspectiva da medição. Nesse contexto, são discutidas pesquisas relacionadas à perspectiva da medição baseadas na noção de partição de uma quantidade e na noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade, apresentada por Powell (2019b). Esta perspectiva coincide com a gênese histórica das frações, que emergem da necessidade de medir quantidades contínuas. A conclusão é que a introdução de frações deve ser realizada pelo significado medida, inicialmente como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades e posteriormente como ponto na reta numérica.

**Palavras-Chave:** Educação Matemática. Barras Cuisenaire. Perspectiva de Medição.

## FRACTIONS AND THEIR INTERPRETATIONS: DISCUSSIONS AND REFLECTIONS ABOUT MEASUREMENT

**Abstract:** This theoretical paper seeks to discuss and present aspects concerning the different interpretations of fractions, especially the interpretation of fractions as measurement. At least five interpretations should be considered when discussing the fractions teaching: measure, part-whole, quotient, ratio, and operator. However, it is not provided to Brazilian students and from many countries the instruction of fractions with the various meanings, being restricted, especially in the introduction of fractions, only to the part-whole meaning, which has not been effective. Although, research has shown favorable results in fractions teaching from the measurement perspective. In this context, we present studies related to the measurement perspective based on the partition notion of a quantity, and fraction notion in the measurement perspective, in which a fraction is a multiplicative comparison between two quantities of the same type measured by the same unit, as presented by Powell (2019b), which coincides with the fractions' historical genesis, that emerges from the need to measure continuous quantities. Findings show that introduction of fractions should be performed by the meaning of measure,

---

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Margaret.charnei@escola.pr.gov.br

<sup>2</sup> Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

initially as a relation of multiplicative comparison between quantities and later as a point on the number line.

**Keywords:** Mathematics education. Cuisenaire rods. Measurement perspective.

## 1.1 Introdução

Historicamente, as frações foram construídas a partir de diferentes necessidades e significados. O ensino de frações tornou-se conceitualmente distante da sua fonte de origem, a medição. Isso ocorreu em um desenvolvimento relativamente recente na história da Matemática quando, no início do século XX, a partir do influente Matemático alemão David Hilbert, surge o Formalismo. Os formalistas defendiam que toda matemática pode ser formulada com base em regras para manipulação de fórmulas, sem qualquer referência com contextos históricos ou aos seus significados práticos. Para Silva (2005), essa visão defende que toda a Matemática pode ser construída a partir de verdades que não necessitam ser demonstradas. Essa crença filosófica permeia a Educação Matemática até os dias atuais e influencia a forma como os números racionais são definidos, especialmente as frações (POWELL, 2019c).

A dificuldade apresentada pelos estudantes no entendimento do conceito de fração tem sido apontada e discutida em diversos estudos (BAILEY *et al.*, 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015; POWELL, 2018a; 2018b; 2019a; 2019c). A construção desse conceito não ocorre de forma natural devido à complexidade e diversidade de conceitos que envolve o ensino e a aprendizagem de frações. Segundo Oliveira e Basniak (2021, p. 3), “as frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, que se relacionam aos números racionais e outros conteúdos”.

Assim, neste trabalho teórico, busca-se esclarecer aspectos referentes às diferentes interpretações de fração, sobretudo a interpretação de fração como medida, a qual pode ser compreendida como uma relação comparativa multiplicativa entre quantidades (POWELL, 2018b) ou pontos na reta numérica (LAMON, 2012), bem como suas implicações para o ensino e para a aprendizagem deste tema da Matemática. Para isso, primeiramente realizamos uma breve discussão histórica sobre o conceito de fração relacionado com sua origem, a perspectiva da medição, fundamentada principalmente por Caraça (1951;1989), e apresentamos as diferentes interpretações sobre frações. Na sequência, apresentamos algumas pesquisas baseadas na interpretação de medida que encontramos em nossos estudos, principalmente na literatura estrangeira. Apresentamos a pesquisa realizada por Powell (2018b), cuja

problemática buscou responder ao questionamento: como se ensina sobre frações a partir de uma abordagem de medição, usando barras Cuisenaire? - uma abordagem de medida que difere das outras interpretações, que são baseadas na noção de partição de uma quantidade. Finalizamos com uma discussão sobre a introdução como medida a ser utilizada para a introdução das frações.

## 1.2 O Conceito de Fração e sua Construção Histórica

Na definição formalista, os números racionais são representados como frações comuns, sendo símbolos bipartidos que expressam quocientes ou razões entre dois números inteiros  $a$  e  $b$ ,  $\frac{a}{b}$ , sendo  $a$  e  $b$  inteiros e  $b \neq 0$ . Na expressão  $\frac{a}{b}$ ,  $a$  é chamado dividendo ou numerador; e  $b$ , de divisor ou denominador. Segundo Powell (2019c, p. 701), fundamentado em Davydov e Tsvetkovich (1991) e Schmittau (2003), essa definição faria pouco sentido para os estudantes; então, mesmo contradizendo o projeto formalista, os educadores matemáticos inventaram correlações visuais para frações que envolvem particionar itens do cotidiano, como pizzas, barras de chocolate e castanhas, ou figuras geométricas divididas em partes iguais, em que algumas dessas partes estão sombreadas. Desta forma, para as crianças, as representações visuais dariam sentido ao símbolo bipartido  $\frac{a}{b}$ .

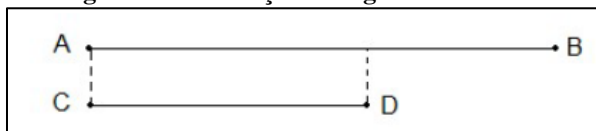
O povo egípcio, além da escrita dos números, também é conhecido por ter desenvolvido o conceito de fração, quando os Números Naturais não eram mais capazes de representar de todas as medições realizadas. Ao fracionar a unidade, ou seja, ao constituir o conceito de fração, ocorreu o que seria a expansão do campo dos números naturais ao campo dos números racionais. Aleksandrov (1963, p. 24-25, tradução nossa) localiza a origem das frações na interação inicial entre geometria e aritmética:

Em geral, a medição de qualquer magnitude combina cálculos com alguma operação específica que é característica desse tipo de magnitude... Mas no processo de medição verifica-se, em geral, que a unidade escolhida não está contida na magnitude medida um número inteiro de vezes, de modo que um cálculo simples do número de unidades não é suficiente. Torna-se necessário dividir a unidade de medida para expressar a magnitude com mais precisão por partes da unidade; isto é, não mais por números inteiros, mas por frações. Foi desse modo que as frações realmente surgiram, como é demonstrado por uma análise do histórico e de outros dados. Surgiram da divisão e comparação de magnitudes contínuas; em outras palavras, da medição.

Corroborando com a ideia de que as frações surgiram da medição, Caraça (1989) as exemplifica, utilizando dois segmentos de reta (Figura 1.1), um nomeado AB e outro CD. Ao sobrepor um segmento a outro fazendo coincidir dois extremos, no caso A e C, verifica-se que

o ponto  $D$  se localiza entre  $A$  e  $B$ . Logo, a comparação entre esses dois segmentos pode ser feita afirmando que o comprimento de  $AB$  é maior que  $CD$ ; ou que o comprimento  $CD$  é menor que o  $AB$  (POWELL, 2018b).

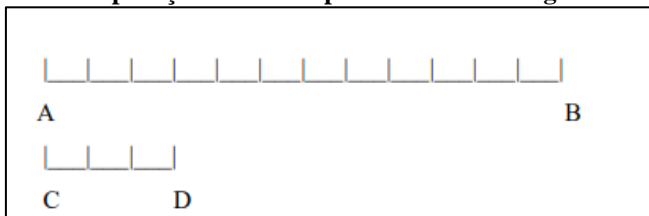
**Figura 1.1 – Medição de segmentos**



**Fonte:** Caraça (1989, p. 29).

Segundo Caraça (1989), comparar o resultado dos comprimentos com maior *ou menor que*, não responde a muitas questões, sendo necessário responder à pergunta *quantas vezes um comprimento cabe no outro*. É necessário, também, estabelecer um padrão de comparação para as grandezas da mesma espécie, como se faz com metro para comprimento e grama para peso, por exemplo. Para responder à pergunta *quantas vezes*, é necessário um número que exprima o resultado da comparação com a unidade. “Este número chama-se a *medida* da grandeza em relação a essa *unidade*” (CARAÇA, p. 30, 1951, grifo do autor). Tomando a Figura 1.2, o resultado da comparação expressa que o segmento  $CD$  cabe quatro vezes em  $AB$ ; ou ainda, que a medida  $CD$ , considerando  $AB$  como unidade de medida, é quatro.

**Figura 1.2 – Comparação entre comprimento de dois segmentos 1**

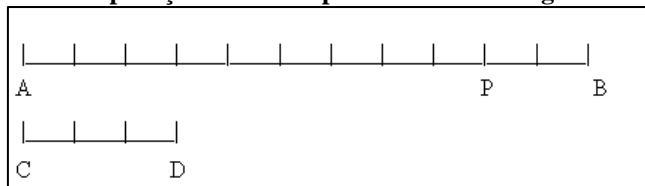


**Fonte:** Caraça (1989, p. 33).

$$\frac{AB}{CD} = \frac{12}{3} = 4$$

Para Caraça (1989, p. 33), a situação representada na figura 1.2 é uma exceção. O que ocorre com maior frequência é o caso em que, aplicando a unidade sobre  $AB$ , *sobra* uma porção  $PB$  de segmento inferior à unidade, como na Figura 1.3.

**Figura 1.3 - Comparação entre comprimento de dois segmentos 2**



**Fonte:** Caraça (1989, p. 12).

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, teríamos  $\frac{AB}{CD} = \frac{11}{3}$ . Porém, esta razão não existe em números inteiros, porque 11 não é divisível por 3, sendo necessário um novo campo numérico que contemple essa medição. A técnica utilizada para realizar a medição da figura 1.3 partiria do pressuposto que é possível exprimir, sempre, a medida de um segmento tomando outro como unidade. Desta forma, PB são duas partes das três partes representadas por CD (unidade), e então escrevemos a razão  $\frac{PB}{CD} = \frac{2}{3}$  (duas partes das três em que está dividida a unidade). Segundo Caraça (1989), teoricamente, em qualquer das hipóteses anteriores, a razão  $\frac{AB}{CD}$  é considerada um Número Racional. No entanto, se AB não for divisível por CD,  $\frac{AB}{CD}$  é um Número Racional Fracionário. É possível interpretar, então, que em  $\frac{11}{3}$  cabem 3 unidades CD inteiras e a parte fracionária  $\frac{2}{3}$  (dois terços) da unidade CD, ou que  $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$ . Desta maneira, podemos afirmar que, no problema da medida, temos: escolha da unidade; comparação com a unidade; e a expressão do resultado dessa comparação por meio de um número.

Powell (2018b, p. 404, tradução nossa), no entanto, aponta que “poucas pesquisas sustentadas têm investigado a base ontológica alternativa conhecida para o conhecimento das frações, a perspectiva da medição”. A escassez nas pesquisas também se reflete nos documentos norteadores do currículo da Educação Básica, como descrevem Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 2), citando que a medição, como possibilidade para a construção do campo numérico dos números racionais, não se encontra nos objetivos de aprendizagem ou conteúdos de maneira evidente no Referencial Curricular do Paraná (PARANÁ, 2018) e no Currículo da Rede Estadual Paranaense - CREP (PARANÁ, 2019), “apesar de a BNCC destacar a importância de propiciar aos alunos tarefas que envolvam medições, para mostrar a necessidade de um novo campo numérico”.

Entretanto, a interpretação da fração com medida não é única, como discutimos na seção que segue.

### 1.3 Fração e suas Interpretações

Behr *et al.* (1992) relatam que frações e números racionais, quando associados a problemas do mundo real e observados de um ponto de vista pedagógico, assumem inúmeras *personalidades* ou significados, os quais vêm sendo estudados desde a década de 70, compondo uma vasta literatura que discute a ideia de que os números racionais são constituídos por várias interpretações ou significados (KIEREN, 1976; 1980; BEHR *et al.*, 1983; LAMON, 2012).

Porém, ainda existem divergências nas tentativas de definir as características dos números racionais e das frações.

Um dos pesquisadores no tema, mais lido e referenciado em trabalhos que abordam frações e Números Racionais, é Kieren (1976; 1980; 1988; 1993). Este pesquisador foi o primeiro a chamar a atenção para a existência de diversas interpretações ou significados para os Números Racionais. Ele afirma que, para uma completa compreensão dos Números Racionais, é necessário conhecer cada uma dessas interpretações distintas e a forma como elas se inter-relacionam. Ressalta que, “para aprender adequadamente os aspectos algébricos que são inerentes aos conceitos dos números racionais é necessária uma variedade de experiências com diversas interpretações de números racionais” (KIEREN, 1976, p.109, tradução nossa). Em sua primeira publicação, o autor listou sete interpretações:

1. Números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.
2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (pelo nosso sistema numérico) para os números inteiros.
3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim,  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots)$  e  $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\}$  são números racionais.
4. Números racionais são números na forma  $\frac{p}{q}$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros, e  $q \neq 0$ . Nessa forma, os números racionais são números de “proporção”.
5. Números racionais são operadores multiplicativos.
6. Números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma:  $x = \frac{p}{q}$ , onde  $x$  satisfaz a equação  $qx = p$ .
7. Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica (KIEREN, 1976, p. 109-110, tradução nossa).

Em trabalho posterior, Kieren (1980) reorganizou essas sete em cinco interpretações das frações: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Portanto, inicialmente, Kieren (1976) considerava frações como uma das interpretações para os Números Racionais, mas posteriormente (KIEREN, 1980) substituiu este termo pela interpretação parte-todo. Em um trabalho realizado em 1988, o pesquisador reorganizou novamente essas interpretações em quatro categorias: quocientes, operadores, medidas e razões, entendendo que o conceito de parte-todo está posto nas outras interpretações (KIEREN, 1988).

Referenciando-se nos trabalhos de Kieren (1976; 1980; 1988; 1993) surgiram outras pesquisas que se destacaram na tentativa de esclarecer as diferentes interpretações de frações. Behr *et al.* (1983), a partir das interpretações propostas por Kieren (1976), reorganizaram as categorias incluindo novamente parte-todo, denominada por eles como *corpo quociente*. Dessa maneira, Behr *et al.* (1983) propuseram os seguintes significados para os Números

Racionais: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado, corpo quociente, e operador, os quais, posteriormente, Behr *et al.* (1992) organizaram em sete interpretações:

1) medida fracionária que indica a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Eles propuseram esta interpretação como uma reformulação da noção parte/todo;

2) razão, não sendo esclarecida pelos autores a ideia pertencente a essa interpretação;

3) taxa, que define uma nova quantidade como relação entre duas outras quantidades. O que distingue taxas de razões é que as taxas podem ser adicionadas e subtraídas, enquanto as razões, não;

4) quociente, que vê o número racional como resultado de uma divisão;

5) coordenadas lineares, que interpretam o número racional como um ponto da reta numerada, ou seja, os números racionais formam um subconjunto dos números reais;

6) decimal, que enfatiza as propriedades associadas ao nosso sistema de numeração; e

7) operador, que vê a fração como uma transformação.

A partir desses e outros autores (KIEREN, 1976; 1989; BEHR *et al.*, 1983; ESCOLANO; GAIRIN, 2005; LAMON, 2012), Doneda de Oliveira e Basniak (2021) elaboraram um quadro que destaca e exemplifica as interpretações de frações frequentemente utilizadas.

**Quadro 1.1 – Ideias e Significados Relacionados às Interpretações de Frações**

Continua

Interpretação	Ideias e Significados Relacionados
Parte-todo	<p>Ideia de parte de um todo.</p> <p>Sendo <math>\frac{a}{b}</math> em que <math>a</math> é a parte considerada e <math>b</math> é o todo. É necessário compreender que <math>a</math> é parte de um mesmo todo.</p> <p><b>Exemplo:</b> um retângulo é dividido em 5 partes iguais e tomam-se 3 partes, temos a fração <math>\frac{3}{5}</math>.</p>
Quociente	<p>Ideia de partição e quotização.</p> <p>Na partição, o todo tem que ser repartido em partes iguais para um grupo definido.</p> <p><b>Exemplo:</b> repartir 12 brigadeiros para 6 crianças. Quantos brigadeiros cada criança irá receber?</p> <p>Na quotização, o total de elementos já está definido, e o que precisamos encontrar é o número de grupos que podem ser feitos com o todo.</p> <p><b>Exemplo:</b> temos 12 brigadeiros e queremos distribuir 3 brigadeiros para cada criança. Quantas crianças irão receber brigadeiros?</p>

Razão	<p>Ideia de razão ou taxa.</p> <p>A razão é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza.</p> <p><b>Exemplo:</b> em uma sala de aula de 20 meninas e 10 meninos, podemos afirmar que a razão do número de meninas para o número de meninos é <math>\frac{2}{1}</math> ou 2:1.</p> <p>A taxa é uma extensão do construto de razão e é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de grandezas diferentes, em que a segunda grandeza depende da primeira.</p> <p><b>Exemplo:</b> a velocidade que normalmente é expressa em quilômetro por hora ou metro por segundo.</p>
Operador	<p>Ideia de <i>encolher</i> ou <i>esticar</i>, ou ainda, <i>ampliar</i> ou <i>reduzir</i>.</p> <p>Está associado à ideia de função <math>f(x) = \frac{a}{b}x</math>, com <math>b \neq 0</math>. Ao ser aplicada em grandezas contínuas, tem-se a noção de <i>encolher</i> ou <i>esticar</i>, ou ainda, <i>ampliar</i> ou <i>reduzir</i>, e o todo é transformado.</p> <p><b>Exemplo:</b> Ao calcular <math>\frac{2}{5}</math> do número 30, aplicamos uma redução do número 30. Se calcularmos <math>\frac{5}{2}</math> do número 30, o efeito é de ampliação.</p>
Medida	<p>Ideia de medir como ação.</p> <p>Medir exige comparação e ordenação. Para expressar essa magnitude, é necessária a representação fracionária, caso a medida não seja inteira; e a escolha de uma unidade de medida.</p> <p><b>Exemplo:</b> Medir o comprimento de uma folha de papel e expressar essa medida com representação fracionária, utilizando um lápis como unidade de medida.</p>

**Fonte:** Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 16).

É importante destacar que, para todos os autores citados, as cinco interpretações (parte-todo, quociente, razão, operador e medida) são baseadas na noção de partição de uma quantidade. Entretanto, Powell (2019b) apresenta a noção de fração na perspectiva de medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. O quadro 1.2 exemplifica todas as interpretações consideradas.

**Quadro 1.2 - Interpretações para a fração  $\frac{1}{4}$**

Interpretações	Exemplos para a fração $\frac{1}{4}$
<b>Parte-todo (parte-parte)</b>	1 de 4 partes iguais; 1 menina para cada 4 meninos.
<b>Quociente</b>	1 dividido por 4.
<b>Razão</b>	1 de algo comparado a 4 de algo mais, em um sentido multiplicativo.
<b>Operador</b>	$\frac{1}{4}$ de algo que é a unidade, de uma quantidade.
<b>Medida</b>	O comprimento de $\frac{1}{4}$ de uma unidade em uma linha numérica, que pode ser iterada $n$ vezes para obter a fração $\frac{n}{4}$ .

<b>Medição</b>	A medida de uma quantidade é $\frac{1}{4}$ da medida de outra.
----------------	--

**Fonte:** Souza e Powell (2021, p. 85, tradução nossa).

Considerando a complexidade que envolve as diferentes interpretações sobre frações, Berh *et al.* (1983) problematizaram a dificuldade sobre qual ou quais das interpretações seriam indicadas para desenvolver, nas crianças, o conceito básico de fração, assim como as relações, operações e aplicações com números racionais. Nesse contexto, discutimos, na sequência, algumas pesquisas com resultados favoráveis no ensino de frações na perspectiva da medição.

#### **1.4 O que dizem as pesquisas relacionadas à perspectiva de medição**

Encontramos, em nossos estudos, principalmente na literatura estrangeira, pesquisas que discutem e apresentam a instrução de frações baseadas na perspectiva da medição como abordagem eficaz no ensino de frações. As pesquisas apresentadas nesta seção são assentes na partição de uma quantidade, sendo apresentada posteriormente a pesquisa desenvolvida por Powell (2018b), em que a medida é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade.

Campos e Rodrigues (2007) desenvolveram uma pesquisa com estudantes do Ensino Fundamental, Médio e Superior para identificar as dificuldades referentes à definição do referencial em situações que envolvem frações. A partir dos resultados, os autores sugerem que as dificuldades observadas poderiam ser amenizadas se o ensino de frações contemplasse o significado de medida. Porém, como comentam os autores citando Silva (2005), o significado de medida é um dos menos considerados pelos professores na elaboração de suas atividades.

Em pesquisa mais abrangente, Torbeyns *et al.* (2015) realizaram um estudo investigando as relações entre a compreensão da magnitude da fração, a aritmética e as habilidades matemáticas com estudantes de 6º e 8º Ano na China, Bélgica e nos Estados Unidos da América (EUA), países que possuem práticas educacionais diferentes. Inicialmente, os pesquisadores são enfáticos em afirmar que, tanto para números inteiros quanto para frações, os estudantes precisam aprender a interpretar os símbolos numéricos em termos das magnitudes às quais eles se referem, e que essa compreensão de magnitude é central para a competência matemática geral.

Os autores citados ressaltam que o ensino de fração nos EUA é quase exclusivamente baseado na interpretação parte-todo, enquanto os alunos na China e na Bélgica encontram ênfase substancial na interpretação da medição (TORBEYNS *et al.*, 2015). O estudo concluiu que os estudantes chineses, instruídos em fração enfatizando a interpretação de reta numérica,

tiveram melhor desempenho na compreensão de magnitude e nas tarefas aritméticas com frações do que estudantes dos EUA. Os estudantes belgas cometeram menos erros que os estudantes dos EUA nas tarefas de fração. O estudo sugeriu, também, que há evidências da influência do conhecimento matemático dos professores na aprendizagem de frações, e comentam que os professores chineses possuem um *rico* conhecimento matemático; enquanto nos EUA, os professores possuem um conhecimento mais *superficial*; e os docentes da Bélgica parecem situar-se entre os professores da China e dos EUA.

Corroborando com esses resultados, Escolano e Gairin (2005), em pesquisa realizada na Espanha, avaliando uma proposta didática diferenciada para o ensino de frações, desenvolvida ao longo dos últimos três anos do ensino Fundamental, do 4º ao 6º Ano (10 a 12 anos), verificaram superação significativa dos estudantes das limitações geradas pela abordagem parte-todo, amplamente adotado na Espanha. Nesse estudo, inicialmente foi utilizada a perspectiva de medição no 4º Ano, o modelo de quociente no 5º Ano, e o modelo de razão entre grandezas de magnitude no 6º Ano.

Estudo conduzido por Fuchs *et al.* (2013), envolvendo 259 alunos da 4ª série, em Nashville, estado de Tennessee, Estados Unidos, com média de 10 anos de idade, recebendo diferentes intervenções sobre a compreensão de frações e aritmética, demonstrou que a intervenção baseada na medição foi mais eficaz do que uma abordagem instrucional predominante, que enfatizava interpretações de frações parte-todo.

As pesquisas brasileiras, de acordo com o estudo realizado por Scheffer e Powell (2020), indicam a predominância da abordagem do particionamento (parte-todo). Os pesquisadores realizaram um estudo analisando dissertações, teses e artigos brasileiros publicados de 2013 a 2019. Dos estudos selecionados, predominam os que tratam da utilização de materiais manipuláveis e de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de frações, além de pesquisas que tratam da noção e definição de frações a partir de medição, comparação, propriedades e operações. Com relação ao significado, atendem principalmente à interpretação parte-todo e dos operadores de frações. O aporte teórico “fundamenta-se em autores que se referem à construção do conceito e da noção de fração, principalmente aqueles que estabelecem relação com a interpretação parte-todo” (SCHEFFER; POWELL, 2020, p. 18). Ressaltamos que as publicações que envolvem a abordagem de frações na perspectiva de medição não foram citadas por autores brasileiros.

No entanto, Graça, Ponte e Guerreiro (2021), embasados no estudo de Charalambous e Pitta-Pantazi (2007), afirmam que o significado medida é um dos que os alunos apresentam

mais dificuldade, e que isto se deve, em parte, à pouca abordagem na instrução de números racionais.

Assim discutimos, na seção que segue, duas perspectivas diferentes para o ensino de frações baseado na interpretação de medida, indicados por Powell (2018b) e Lamon (2012) para introduzir as frações.

### **1.5 Medida: Reta Numérica X uma Relação de Comparação Multiplicativa entre Quantidades**

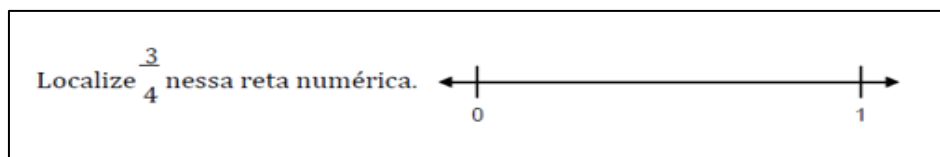
Nesta seção discutimos a interpretação das frações como medida sob duas perspectivas diferentes: pontos na reta numérica (partição) e uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, a partir dos estudos de Lamon (2012) e Powell (2019c).

Lamon (2012, p. 213, tradução nossa) reporta a pontos na reta numérica para a interpretação de medida, escrevendo que “é improvável que qualquer outra interpretação de fração possa chegar perto do poder da reta numérica para construir o sentido de número”. Para a autora, a possibilidade de indicar uma fração na reta numérica, podendo ter infinitas possibilidades, ajuda a desenvolver, nos estudantes, a noção de densidade dos números racionais, o senso de ordem e de magnitudes relativas de números racionais. Estes atributos são resumidamente denominados pela autora como *senso de fração*.

A partição exerce um papel importante em outros modelos e interpretações, mas para Lamon (2012), quando tratamos de frações como medidas, o ponto central está na possibilidade de particionar a unidade sucessivamente, e o número de partes iguais pode variar, dependendo de quantas vezes for necessário realizar esse processo. Esse aspecto dinâmico da medição é diferente de quando se compara o número de partes iguais que se tem com um número fixo em uma unidade, como na interpretação parte-todo, por exemplo.

A autora reforça que é muito fácil construir problemas que exigem partições sucessivas. No entanto, chama a atenção para os problemas propostos aos estudantes, para que eles cumpram o objetivo. Na Figura 1.4, podemos observar que, embora seja nomeado como um problema de medição, é basicamente solicitado para sombreado  $\frac{3}{4}$  de uma figura, pois sugere dividir a unidade em 4 intervalos iguais e marcar o terceiro intervalo, desta maneira, sendo associado à perspectiva parte-todo.

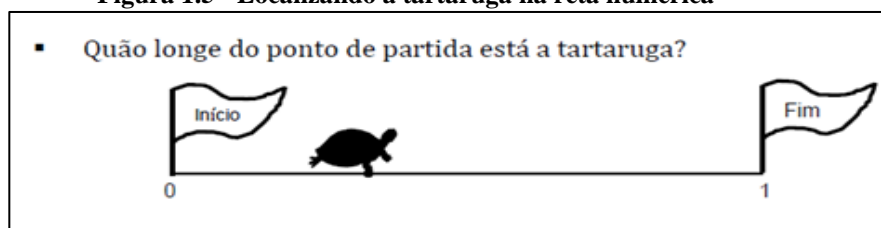
**Figura 1.4 -Localizando  $\frac{3}{4}$  na reta numérica**



Fonte: Lamon (2012, p. 210, tradução nossa).

Na Figura 1.5, pede-se para determinar a fração apropriada para a posição da tartaruga. Essa tarefa irá exigir partições sucessivas até chegar ao ponto em que a tartaruga está, e assim nomear a fração.

Figura 1.5 - Localizando a tartaruga na reta numérica



Fonte: Lamon (2012, p 21, tradução nossa).

Para Lamon (2012), o objetivo de tarefas como esta é, em parte, que os estudantes tenham noção de como os números fracionários se relacionam uns com os outros, e para saberem onde estão localizados em relação à  $\frac{1}{2}$  e à unidade, no caso da Figura 1.5. O  $\frac{1}{2}$  seria a *âncora*, termo utilizado por pesquisadores que investigam o senso numérico (CORSO; DORNELES, 2010; RESNIK, 1989; YANG, 2003), e pode ser entendida como uma base para o raciocínio durante o processo de resolução de problemas matemáticos.

Powell (2018a; 2019c) adota outra perspectiva para trabalhar com as frações. Para esse autor a interpretação de medida é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. Para Powell (2019c), o termo fração permite duas abordagens: a de medição e a de particionamento.

Na abordagem de partição, o autor cita as seguintes características cognitivas:

1. Um todo ou quantidade equiparticionada, discretizada;
2. Um todo é uma unidade implícita e *preordenada*;
3. Induz à contagem;
4. Fração unitária predeterminada; e
5. Uma fração denota contagens de entidades discretas: número de partes destacadas em relação ao número total de partes.

No entanto, para a abordagem da medição são citadas as seguintes características:

1. Duas quantidades contínuas distintas;
2. Uma quantidade é uma unidade explícita;
3. Necessita estimar ou medir; e

#### 4. Fração unitária a ser determinada;

O autor realiza pesquisas na perspectiva da medição utilizando a ferramenta pedagógica barras Cuisenaire. De acordo com Powell, ao utilizar as barras Cuisenaire é possível avançar de frações não-simbólicas para simbólicas, motivo pelo qual apresentamos, na sequência, a abordagem para o ensino de frações na perspectiva da medição desse o autor.

### 1.6 Introdução ao Ensino de Frações com as Barras Cuisenaire

Powell (2018a; 2018b; 2019c) discute a possibilidade do ensino de frações por meio da perspectiva da medição, utilizando as barras Cuisenaire. Ele acredita que a introdução ao ensino de frações deve ser realizada com a interpretação das frações como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. A utilização das barras Cuisenaire para a instrução de frações vai ao encontro da argumentação de Caraça (1989) para a solução do problema citado na Figura 1.1, possibilitando ao estudante escolher a unidade, comparar com a unidade e expressar o resultado dessa comparação por meio de um número.

Powell realizou pesquisa baseada na perspectiva da medição utilizando o material Cuisenaire e um modelo instrucional denominado: Modelo 4A-Instrucional. Esse Modelo consiste em quatro fases de implementação de uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos utilizando barras Cuisenaire (POWELL, 2018b). Nesta abordagem, segundo o autor, uma unidade instrucional é muitas vezes mais longa do que uma única reunião de classe. A sequência consiste em uma sucessão coerente e flexível de tarefas destinadas a capacitar os alunos a educar sua consciência sobre as ideias de um tópico matemático.

A pesquisa foi realizada com alunos do 2º Ano do Ensino Fundamental (8-9 anos), sem instrução prévia em frações, em uma escola urbana de desempenho baixo, em uma comunidade economicamente deprimida, em New Jersey, nos EUA. Segundo o autor, ao término das sessões, os alunos:

[...] foram capazes de adquirir, apropriar e articular a linguagem matemática para descrever e registrar com notações matemáticas as proporções percebidas entre dois comprimentos de barras de Cuisenaire e responder de forma flexível e correta em situações não ensaiadas de comparação multiplicativa de duas barras sem a presença física das barras de Cuisenaire. Sabendo como as magnitudes das hastes se comparam. Para criar estas afirmações matemáticas, os alunos evocavam e manipulavam suas imagens mentais das barras de Cuisenaire (POWELL, 2019b, p. 12).

Desta forma, Powell (2019a) defende que o ensino de frações deva iniciar pela perspectiva da medição, pois relaciona as frações com suas origens históricas, e desta maneira

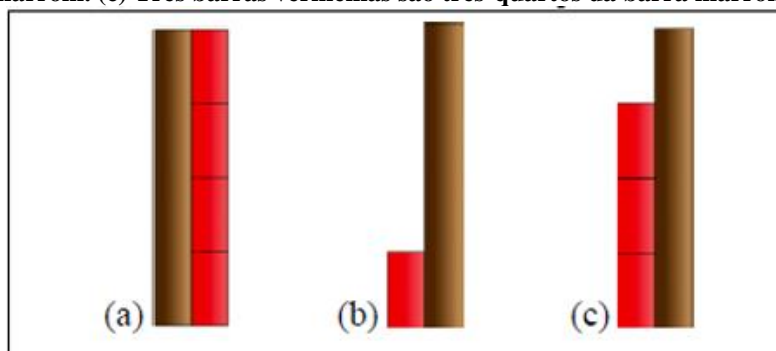
restabelece suas raízes ontológicas; supera as dificuldades conceituais apresentadas pela concepção dominante parte-todo; ajuda a conceber um quociente de dois números naturais como uma magnitude holística e se conecta naturalmente com atividades elementares precoces em torno de medições não padronizadas e padronizadas.

Powell (2019c) discute que a origem das frações não é filosófica, e sim cultural. Está baseada no entendimento da prática social humana de comparar ou medir quantidades contínuas há mais de quatro milênios.

Mais especificamente, surgiram frações à medida que os indivíduos queriam saber, por exemplo, a extensão de uma distância  $d$ , em comparação com uma unidade de medida  $u$ . Existem dois casos. Ou  $d$  é igual a um múltiplo exato de  $u$ , ou não, o que ocasiona a necessidade de números fracionários (POWELL, 2019c, p. 703).

Para ilustrar o primeiro caso utilizando as barras Cuisenaire, Powell (2019c) usa como exemplo a barra vermelha e a marrom. Ao utilizar a barra vermelha como unidade de medida é possível afirmar, lendo da esquerda para a direita, que o comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas. Segundo Powell (2019c, p. 705), “esta afirmação revela uma relação comparativa entre as duas quantidades, barras marrons e vermelhas. A relação é multiplicativa, pois quatro barras vermelhas são iguais a uma barra marrom”.

**Figura 1.5 - (a) A barra marrom é igual a quatro barras vermelhas. (b) A barra vermelha é um quarto da barra marrom. (c) Três barras vermelhas são três-quartos da barra marrom**



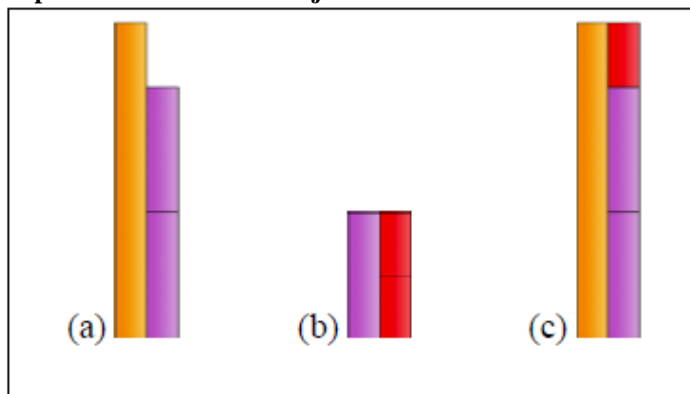
Fonte: Powell (2019c, p.705).

No entanto, ao utilizar o comprimento da barra marrom como unidade de medida, lendo da esquerda para a direita, o comprimento de uma barra vermelha é um quarto do comprimento de uma barra marrom (Figura 1.6 (b)); ou ainda, o comprimento de três barras vermelhas é três quartos do comprimento de uma barra marrom (Figura 1.6 (c)). Continuando com o padrão, poderíamos afirmar que o comprimento de seis barras vermelhas é seis quartos do comprimento de uma barra marrom, chegando, desta maneira, de uma forma *natural* às tão *incompreendidas* frações impróprias.

Powell explica que cada barra Cuisenaire pode ser expressa por uma letra, por exemplo, vermelho  $v$  e marrom  $m$ , podendo, assim, as declarações verbais serem representadas simbolicamente, usando notação matemática. Ao afirmar que o comprimento de uma barra marrom é igual ao comprimento de quatro barras vermelhas, pode-se escrever  $m = 4v$ , ou ao informar que a barra vermelha medida por barras marrons é igual a um quarto, podemos escrever  $\frac{v}{m} = \frac{1}{4}$ . Importante observar que, ao representar simbolicamente essas relações, introduz-se a Álgebra às crianças.

Em relação ao segundo caso citado por Powell (2019c), que desencadeou a invenção das frações, o autor utiliza, para exemplificar, o comprimento da barra roxa como unidade de medida para medir o comprimento da barra laranja. No entanto, como pode ser observado na Figura 1.7 (a), uma barra laranja não mede exatamente um número inteiro do comprimento das barras roxas. Surge a necessidade da utilização de uma subunidade de medida, aqui sendo a barra vermelha, pois uma barra roxa é igual a duas vermelhas e, desta forma, é possível medir a barra laranja (Figura 1.7 (c)). A “notação matemática é:  $l = 2 \times r + \frac{1}{2} \times r$ ,  $l = 2 \times r + \frac{1}{2} \times r$  ou, já que cada barra roxa é igual a duas barras vermelhas, esta:  $l = \frac{5}{2} \times r$ ” (POWELL, 2019c, p. 707).

**Figura 1.6 – Medir o comprimento da barra laranja tendo a barra roxa como a unidade de medida**



Fonte: Powell (2019c, p. 707).

Qualquer barra pode ser utilizada como unidade de medida para determinar a porção do comprimento da outra. De forma geral, Powell (2019c, p. 708) escreve:

Se  $d$  não for igual a um múltiplo exato de  $u$ , poderá existir uma subunidade da medida  $v$ , de modo que  $d$  seja igual a exatamente  $m$  subunidades de  $v$ , isto é,  $d = m \times v$ ; e  $u$  é igual a exatamente  $n$  subunidades de  $v$ , ou seja,  $u = n \times v$ , o que implica que  $v = \frac{1}{n} \times u$ . Como  $d = m \times v$ , então  $d = m \times \frac{1}{n} \times u$ ; isto é,  $d = \frac{m}{n} \times u$ . Assim, a distância  $d$  é igual à razão  $m$  enésimos (ou  $m$  unenésimo) da unidade de medida  $u$ , onde  $\frac{m}{n}$  é uma fração. Essa expressão—  $d =$

$\frac{m}{n} \times u$  — representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis  $d$  e  $u$ .

O autor (2018b) cita quatro vantagens da epistemologia proposta no conhecimento de fração por meio da perspectiva de medição:

- 1) Relacionar frações com suas origens históricas e, como tal, restaurar suas raízes ontológicas;
- 2) Superar as dificuldades conceituais documentadas da concepção de frações tradicional dominante parte/todo, como o ato de medir desafia a sequência instrucional atual que coloca números mistos no final do aprendizado de fração e faz com que as frações tenham consequências próprias de comparações multiplicativas entre pares de quantidades;
- 3) Ajudar a conceber um quociente de dois números naturais como uma magnitude holística; e
- 4) Mitigar a chamada base do número inteiro ou natural.

Os resultados da pesquisa realizada por Powell (2018b) evidenciam que o ensino de frações pode ser iniciado pela perspectiva da medição. No entanto, são necessários estudos empíricos que esclareçam qual o potencial do material Cuisenaire na aprendizagem de frações na perspectiva de medição para alunos que já tiveram, previamente, instrução formal de frações em outra perspectiva.

### **1.7 Afinal, qual é a interpretação indicada para a introdução do conceito de fração?**

Após constatar a discrepância nos resultados do desempenho matemático do Programa de Avaliação Internacional de Estudantes (PISA) nas últimas três edições (2012, 2015 e 2018), dos estudantes brasileiros, estadunidenses e japoneses, em que os brasileiros ocuparam o último lugar, os americanos uma posição intermediária e os japoneses alcançaram o primeiro lugar, Souza e Powell (2021) investigaram as razões desses resultados realizando uma análise das séries do livro didático de matemática mais utilizado em cada um dos respectivos países nas séries em que são abordadas as frações. Em relação às interpretações de frações, os autores afirmam que, no Brasil e nos Estados Unidos, concentra-se a interpretação parte-todo, e a abordagem é procedimental, enquanto nos livros didáticos japoneses predomina a interpretação da medida como uma iteração de frações unitárias e parte-todo, e a abordagem é conceitual. Os autores concluem que “a abordagem de frações dos livros japoneses parece estar mais próxima do que recomenda a comunidade científica de Educação Matemática e este pode ser um

importante diferencial que explique parte dos resultados no PISA” (SOUZA; POWELL, 2021, p. 78).

Como já citado anteriormente, Kieren (1976) ressaltou a importância de os estudantes terem a possibilidade de ser instruídos nas diferentes interpretações de frações, pois dessa maneira seriam capazes de compreender os aspectos algébricos que são intrínsecos aos conceitos de números racionais, ao grupo dos quais as frações pertencem. Já Lamon (2012, p. 14) é enfática ao afirmar que todas as interpretações “estão em pé de igualdade”, referindo-se a, geralmente, o significado comparação de parte-todo ser o único utilizado na instrução de frações, e que essa restrição acaba trazendo sérios prejuízos aos estudantes.

Em pesquisa recente, Graça, Ponte e Guerreiro (2021), reforçando a afirmação de Lamon (2012), concluem que os alunos devem ter a oportunidade de ser confrontados com todos os significados (parte-todo, quociente, operador e medida), não somente a uma abordagem de frações centrada na relação parte-todo. Segundo os autores,

Cada significado proporciona determinados conhecimentos que são importantes para os alunos pelo que restringir o aluno a apenas a alguns significados dificulta a sua capacidade de construir um conhecimento mais abrangente (GRAÇA; PONTE; GUERREIRO, 2021, p. 711).

No entanto, é evidente que não é oportunizada, aos estudantes brasileiros e de muitos países, a instrução de frações com todos os significados, ficando restrita, principalmente na introdução das frações, somente ao significado parte-todo. Quanto à interpretação como medida, acreditamos que o fato de os livros didáticos não trazerem essa interpretação pode ser um motivo para os professores também desconhecerem tal interpretação, além de não ser discutida esta e outras interpretações de frações na formação acadêmica e continuada.

Pelos resultados apresentados nas pesquisas apresentadas e nos estudos que realizamos, acreditamos que a introdução de frações deve ser realizada pelo significado medida, inicialmente como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, e depois como ponto na reta numérica, favorecendo, desta forma, a compreensão dos números fracionários pelos estudantes.

## 1.8 Referências

ALEKSANDROV, A. D. A general view of mathematics. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N. (Ed.). **Mathematics**: its content, methods, and meaning. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, v. 1, p. 1-64. 1963.

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A., **Rational Numbers Concepts in Acquisition of Mathematics Concepts and Process**, Ed by Richard Lesh e Marsha Landau, Londres, 1983.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook on research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, p. 296-333, 1992.

BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W.R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, SC, v. 2, n. 1, p. 68-93, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992>. Acesso em: 20, jul.2021.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, p. 107-152, 1951.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CORSO; L.V.; DORNELES, B.V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na Matemática. **Rev. Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 298-309. 2010.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 2021.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESCOLANO, R. V. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente**. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007.

FUCHS, L. S.; SCHUMACHER, R. F.; LONG, J.; NAMKUNG, J.; HAMLETT, C. L.; CIRINO, P. T.; JORDAN, N. C.; SIEGLER, R.; GERSTEN, R.; CHANGAS, P. Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), p. 683–700, 2013. <https://doi.org/10.1037/a0032446>

GRAÇA, S.; PONTE, J.P.; GUERREIRO, A. Quando as frações não são apenas partes de um todo...! **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 23, n. 1, p.683-712, 2021.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p. 101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E., (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

KIEREN, T. E. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E., *et al* (Ed.). **Rational numbers: An integration of research**. New Jersey: Erlbaum., p.49-84, 1993.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 3.ed. New York: Routledge, 2012.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná**. Secretaria da Educação e do Esporte – SEED, Governo do Estado do Paraná, 2018.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Governo do Estado do Paraná, 2019.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECCEM**, Cascavel, PR, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

RESNIK, L. B. Developing mathematical knowledge. **American Psychologist**, v.44, n.2, p.162–169, 1989. Disponível em: <https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162>

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.20, 2020.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SOUZA, M.A.F.; POWELL, A.B. How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions? **Acta Scientiai**, Canoas, 23(4), 77-111, Jul./Aug. 2021.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.

## 2 A COMPREENSÃO DE FRAÇÕES COMO MEDIDA POR ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Margaret Charnei<sup>1</sup>  
Maria Ivete Basniak<sup>2</sup>

**Resumo:** A introdução e o ensino de frações na escola básica privilegiam o significado parte-todo. Esta perspectiva tende a conduzir os estudantes ao erro, podendo eles compreenderem que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais, ocasionando confusão com os procedimentos aritméticos de fração, prejudicando a aprendizagem de Álgebra e demais conteúdos matemáticos. No entanto, pesquisas têm evidenciado que o ensino de frações na perspectiva de medição, utilizando o material Cuisenaire, favorece o desenvolvimento do senso numérico de frações e permite que conceitos como frações impróprias e equivalentes sejam facilmente compreendidos e efetivamente construídos. Este trabalho investiga atividades matemáticas desencadeadas por tarefas de natureza exploratória utilizando o material Cuisenaire para abordar frações na perspectiva de medição no 6º ano do Ensino Fundamental, considerando as quatro fases do Modelo 4A- Instrucional na compreensão de frações. Os resultados revelam que os alunos, ao manipular, observar e comparar as barras, passaram da fase de Ações Concretas para a Fase de Ações Formais, percebendo as relações entre as barras e, deste modo, construíram ideias matemáticas. Os alunos compreenderam a diferença da magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, reconhecendo as frações equivalentes e realizando operações, inclusive reconhecendo que cometiam erros ao operar com frações por utilizarem propriedades dos números naturais. Além disso, foram introduzidos à linguagem algébrica sem gerar qualquer carga cognitiva.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelo Instrucional 4A. Barras Cuisenaire

### COMPREHENSION OF FRACTIONS AS MEASUREMENT BY 6<sup>TH</sup> GRADE STUDENTS FROM ELEMENTARY SCHOOL

**Abstract:** Fractions introduction and teaching in elementary school privilege the part-whole meaning. This perspective tends to lead the students to make mistakes, as they may understand that the rational numbers set is an extension of the natural numbers set, causing confusion with the arithmetic procedures of fraction, impairing the learning of algebra and other mathematical content. However, research has shown that teaching fractions from the measurement perspective, using the Cuisenaire material, favors the development of numerical sense of fractions and allows concepts such as improper and equivalent fractions to be easily understood and effectively constructed. This paper investigates mathematical activities triggered by tasks of exploratory nature using the Cuisenaire material to address fractions from the measurement perspective in the elementary school 6<sup>th</sup> grade considering the four phases of the 4A-

---

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, [Margaret.charnei@escola.pr.gov.br](mailto:Margaret.charnei@escola.pr.gov.br)

<sup>2</sup> Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, [basniak2000@yahoo.com.br](mailto:basniak2000@yahoo.com.br)

Instructional Model in understanding of fractions. Findings reveal that the students, by manipulating, observing, and comparing the bars, moved from the Concrete Actions phase to the Formal Actions phase, realizing the relations among the bars and thus built mathematical ideas. Students understood the difference in numerical magnitude from natural to fractional numbers, recognizing equivalent fractions and performing operations, while even recognizing that they made mistakes when operating with fractions because they used properties of natural numbers. In addition, they were introduced to the algebraic language without generating any cognitive load.

**Keywords:** Mathematics education. 4A Instructional Model. Cuisenaire rods.

## 2.1 Introdução

O ensino de frações predominante enfatiza o significado parte-todo, perspectiva que não tem se mostrado eficiente (POWELL, 2018a), porque esse enfoque tende a conduzir os estudantes ao erro na compreensão de que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais, ocasionando dificuldades conceituais e procedimentais quanto aos números fracionários. Essa abordagem faz com que os alunos pensem que as mesmas regras dos números inteiros valem para os fracionários. Para Siegler *et al.* (2012), outra dificuldade referente a iniciar o ensino de frações na perspectiva parte-todo é a confusão com os procedimentos aritméticos de fração, por exemplo, nos problemas de adição e subtração de fração com o mesmo denominador, quando este é mantido na resposta, diferente do que ocorre na multiplicação e divisão de frações. Essa dificuldade com as frações prejudica a aprendizagem de Álgebra e conteúdos matemáticos posteriores (BAILEY *et al.*, 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; SIEGLER *et al.*, 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015). Em relação à Álgebra, Booth e Newton (2012) apontam que o conhecimento de fração está relacionado à prontidão em Álgebra mais do que o conhecimento de magnitude de número em geral, e que o conhecimento da magnitude dos alunos sobre frações unitárias (ou seja, aquelas com numerador 1) parece particularmente importante.

Por outro lado, pesquisas (POWELL, 2018b; 2019b) com estudantes dos anos iniciais, sem instrução formal prévia de fração, têm evidenciado que o ensino de frações na perspectiva de medição, com a utilização do material Cuisenaire, favorece o desenvolvimento do senso numérico de frações, e permite que conceitos, como de frações impróprias e equivalentes, sejam facilmente compreendidos e efetivamente construídos. Para tal, o pesquisador e sua equipe desenvolveram um modelo instrucional denominado Modelo 4A-Instrucional, que consiste em quatro fases de implementação de uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos, utilizando barras Cuisenaire. Estas pesquisas,

entretanto, não envolveram alunos que já haviam estudado frações. Por isso, sentimos a necessidade de investigar a aprendizagem de frações pautada na perspectiva da medição com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental que já estudaram frações nos anos iniciais desta etapa da educação, na perspectiva predominante parte/todo. Neste sentido, este trabalho busca investigar atividades matemáticas desencadeadas por tarefas de natureza exploratória utilizando o material Cuisenaire para abordar frações na perspectiva de medição no 6º ano do Ensino Fundamental, considerando as quatro fases do Modelo 4A-Instrucional na compreensão de frações. Assim, iniciamos nossas discussões na próxima seção discutindo a compreensão de números.

## 2.2 Compreensão de números e o senso numérico

A compreensão de números envolve a habilidade de aproximar e tomar decisões sobre o seu tamanho, o que inclui reconhecer aproximações não razoáveis e o entendimento conceitual das operações numéricas, assim como a habilidade de traduzir diferentes representações de números e escolher a representação mais apropriada para determinado contexto (POWELL; ALI, 2018; YANG; HSU; HUANG, 2004).

A origem da expressão *senso numérico* não é explícita, “embora seja claro que ela surge, em grande parte, do desejo de substituir a palavra ‘numeramento’ por uma que não tenha seu anel abstrato ou sua associação com uma visão conservadora e estéril das necessidades matemáticas” (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992, p. 3, tradução nossa). Para os autores, o senso numérico diz respeito ao entendimento geral sobre os números e operações, bem como o desenvolvimento de diversas estratégias para lidar com eles, independentemente da ocupação das pessoas, resultando em uma expectativa de que os números são essenciais e que a matemática tem certa regularidade. Corso e Dorneles (2010) discutem que, de maneira geral, o senso numérico refere-se à facilidade e à flexibilidade das pessoas com números e à sua compreensão do significado dos números e ideias relacionadas a eles.

Possuir senso numérico permite que o indivíduo possa alcançar desde a compreensão do significado dos números até o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas complexos de matemática; desde as comparações simples de magnitudes até a invenção de procedimentos para a realização de operações numéricas; desde o reconhecimento de erros numéricos grosseiros até o uso de métodos quantitativos para comunicar, processar e interpretar informação (CORSO; DORNELES, 2010, p. 299).

Para McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 5, tradução nossa), “uma pessoa com bom senso numérico está pensando e refletindo sobre os números, operações e resultados que estão sendo

produzidos”. Os autores debatem essas noções de sentido numérico dentro de três categorias amplas: (1) conhecimento e facilidade com números, (2) conhecimento e facilidade com operações, e (3) aplicação do conhecimento e facilidade com números e operações a configurações computacionais. A Figura 2.1 ilustra as interconexões entre os principais componentes, as quais sugerem um processo de monitoramento que liga o sentido do número com a metacognição.

**Figura 2.1 - Interconexões dos principais componentes do senso numérico**



**Fonte:** Mcintosh, Reys e Reys (1992, p. 5, tradução nossa).

Dentro da categoria *conhecimento e facilidade com números* está o senso de ordenação dos números, representações múltiplas para os números, sistema de pontos de referência e senso de magnitude relativa e absoluta para os números. Da segunda categoria, *conhecimento e facilidade com operações*, fazem parte compreender os efeitos de operações, compreender propriedades matemáticas e compreender a relação entre operações. Compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário, consciência de que existem múltiplas estratégias, inclinação a utilizar uma representação e/ou método eficiente e inclinação a revisar dados e resultados por cautela fazem parte da terceira categoria, nomeadamente, *aplicação do conhecimento e facilidade com números e operações a configurações computacionais* (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

Yang, Hsu e Huang (2004) realizaram uma revisão a respeito dos relatos e estudos relevantes sobre senso numérico e definiram os componentes de sentido numérico da seguinte forma: 1) compreender o significado dos números, 2) reconhecer a magnitude dos números, 3) utilizar pontos de referência de forma adequada, 4) saber o efeito relativo da operação sobre os números, e 5) desenvolver estratégias de estimativa e julgar a razoabilidade dos resultados. Para os autores, o desenvolvimento do senso numérico é de interesse e preocupação internacional, pois uma pessoa que possui senso numérico bem desenvolvido possui a habilidade de estimar quantidades, de fazer comparações quantitativas, reconhecer erros em julgamentos de magnitude ou de medida (CORSO; DORNELES, 2010). Por exemplo, o problema  $\frac{6}{13} + \frac{3}{7}$  pode

ser resolvido da forma convencional, por meio de procedimentos memorizados, frequentemente conduzindo os estudantes a cometerem erros ou reconhecendo que cada fração é um pouco menor do que  $\frac{1}{2}$ , de forma a estimar que o resultado do problema deve ser um pouco menor do que um, e assim reconhecer se o resultado é razoável ou não. O entendimento da magnitude dos números é uma característica essencial para a compreensão do que o número significa. Desta maneira, o senso numérico desenvolvido possibilita a compreensão do que o número significa; foca no número, não no dígito.

A magnitude possui importância central para a compreensão numérica. “Ela descreve o tamanho de uma quantidade - algo que pode ser aumentado ou diminuído” (SOUZA; POWELL, 2021, p. 85, tradução nossa) e é representada por um número. Powell (2019a, p. 3), respaldado em Carragher (1996), afirma que “magnitude ou magnitude absoluta é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida”. Ainda com relação às magnitudes numéricas, Espadinha (2015, p. 3) ressalta que:

As magnitudes numéricas podem ser representadas de forma simbólica, recorrendo a dígitos que estejam associados a determinadas quantidades (como é o exemplo dos numerais árabes - 1, 20, 33) e que por isso requerem linguagem, ou de forma não simbólica, recorrendo a conjunto de pontos ou outros itens que representam uma quantidade de forma abstrata e que não requerem linguagem.

Powell e Ali (2018, p. 235), baseados nos estudos de Rodrigues, Dyson, Hansen e Jordan (2016), afirmam que: “Magnitude é uma propriedade que todo número real possui, incluindo inteiros e frações. Bem como compreender a magnitude é uma característica crucial da compreensão numérica, também é fundamental para a compreensão de frações”. Ao estimar, ordenar e refletir sobre o resultado de uma operação, e assim avaliar a razoabilidade dos resultados encontrados, essencialmente está considerando a magnitude (POWELL; ALI, 2018).

Quando se pensa em magnitude, as frações são reconhecidas como números, mas as frações também podem ser pensadas com outros significados, como relações parte-todo, proporções, quocientes, medidas ou operadores (KIEREN, 1980). A importância da magnitude para a compreensão de frações, bem como a sua relação com a flexibilidade e razoabilidade, são características elencadas por Powell e Ali (2018) como definidoras da compreensão de frações.

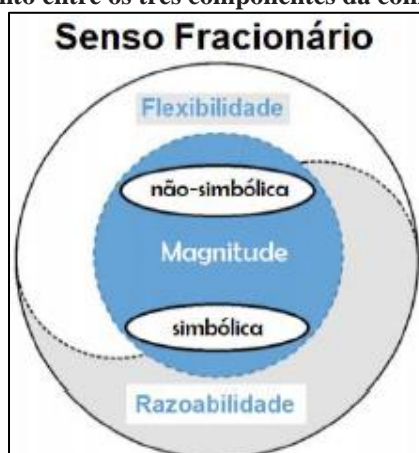
Os autores relacionam a compreensão de frações em três categorias que se sobrepõem e interagem: flexibilidade, razoabilidade e magnitude, tanto não-simbólica quanto simbólica,

sendo estas categorias uma síntese da compreensão numérica de um modo geral, e da qual a compreensão de frações é um subconjunto.

Segundo os autores, a flexibilidade refere-se a concepções, representações e estratégias de cálculo, resultando na capacidade de trabalhar com frações compreendidas nos seus diversos significados. Inclui também as frações simbólicas e não-simbólicas, possibilitando uma mudança de representação da forma escrita e visualização dessas frações para a considerada mais adequada. De acordo com Souza e Powell (2021, p. 82, tradução nossa), “a flexibilidade representativa é caracterizada pela engenhosidade mental da conexão de diferentes interpretações de frações: parte-todo, quociente, razão, operador, medida e o ato de medir”. Os autores esclarecem que as interpretações parte-todo, quociente, razão, operador e medida, tanto para Kieren (1976) quanto para Behr *et al.* (1983), são baseadas na noção de partição de uma quantidade, enquanto Powell (2019b) apresenta a noção de fração sob a perspectiva de medição, sendo a fração uma comparação multiplicativa entre duas quantidades.

A razoabilidade resulta na avaliação dos resultados ao operar, aproximar ou comparar frações, com o reconhecimento de frações equivalentes, sobre entender o posicionamento correto de uma fração na reta numérica, sobre refletir como uma operação envolvendo frações pode alterar um número, ou ainda, qual a consequência de realizar uma operação com um número fracionário, sendo este menor, maior ou igual a 1. Desta maneira, “uma vez que o cálculo tenha sido realizado, a razoabilidade do resultado seria considerada. Como uma continuação da expressão de senso fracionário, a razoabilidade chama plausibilidade para a questão” (POWELL; ALI, 2018, p. 236). Sendo assim, não existe limite entre flexibilidade e razoabilidade, porque “seus sentidos se informam mutuamente, também facilitam a apreensão do conceito de magnitude” (SOUZA; POWELL, 2021, p. 85, tradução nossa), e a compreensão da magnitude é o conceito central do senso fracionário (Figura 2.2).

**Figura 2.2 - O relacionamento entre os três componentes da compreensão de frações**



Fonte: Powell e Ali (2018, p. 237, tradução nossa).

Adicionalmente, Siegler (2016) afirma que o entendimento de magnitudes numéricas agrega conhecimento, tanto de frações quanto de números inteiros. Segundo o autor, “tanto para números inteiros quanto racionais, o conhecimento de magnitudes numéricas é correlacionado com preditivo de, e casualmente relacionado a outros aspectos cruciais da matemática, incluindo a conquista da matemática aritmética e geral” (SIEGLER, 2016, p. 341, tradução nossa). Para o autor, “o desenvolvimento numérico envolve a compreensão de que todos os números reais têm magnitudes que podem ser ordenadas e atribuídas localizações específicas em linhas numéricas” (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011, p. 274, tradução nossa). Desta maneira, compreender as magnitudes de fração pode ser um passo crítico para uma compreensão profunda do número.

Neste contexto, Booth e Newton (2012, p. 248) ponderam, citando Siegler, Thompson e Schneider (2011), que “a falta de compreensão da magnitude da fração é galopante entre as crianças em idade escolar, mas o conhecimento da magnitude da fração prevê a habilidade de cálculo de fração e o desempenho geral em matemática”.

Siegler *et al.* (2013) apontam três causas para a dificuldade dos alunos com as frações. A primeira seria a suposição errônea de que as propriedades dos números inteiros são adequadas para todos os números. A segunda seria a confusão com os procedimentos aritméticos de fração, pois, por exemplo, na adição e subtração de frações com o mesmo denominador, ele é mantido no resultado, o que não acontece com a multiplicação e a divisão. E a terceira causa de dificuldade é o fato de as crianças receberem a instrução de frações quase que exclusivamente na perspectiva parte-todo. Para os autores, um dos problemas de enfatizar esta única interpretação pode ser descrito na explicação de um aluno: “Você não pode ter quatro partes de um objeto que é dividido em três partes” (SIEGLER *et al.*, 2013, p.13, tradução nossa).

Como alternativa, Powell (2019b) propõe uma concepção que é coerente com o surgimento histórico das frações por meio da medição, utilizando as barras Cuisenaire. O autor realizou pesquisas com o objetivo de entender as potencialidades da perspectiva de medição e fração-*de*-quantidade para ampliar os entendimentos conceituais de magnitude de frações. Os resultados da investigação empírica indicaram que “os participantes se apropriaram da ideia de magnitude de frações-*de*-quantidade com base nas imagens evocadas das barras e, por si mesmo, construindo expressões de comparações fracionárias” (POWELL, 2019b, p. 50). A perspectiva da medição utilizada por Powell (2019b) remete às origens das frações, baseada no entendimento da prática social humana de comparar ou medir quantidades contínuas.

Nesse contexto, Powell (2018b) apresenta um instrumento pedagógico denominado Modelo Instrucional 4A. Este Modelo consiste em quatro fases de implementação de uma

“abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos, utilizando barras de Cuisenaire” (POWELL, 2018b, p. 409-410, tradução nossa).

**Quadro 2.1 - Quatro fases do Modelo Instrucional 4A, usando barras Cuisenaire**

Ações Concretas	<p>1. Engajar os poderes motores e mentais dos alunos (manipular, observar, ouvir, ver, escutar, abstrair, comparar, sequenciar, estressar e ignorar...). Instruí-los a manipular as barras de forma particular para que por meio de suas ações sobre as barras eles percebam as relações alvo entre elas.</p> <p>2. Introduzir a linguagem matemática, comparando-a, se necessário, com a linguagem não matemática que os alunos utilizam, e oferecer a eles oportunidades de praticar conversas matemáticas sobre o que eles realmente realizam e percebem com as barras.</p> <p>3. Fazer com que os alunos criem suas próprias situações de barra que correspondam ao que está sendo trabalhado.</p> <p>4. Pedir aos alunos que falem, desenhem e escrevam sobre o que aprendem e oferecer oportunidades para a prática.</p>
Ações Virtuais	<p>5. Envolver os alunos na ação virtual: manipulando imagens mentais das barras de modo semelhante ao que os alunos realizaram na ação real.</p> <p>6. Fazer com que os alunos criem sem barras suas próprias situações matemáticas que correspondam ao que está sendo trabalhado.</p> <p>7. Fazer com que os alunos falem e escrevam sobre o que aprendem e ofereça oportunidades para a prática.</p>
Ações Escritas	<p>8. Introduzir expressões e equações matemáticas que representem o que os alunos já podem realizar oralmente e virtualmente e proporcionar oportunidades para a prática com as barras disponíveis.</p> <p>9. Pedir aos alunos que criem expressões ou equações com ou sem barras disponíveis.</p> <p>10. Fazer com que os alunos falem e escrevam sobre o que aprendem e oferecer oportunidades para a prática.</p>
Ações Formais	<p>11. Formalizar simbolicamente ou como definição as ideias matemáticas, conceitos e procedimentos que têm sido a base das manipulações matemáticas reais e virtuais dos alunos com as barras.</p> <p>12. Fazer com que os alunos falem e escrevam sobre sua compreensão de suas ideias matemáticas em declarações formais, simbólicas ou de definição.</p> <p>13. Proporcionar oportunidades para que os alunos pratiquem suas entregas formalizadas, simbólicas ou de definições do que fizeram com as barras.</p>

**Fonte:** Powell, 2018b, p. 410 (tradução nossa).

Segundo Powell (2018b), o critério para a mudança de fases é a destreza do aluno com as ações manipulativas, a linguagem verbal e simbólica, as ações mentais e as ideias de uma fase instrucional. Por exemplo, para passar da fase de Ações Concretas para as Ações Virtuais, os alunos precisam estar confortáveis com a manipulação das barras, falando sobre o que estão fazendo e compreendendo, podendo *quase* realizar ações sem as barras.

A fase de Ações formais é o *ponto máximo* do Modelo. Nesta fase, as ideias matemáticas construídas pelos alunos nas três fases anteriores são discutidas e escritas usando linguagem formal e simbólica, utilizando algoritmos (POWELL, 2018b). Quando atingido esse nível, “o

algoritmo é experimentado como um encapsulamento ou traço simbólico de ações matemáticas significativas” (SCHMITTAU, 2003, p. 230).

### 2.3 As Barras Cuisenaire

Segundo Scheffer e Powell (2020, p. 485), as barras Cuisenaire constituem um material que “estimula a evidência e as manifestações de entendimentos de forma falada e escrita, o que contribui para a formalização de significados e conceitos matemáticos”. Para Gattegno (1960/2009, p. 53), o material Cuisenaire

fornece à criança os meios para esta atividade lúdica, e fornece todo tipo de jogos interessantes (no sentido normalmente aceito da palavra) através dos quais as habilidades que ela precisará podem ser adquiridas. [...] Esta é a abordagem verdadeiramente proveitosa - não a abordagem na qual estes elementos de experiência são feitos para servir como o meio de aprendizagem de aritmética.

Esse material pode ser usado para fundamentar uma perspectiva de medição para o conhecimento de fração, como uma relação particular de quantidades (GATTEGNO, 1974/2010). Sobre este ponto, Gattegno (1974/2010, p. 196, grifo do autor), com referência às barras Cuisenaire, resume o papel da medição na matemática elementar:

A medida, no trabalho com as barras, é emprestada da física e introduz a contagem pela porta dos fundos, pois é necessário saber *quantas* vezes a unidade foi usada para associar um número a um determinado comprimento. Mas a medida também é a fonte de frações e números mistos e serve mais tarde para introduzir números reais. Assim, a medida é uma ferramenta mais poderosa do que a contagem, a qual é usada como gerador de matemática. Contar ... pode ser interpretado novamente como sendo uma medida com barras brancas. Medida também é naturalmente uma interpretação da iteração [...].

As barras Cuisenaire têm muitos atributos. Um atributo é a cor e outro é o comprimento (Figura 2.3), o qual é usado para ser medido. Devido à sua simplicidade, enquanto os alunos trabalham em tarefas matemáticas, as barras Cuisenaire não geram uma carga cognitiva elevada (SWELLER, 1994; SWELLER; VAN MERRIENBOER; PAAS, 1998), pois concentram sua atenção principalmente nas relações entre as barras, buscando imaginar representações para pensar sobre frações, relações entre frações e operações sobre frações (POWELL, 2018b).

**Figura 2.3 - Barras Cuisenaire**



**Fonte:** Powell (2018b, p. 704).

Com as barras Cuisenaire, os alunos podem construir significados matemáticos e imagens mentais reconhecendo magnitude, ordem, igualdade e desigualdade, e realizando operações com números fracionários (POWELL, 2018b). Segundo Gattegno (1976), as barras Cuisenaire são provavelmente o melhor material físico para estudar as frações. No entanto, nas últimas décadas, as tecnologias digitais emergiram e se firmaram, sendo utilizadas para informação e comunicação, e mostraram-se de extrema importância em diversas áreas, inclusive na Educação. Isto foi acentuado a partir de março de 2020, devido à pandemia da COVID-19 causada pelo novo coronavírus — Sars-Cov-2. Escolas, professores e alunos tiveram que se adaptar, ou até mesmo reinventar-se para que as aulas não fossem totalmente interrompidas. Desta maneira, as aulas presenciais passaram a ser aulas remotas, e os encontros presenciais substituídos por encontros síncronos por meio de videochamadas e comunicadores instantâneos.

Para a realização desta pesquisa, foram utilizados dados secundários coletados no ano de 2020 advindos da utilização de tecnologias digitais, tanto para a organização e desenvolvimento das aulas (*WhatsApp, Google Meet, Google Drive*), como meio de ensino e de aprendizagem (*Applets<sup>1</sup>*), dentre eles, o Cuisenaire Digital<sup>2</sup>.

## **2.4 Contexto e Pressupostos Metodológicos**

Devido à instabilidade do cenário pandêmico global e as mudanças repentinas e intempestivas na organização e realização das aulas desde março de 2020, quando houve a suspensão do ensino presencial, utilizamos dados secundários nesta pesquisa, definidos por

---

<sup>1</sup> Applet é uma aplicação executada dentro de um site ou programa maior. Podem ser animações, simuladores, jogos, entre outros, que não necessitam de instalação no artefato utilizado.

<sup>2</sup> Applet com Barras Cuisenaire disponível em: <https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html>.

Malhotra (2004) como aqueles coletados para fins diferentes do problema em pauta, enquanto dados primários são os originados pelo pesquisador para solucionar o problema da pesquisa.

Sob o mesmo ponto de vista, Mattar (1996, p. 134), discute que “[...] dados secundários são aqueles que já foram coletados, tabulados, ordenados e, às vezes, até analisados, com propósitos outros ao de atender às necessidades da pesquisa em andamento”. Os dados secundários presentes nesta pesquisa constituem-se na gravação de 19 aulas planejadas e realizadas no Ensino Remoto de Emergência, pela plataforma *Google Meet*, com 22 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, distribuídos em 4 grupos, no período de 15 de setembro a 16 de outubro de 2020.

As aulas foram planejadas utilizando pressupostos do Ensino Exploratório de Matemática (EEM)<sup>3</sup>. Assim, as tarefas de natureza exploratória foram estruturadas considerando quatro fases: introdução da tarefa (IT), realização da tarefa (RT), discussão coletiva da tarefa (DCT) e sistematização das aprendizagens matemáticas (SAM), siglas que utilizamos no decorrer das análises. As fases de IT e RT foram realizadas em um encontro; e em outro, as fases de DCT e SAM. A IT foi realizada com cada grupo separadamente. Já as fases DCT e SAM foram realizadas com todos os alunos em outra reunião/aula, com pelo menos um dia de intervalo entre as duas primeiras fases. No quadro 2.2 estão apresentadas as tarefas desenvolvidas, seus objetivos e as datas de desenvolvimento das fases de cada tarefa, bem como o tempo das gravações.

**Quadro 2.2 - As Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de coleta de dados**

Continua

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento e minutos gravados		
		IT e RT		DCT e SAM
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	15/09/2020 G1: 124 min G3: 99 min	16/09/2020 G4: 100 min G5: 61 min	18/09/2020 Todos os alunos 91 min
Tarefa 2: Medindo com Barras <i>Cuisenaire</i> (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; - Compreender a representação fracionária.	22/09/2020 G1: 107 min G3: 87 min	23/09/2020 G4: 97 min G5: 80 min	25/09/2020 Todos os alunos 66 min
Tarefa 2: Medindo com Barras <i>Cuisenaire</i> (Parte 2)	- Comparar frações; - Compreender a adição de frações com denominadores iguais.	29/09/2020 G1: 112 min G3: 75 min	30/09/2020 G4: 105 min G5: 82 min	02/10/2020 Todos os alunos 112 min

Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; - Compreender adição e subtração de frações com denominadores diferentes.	14/10/2020 G1:95 min	14/10/2020 G4: 96 min G5:53 min	16/10/2020 Todos os alunos 76 min
------------------------	--	-------------------------	---------------------------------------	---

**Fonte:** Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 318).

A professora regente da turma e pesquisadora responsável por planejar e desenvolver as tarefas leciona matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e Médio na Rede Estadual de Ensino do Paraná, e possui experiência na utilização de tecnologia em sala de aula, tendo atuado por vários anos na Coordenação Regional de Tecnologias na Educação – CRTE do Núcleo Regional ao qual pertence, instrumentalizando professores para o uso de tecnologia em sala de aula.

Para organizar os encontros e formar os grupos, os estudantes preencheram um formulário no *Google Formulários* para verificar a disponibilidade de dias e horários, tipo de internet (3G, *wifi*) e artefato disponível (celular, *tablet*, computador com caixa de som e microfone, *notebook*). Com estas informações, seis grupos foram constituídos, com cinco alunos em cada um. A professora pesquisadora também criou um grupo de *WhatsApp* para cada grupo, objetivando: 1) o repasse de informações e a comunicação entre ela e os alunos antes das aulas; 2) orientação quanto aos estudos e auxílio com os artefatos tecnológicos aos que necessitassem, visto que os alunos tinham entre 10 e 11 anos de idade; e 3) como forma de solicitar auxílio da professora pesquisadora na fase de desenvolvimento da tarefa, pois embora estivesse conectada o tempo todo, desligava o áudio e a câmera para que, assim, os alunos fossem mais autossuficientes.

Após o início do desenvolvimento da tarefa, com a desistência de alguns alunos, ficaram quatro grupos (G1, G3, G4 e G5) constituídos por três a seis alunos, denominados por pseudônimos escolhidos por eles (Quadro 2.3).

**Quadro 2.3 – Codinome dos participantes**

Grupos	Participantes
G1	Docinho, Doguinha, Florzinha, Fofinha, Lindinha e Thor
G3	Boom, Flora, Maluquinha, Mazarect e Olívia
G4	Anubis, Bob, Fifo, Magrão, Spider-man e Ymercurius
G5	Luffy, Mulher Maravilha, Poster, Viúva Negra, Zorro

**Fonte:** Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 318).

Os dados coletados são provenientes das gravações e transcrições das 19 reuniões realizadas via *Google Meet*, totalizando 1.718 minutos de gravações, aproximadamente 29

horas. Na análise qualitativa, recebemos os dados não estruturados para, então, estruturá-los e interpretá-los (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2013). No entanto, de acordo com Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 447), a análise de dados da pesquisa qualitativa não é padrão, “pois cada estudo exige um esquema ou ‘coreografia’ própria da análise”. Dessa maneira, ao assistir as gravações, o vídeo era pausado nas cenas/falas dos alunos quando identificávamos expressões matemáticas referentes a atividades matemáticas desencadeadas pelas tarefas e pelos questionamentos da professora e dos colegas. Essas falas eram localizadas nas transcrições, juntamente com o print das telas e registros escritos dos alunos.

Portanto, este estudo é de caráter qualitativo e interpretativo (CRESWELL, 2010), cujas análises estão alicerçadas no quadro de fases do modelo instrucional 4A (Quadro 2.1) e no quadro diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários (Quadro 2.4) (POWELL, 2019b). Ressaltamos que a prática não foi orientada *a priori* pelo modelo instrucional 4A, mas buscamos identificar que atividades são mobilizadas pelos alunos nesses contextos de prática, objetivando a compreensão de frações.

O enfoque dado ao ensino de frações no significado parte-todo tende a conduzir os estudantes ao erro na compreensão de que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais (Quadro 2.4), trazendo, desta forma, dificuldades no conhecimento conceitual e procedimental dos números fracionários (POWELL, 2018a; 2019b). Portanto, conhecer e discutir as propriedades e diferenças dos números naturais e números racionais possibilita a reflexão sobre os números, operações e resultados que são produzidos (magnitude, flexibilidade e razoabilidade).

**Quadro 2.4 – Diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários**

Continua

Categoria de Propriedades	Propriedades	
	Números Naturais	Números Fracionários
(1) Sinalização de magnitude numérica	Mais dígitos quanto maiores a magnitude: $123 > 23$ . Numeral maior, maior número: $9 > 3$ .	Nem o número de dígitos no numerador ou denominador nem as magnitudes dos dígitos determinam a magnitude da fração: $\frac{8}{9} < \frac{432}{123}$ . Numerais de maior valor não indicam um número maior: $\frac{99}{100} < \frac{4}{3}$ .
(2) Representação simbólica	Não usando operações, a magnitude tem uma única representação simbólica: a magnitude de um conjunto de três itens é simbolizada unicamente com o número 3.	Não usando operações, a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas: um e meio itens = $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \dots$

(3) Densidade	<p>Cada número natural tem unicamente um antecessor imediato, um sucessor imediato ou ambos:          Para o 5, o antecessor imediato é 4 e o sucessor imediato é 6.          Entre quaisquer dois Números Naturais, o número de Números Naturais é finito: entre 2 e 7 tem quatro Números Naturais, 3, 4, 5 e 6.</p>	<p>Cada fração não possui nenhum antecessor imediato ou sucessor imediato.          Entre quaisquer duas frações existem infinitas outras frações.  <math>\frac{2}{7}</math> não é antecessor imediato de <math>\frac{3}{7}</math>          Entre as duas frações existe, por exemplo, este conjunto infinito de frações:  <math>\left\{ \frac{5}{14}, \frac{7}{21}, \frac{9}{28}, \frac{11}{35}, \frac{13}{42}, \dots \right\}</math>.</p>
(4) Produto e Quociente	<p>Multiplicação pode ser definida como adição repetida:  <math>3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3</math>.          Multiplicando-se dois Números Naturais diferentes de 1 ou 0 entre si produz-se um produto maior que os fatores:  <math>4 \times 3 = 12, 12 &gt; 4</math> e <math>12 &gt; 3</math>.          Dividindo-se quaisquer dois Números Naturais que sejam diferentes de 1 produz-se um quociente que é menor do que o dividendo:  <math>12 \div 3 = 4, 4 &lt; 12</math>.</p>	<p>Multiplicação como adição repetida é uma definição insuficiente:  <math>3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}</math>,          mas <math>\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}</math> não.          Multiplicando-se duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode-se produzir um produto menor que um dos dois fatores:  <math>\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \frac{1}{3} &gt; \frac{2}{15}</math> e <math>\frac{2}{5} &gt; \frac{2}{15}</math>          Dividindo-se duas frações diferentes de 1 entre si pode-se obter um quociente maior que o dividendo:  <math>\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2, 2 &gt; \frac{1}{2}</math>.</p>

**Fonte:** Obersteiner *et al.* (2019), apud Powell (2009b, p. 58).

Com o intuito de atingir o objetivo deste artigo, as análises foram estruturadas analisando os registros das reuniões das fases IT, RT, DCT e SAM (reuniões gravadas via *Google Meet*, transcrições e registros escritos), buscando nos registros e, principalmente, nos diálogos dos alunos, indícios da compreensão de frações, incluindo a magnitude dos números fracionários, frações equivalentes e operações com números na forma fracionária (adição e subtração). Procuramos diálogos e registros indicativos de expressões dos alunos sobre suas ideias matemáticas em declarações formais, simbólicas ou de definição, em que identificamos diferenciações e compreensões sobre as frações como medida, e das propriedades e diferenças entre Números Naturais e Números Racionais; magnitude de frações, senso numérico/fracionário; em que reconheçam que para uma mesma fração há uma infinidade de representações (frações equivalentes) para uma mesma magnitude; em que identifiquem as diferenças entre operar com Números Naturais e frações; introdução à álgebra.

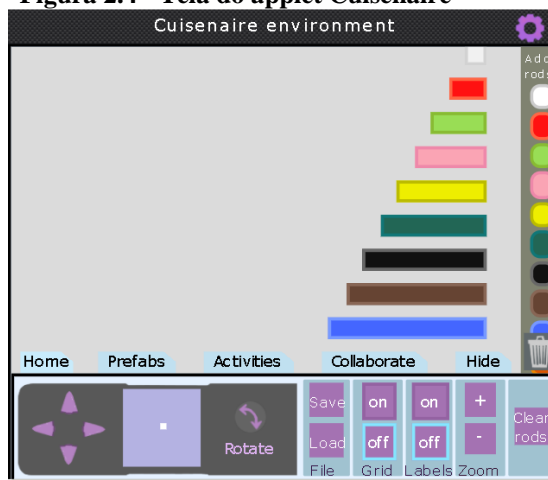
Analisamos as tarefas na ordem em que foram propostas e desenvolvidas (Tarefa 1, Tarefa 2 - parte 1 e 2 e Tarefa 3). Além das três Tarefas mencionadas, a pesquisa inicial incluía a Tarefa 4: Área e Perímetro de Quadriláteros, em que um dos objetivos era compreender a multiplicação e divisão de frações. Esta tarefa não foi utilizada para as nossas análises, pois foram utilizados outros *applets*, os quais não fazem parte do nosso objeto de estudo.

Apresentamos excertos dos grupos G1, G4 e G5, os quais participaram efetivamente de todas as tarefas e fases das aulas.

## 2.5 Análise de Dados

A tarefa 1 teve como objetivo inicial apresentar o *applet* das barras Cuisenaire e introduzir a ideia de fração como medida. Para isso, os alunos foram desafiados a medir o comprimento da região horizontal do *applet* (figura 2.4). Na fase IT, a professora questionou os alunos de que forma isso poderia ser feito, e após as discussões, todos os grupos chegaram à conclusão de que poderiam utilizar as barras para medir (*ninguém sugeriu usar régua!*). Ao manipular as barras, percebemos que apesar de ser algo novo, isso não gerou uma carga cognitiva elevada, pois, segundo Powell (2018b), devido à simplicidade das barras, os alunos concentraram a atenção principalmente na aquisição de conhecimentos sobre as relações entre elas.

Figura 2.4 - Tela do *applet* Cuisenaire



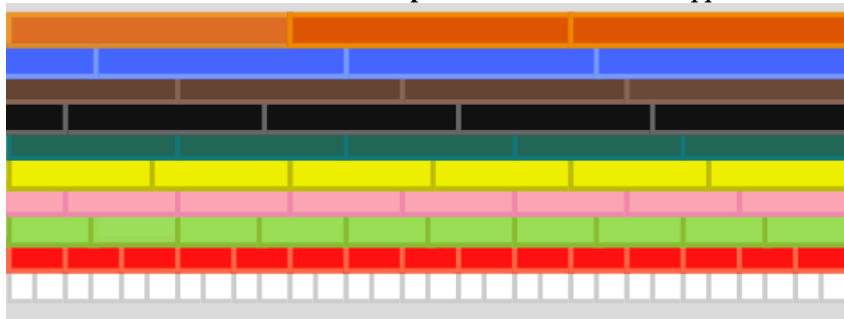
Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Identificamos que, ao pensar em como medir e depois escrever o comprimento horizontal do *applet*, os alunos, na fase de ações concretas do Modelo Instrucional 4A, estimulados a “manipular, observar, ouvir, ver, escutar, abstrair, comparar, sequenciar, estressar e ignorar” (POWELL, 2018b, p. 410), manipularam as barras e perceberam relações entre elas. Os estudantes observaram que alguns comprimentos das barras podem ser compostos por comprimentos de outras barras da mesma cor, envolvidos com comparações multiplicativas.

Os grupos G1, G3 e G5, ao medir o comprimento do *applet*, utilizaram 30 barras brancas, as quais foram utilizadas como referência de medida para as outras barras. Estes grupos encontraram barras inteiras que completavam o comprimento e outras que faltavam ou

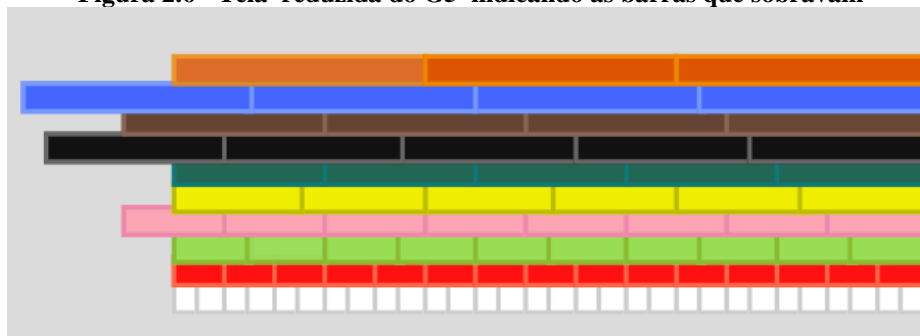
sobravam, no caso de utilizar mais uma barra inteira, como podemos observar nas figuras 2.5 e 2.6.

**Figura 2.5 - Tela do G5 indicando o comprimento horizontal do *applet* com as barras**



**Fonte:** Dados da pesquisa (2020).

**Figura 2.6 - Tela reduzida do G5 indicando as barras que sobravam**



**Fonte:** Dados da pesquisa (2020).

O G4 utilizou 31 barras, o que acabou acarretando que todas as outras barras ficaram incompletas, ocasionando alguns equívocos, sendo necessária a intervenção da professora. No entanto, na fase da DCT, isso trouxe ricas contribuições, pois possibilitou a discussão com exemplos concretos de conceitos, como números primos, múltiplos e divisores, como pode ser lido no excerto abaixo. Essa discussão foi retomada na Tarefa 3, quando os alunos escreveram as frações equivalentes solicitadas na tarefa e encontraram barras com mais frações equivalentes que outras. Eis a resposta de Poster:

**Poster:** Bem, como o comprimento horizontal deu 30 blocos e esses foram completos, deu para dizer que eles eram os números múltiplos deles.

**Professora:** Ah! Múltiplos. O que você entende por múltiplo?

**Poster:** Até alguns dos divisores, dá pra dizer.

**Professora:** Então, me dê um exemplo aí. Por exemplo, as brancas, vocês chegaram à conclusão que deram 30, né... E onde você está enxergando múltiplo e divisor?

**Poster:** No múltiplo dá para dizer pelo laranja, porque se perceber, os laranjas só têm três barras e  $3 \times 10$  vai dar 30.

[...]

**Professora:** Quem sabe dizer por que só a barra branca ficou inteira e o resto não?

**Luffy:** Porque 31 é um número primo.

**Professora:** Vocês concordam?

**Florzinha:** Concordo.

Tarefa 1 – DCT, 18/09/2020.

Ao registrar o comprimento horizontal do *applet*, os alunos utilizaram números na forma decimal e percentual. Nenhum grupo mencionou fração na tarefa 1, sendo necessária a intervenção da professora. No entanto, identificamos, nas expressões dos alunos, lidas no excerto a seguir, que, ao manipular as barras para escrever o comprimento horizontal do *applet*, os estudantes utilizam o *meio* (0,5) como referência para escrever o comprimento.

**Lindinha:** *É, professora, eu escrevi aqui 3,90 de barra azul; 4,40 de barra preta; 7,70 de barra rosa; e só, daí o resto é tudo número exato.*

**Professora:** *E isso vocês foram com algum embasamento de medida, ou como que vocês fizeram isso?*

**Lindinha:** *Tipo assim, a gente imaginou aqui, de barra preta, 4,40. Como é menos da metade, então a gente pensou 'ah, como tá quase na metade, podia ser 4,40 ou 4,45; na 7,70 era mais da metade, e era um pouquinho menos do inteiro, então a gente pensou que podia ser 7,80 ou 7,65, e daí a gente foi para 7,70.*

Tarefa 1 – G1, DCT, 18/09/2020.

O *meio* seria a *âncora*, termo utilizado por pesquisadores que investigam o senso numérico (CORSO; DORNELES, 2010; RESNIK, 1989; YANG, 2003), entendida como uma base para o raciocínio durante o processo de resolução de problemas matemáticos. Luffy (G5) afirma que a barra preta mede 4,25, e quando questionado pela professora sobre o que seria o 0,25, o aluno demonstra possuir elementos importantes do senso numérico discutidos por Yang, Hsu e Huang (2004), como compreender o significado dos números, reconhecer a magnitude dos números e utilizar pontos de referência, *âncora*, de forma adequada. No excerto a seguir, o aluno Luffy transita entre a forma decimal e percentual dos números racionais, utilizando o *meio* e o 50% como âncoras.

**Professora:** *E a preta?*

**Viúva Negra:** *4 e meio.*

**Professora:** *4 e meio. Todo mundo acha que é meio?*

**Luffy:** *4,25, seria?*

**Professora:** *O que vocês entendem por meio?*

**Luffy:** *50%.*

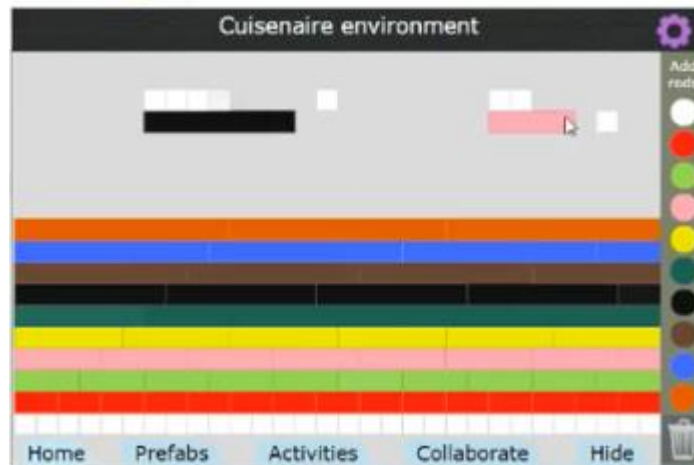
**Professora:** *E o que seria 0,25?*

**Luffy:** *Seria a metade da metade.*

Tarefa 1 - G5, RT, 16/09/2020.

Após serem *provocados* pela professora para escreverem o comprimento do *applet* utilizando frações, Luffy tenta inicialmente encontrar a medida comparando a barra preta e a barra branca, como pode ser observado na Figura 2.7.

**Figura 2.7 - Comparação barra preta com a branca**



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

No entanto, Poster sugere, para facilitar, utilizar a barra rosa. Desta maneira, após pensar um pouco, Luffy concorda e conclui que a medida do comprimento do *applet* utilizando a barra preta seria 4 inteiros e  $\frac{2}{7}$ . A medida encontrada se aproxima da medida estimada utilizando números na forma decimal, pois  $\frac{2}{7}$  é aproximadamente 0,28, próximo do 0,25 que foi estimado, demonstrando ter razoabilidade e flexibilidade também, ao representar uma fração não-simbólica para a forma escrita (simbólica), considerando a forma mais adequada.

Percebemos que, utilizando as barras Cuisenaire, o G5, por exemplo, abordou os números racionais na forma decimal, fracionária e percentual de maneira natural, sem a necessidade da intervenção da professora, possibilitando, desta forma, a discussão de que são formas diferentes de escrever o mesmo número.

A ideia de frações equivalentes surgiu à medida que os grupos escreveram o comprimento horizontal do *applet* com as barras, como pode ser lido nos excertos do G1 e do G5.

*Luffy: Tem a rosa também.*

*Poster: Cada bloco rosa vai dar 4 blocos brancos.*

*Luffy: Sim. Aqui tem 2 sobrando, então é  $\frac{2}{4}$ .*

*Poster: Certo. Ou seja, tenho que colocar a metade da rosa?*

*Luffy: Ou pode ser  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{2}{4}$ .*

Tarefa 1- G5. RT, 16/09/2020.

*Professora: O que a rosa é da marrom?*

*Docinho:  $\frac{2}{4}$ .*

*Professora:  $\frac{4}{8}$ . Ou o quê?*

**Docinho:** Metade [...] Tá, agora, a vermelha  $IV = \frac{2}{4}$  do R [...] E  $IV = \frac{2}{8}$  do M e o rosa é  $\frac{4}{8}$ , né. Acabei, professora.

Tarefa 2(parte1) - G1, RT, 22/09/2020.

**Luffy:** A azul a gente fez que tem 9. Acrescentando 2 [barras brancas] ao 7, que é o preto. E viu que aqui tem 3, só, e daí, já que tem 9, pode colocar  $\frac{3}{9}$  ou  $\frac{1}{3}$ .

**Professora:** E como você chegou à conclusão que pode ser  $\frac{1}{3}$ ?

**Luffy:** Porque  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{3}{9}$  é a mesma coisa, se você simplificar a fração, é a mesma coisa.

**Professora:** E como você poderia mostrar isso para mim com as barrinhas, Luffy?

**Luffy:** Só comparar com as barrinhas brancas.

**Professora:** Daí você falou para mim que  $\frac{3}{9}$  é igual a  $\frac{1}{3}$ , como que você poderia me mostrar isso?

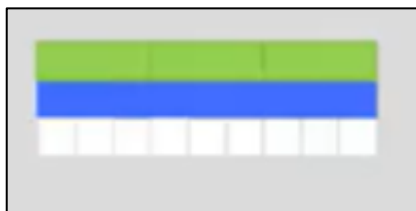
**Luffy:** É só você dividir 3 por 9 e 3 por 1.

**Professora:** Mas será que tem algum jeito de fazer com a barrinha? [silêncio] ajudem ele, gente.

**Luffy:** Ah, entendi. O verde tem o mesmo comprimento que 3. Se pegar 3 desses verdes dá o 9. E aqui seria a mesma coisa, você puxa e coloca aqui [comparando o espaço que falta no comprimento horizontal com a barra verde].

Tarefa 1- G5, RT, 16/09/2020.

**Figura 2.8 - Explicação do G5 da equivalência das frações  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{3}{9}$**



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

À medida que os alunos manipulam as barras, eles percebem que é possível escrever mais de uma expressão para o mesmo grupo de barras, e desta maneira, o conceito de frações equivalentes pode ser construído e compreendido. Como as frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  ou  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{3}{9}$  descrevem a mesma relação entre as barras, elas são chamadas de equivalentes. Embora reconhecer frações equivalentes não fosse objetivo da tarefa, as ideias sobre a equivalência surgiram na fase de RT e foram contempladas na DCT.

A tarefa 2 - parte 1, teve, como objetivos, compreender as relações de equivalência e representá-las algebricamente, bem como compreender equivalência de frações e representá-las simbolicamente. Para isto, os grupos deveriam, inicialmente, escolher uma letra para representar cada cor de barra. Coincidentemente todos os grupos escolheram as mesmas letras, conforme está descrito na Figura 2.9.

**Figura 2.9 - Letras escolhidas para representar as barras**

Branca = B	Vermelha = V	Verde Clara = C	Rosa = R	Amarela = A
Verde Escuro = E	Preta = P	Marrom = M	Azul = Z	Laranja = L

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

O National Mathematics Advisory Panel (NMAP, 2008) afirma que um conhecimento básico de frações é crucial para o sucesso dos alunos em Álgebra, sendo a introdução à Álgebra contemplada de maneira mais efetiva no 7º ano do Ensino Fundamental (BRASIL 2018; PARANÁ 2018; PARANÁ 2019), e assim como as frações, costuma ser um tema de muita dificuldade para os estudantes. No entanto, ao manipular as barras, utilizando letras para representá-las e estabelecer relações entre as suas medidas, houve a introdução da linguagem matemática, que foi comparada à linguagem não matemática pelos estudantes, quando, por exemplo, os alunos do G5 falaram que uma barra verde-clara é igual a  $\frac{1}{3}$  da barra azul, e na sequência, escreviam que  $1C = \frac{1}{3} Z$ , tendo, assim, a oportunidade de praticar conversas matemáticas sobre o que visualizavam com as barras e escrever expressões e equações, passando da fase concreta para a fase escrita (POWELL, 2018b), conforme podemos ver na Figura 2.10.

**Figura 2.10 - Resolução do item b da Tarefa 2 (parte1) pelo G5**



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

O excerto abaixo refere-se à quando a professora explica na SAM que os alunos haviam trabalhado com a álgebra.

**Professora:** Deixa eu conversar uma coisa importante com vocês. A primeira coisa que eu quero saber é: vocês acharam muito difícil trabalhar com letrinha?

**Ymercurios:** Não.

**Docinho:** Sim, mais ou menos.

**Florzinha:** Não.

**Professora:** É a primeira vez que vocês trabalham com letrinhas, não é?

**Florzinha:** É.

**Professora:** Vocês sabiam que muita gente larga a escola por causa disso? Vocês sabiam que isso que vocês acabaram de fazer se chama álgebra? Vocês substituíram o nome das barras por letrinhas. Quando a gente coloca a letrinha na matemática, a gente está trabalhando com a ideia de álgebra, que vocês vão aprender bastante lá no 7º ano. Outra coisa que eu quero

*entender, para vocês me explicarem, o que vocês fizeram com as barras, só brincaram? Que ação vocês fizeram nessa tarefa?*

**Poster:** Além da brincadeira, também a medição.

Tarefa 2 (parte1) - SAM, 25/09/2020.

De acordo com Booth e Newton (2012), como as regras para operar com frações podem ser generalizadas, as frações podem ser uma excelente maneira de introduzir o uso de variáveis.

No item b da tarefa 2 (parte 1), cada integrante do grupo deveria escolher uma barra e, na sequência, o grupo iria escrever todas as combinações de barras de uma única cor e que fossem do mesmo tamanho da barra escolhida, formando o máximo de combinações possíveis. Todos os grupos demonstraram ter compreendido as relações de equivalência, representando-as algebricamente, escrevendo as relações de equivalência da barra maior para a menor, e da menor para a barra maior. O excerto abaixo, retirado da fase de DCT, exemplifica as discussões realizadas pelos grupos.

**Professora:** Então, olha só, eles escreveram com linguagem escrita e depois escreveram com as letrinhas. Lembra quando a professora fala que a matemática parece um bicho preguiçoso? Vive inventando coisa para fazer atalho, por quê? Porque realmente facilita essa representação matemática ali, certo?

**Florzinha:** Sim.

**Professora:** Ganha tempo, não ganha? E o que você escreveu para frente, ali, que  $1B =$  ao quê?

**Docinho:**  $= \frac{1}{2}$  do V.

**Professora:** E o que mais?

**Docinho:**  $1B = \frac{1}{5}$  do A e  $1B = \frac{1}{10}$  do L.

**Professora:** Isso. Então, primeiro eles colocaram as unidades de medida como sendo o branco, o laranja, o amarelo, o vermelho; então, que tamanho que é isso em relação ao laranja? Nossa unidade de medida era o laranja, depois eles inverteram. Eles colocaram que a branca é metade do vermelho, que a branca é  $\frac{1}{5}$  do amarelo e que a branca é um  $\frac{1}{10}$  da laranja, certo? E fizeram com outras barras, a barra de baixo é da azul, não é?

**Docinho:** Sim.

**Professora:** Então pode ler.

**Docinho:** 9 barras brancas, 3 verdes claro para completar a barra azul.  $9B = 1Z = 3C$ .

**Professora:** E depois?

**Docinho:**  $1V = \frac{2}{5}$  do A,  $1V = \frac{2}{10}$  do L,  $1A = \frac{5}{10}$  do L.

**Professora:** Isso, esses ainda eram em relação à barra laranja, eu nem tinha visto que estava continuando. Depois você organiza melhor [...] E a terceira linha é da barra azul também, pode falar.

**Docinho:**  $1B = \frac{1}{3}$  do C,  $1B = \frac{1}{9}$  do Z e  $1C = \frac{3}{9}$  do Z.

**Professora:** Ok. Daqui a pouco vamos ver se tem mais coisas. Pode falar da preta.

**Docinho:** 7 barras brancas para completar uma barra preta.  $1B = \frac{1}{7}$  do P.

Tarefa 2 (parte1) - G1, DCT, 25/09/2020.

Identificamos que o G5 compreendeu magnitude na fase de DCT, quando, após apresentar as relações de equivalência encontradas com as barras que foram escolhidas, Poster explicou:

**Professora:** E o que vocês entenderam por equivalente?

*Poster: Equivalente é o que pode ser, por exemplo, com números diferentes, mas o valor pode ser, é igual.*

Tarefa 2 (parte1) - G5, DCT, 25/09/2020.

Ainda na fase SAM, a professora perguntou se, ao pensar em equivalência de barras, teria alguma diferença escrever  $R = 2V$ , ou  $2V = R$ , quando Ymercurios respondeu que não. Essa questão remete à possibilidade de abordar, com as barras, equações, um conteúdo que, de acordo com a experiência da primeira autora como professora da Educação Básica, causa dificuldade não só a estudantes do 7º ano, quando são introduzidas as equações do primeiro grau, mas também a estudantes do Ensino Médio. Eles têm dificuldade, por exemplo, em reconhecer que, ao inverter o 1º e o 2º membro de uma equação, o valor da incógnita não se altera.

Finalizando as discussões, na fase SAM, a professora aborda a questão de a fração como medida ser representada por dois algarismos (numerador e denominador), quando os alunos demonstram compreender as frações equivalentes que representam o inteiro (senso fracionário). A professora questiona se alguém ainda achava que a fração como medida representa dois números e o que ela significa, conforme mostra o excerto a seguir.

*Professora:[...] Então, uma coisa que tem que ficar claro para vocês, frações equivalentes são frações que têm a mesma medida. Então, por isso que  $1 = \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$ , porque são equivalentes, tudo bem? [...] Agora, uma outra coisa importante que eu tenho para falar para vocês, quem acha que fração é dois números?*

*Ymercurios: Um número só.*

*Professora: É um número só, mas o que a fração um meio significa?*

*Ymercurios A metade do número.*

Tarefa 2(parte1) - G4, DCT, 25/09/2020.

No início da segunda parte da tarefa 2, os grupos deveriam escrever as combinações de barras de mesmo tamanho, mas poderiam utilizar barras de cores diferentes e, na sequência, comparar as frações encontradas utilizando os símbolos de < e >. A tarefa tinha por objetivo a soma de frações com denominadores iguais, estabelecendo relações aditivas e comparativas com frações de mesma unidade de medida. Embora longo, o excerto a seguir apresenta a construção da ideia, possibilitando a verificar se o resultado faz sentido (razoabilidade) (POWELL; ALI, 2018).

*Professora: Lembra das tarefas passadas [em] que vocês fizeram uma comparação, e a gente podia dizer, por exemplo, que uma rosa é igual [a] duas vermelhas.*

*Docinho: Ah! Uma laranja igual a uma azul e uma branca.*

*Professora: Muito bem, e você também pode falar que uma laranja é igual a uma branca mais uma azul, não é?*

*Docinho: Uhum.*

*Professora: A laranja é o que, da azul e da branca?*

**Docinho:**  $\frac{1}{9}$ ?

**Professora:** Então, essa é outra combinação que pode colocar lá. E como a gente escreve isso matematicamente?

**Docinho:**  $1L = 1Z$  e  $1B$ .

**Professora:** E trocando  $1Z$  e  $1B$  por fração em relação à laranja, como a gente pode fazer?

**Docinho:**  $1Z = \frac{9}{10}$  da  $L$  e  $1B = \frac{1}{10}$  da  $L$ .

**Professora:** Concordam, gente? [...] E como que a gente pode escrever matematicamente que uma coisa laranja, por exemplo, sem usar laranja.  $1 =$  ao que de fração?

**Docinho:**  $= \frac{9}{10}$  da  $L$  e  $\frac{1}{10}$  da  $B$ .

**Professora:** E a gente pode trocar esse “e” por qual símbolo matemático? O que vocês estão fazendo com a barra azul e a branca para ficar no tamanho da laranja?

**Lindinha:** A gente está juntando.

**Professora:** E que símbolo a gente usa na matemática quando vai juntar alguma coisa?

**Docinho:** Igual? Mais?

**Professora:** Igual ou mais, gente?

**Lindinha:** Mais.

**Professora:** Concordam?

**Docinho:** Concordo.

**Professora:** Então, como vocês podem escrever usando esse símbolo matemático?

**Docinho:** Que a laranja é  $= \frac{9}{10}$  da azul +  $\frac{1}{10}$  do  $B$ .

**Professora:** De novo, o que a gente pode falar? Para ficar claro para todo mundo.

**Lindinha:**  $1L = \frac{1}{10}$ .

**Docinho:** Não,  $\frac{9}{10}$ .

**Lindinha:**  $\frac{9}{10}$ ... dá  $1Z + 1B$ .

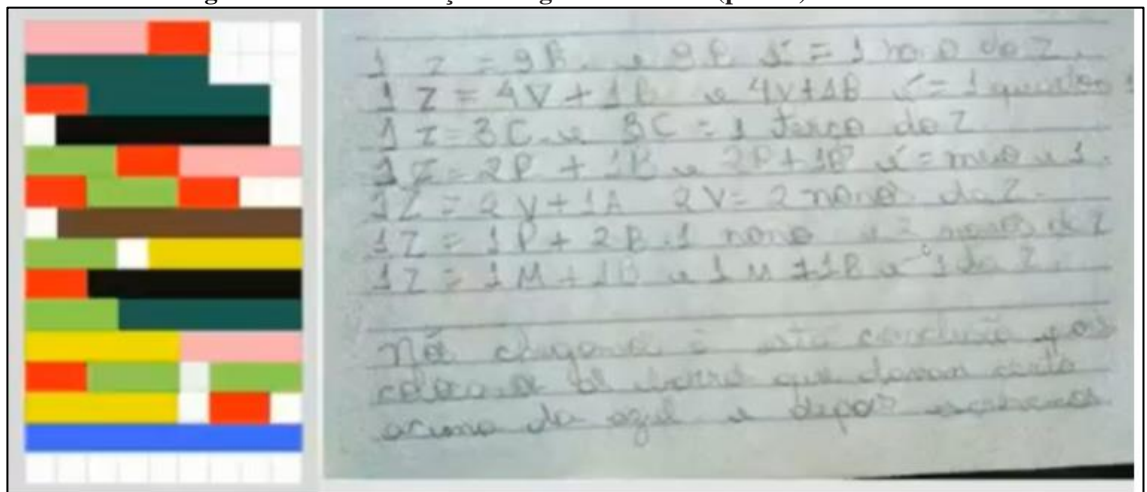
**Professora:** E só usando fração, sem usar barra laranja ou escrever  $L$ ,  $Z$  e  $B$  tal?

**Docinho:**  $L = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10}$ .

Tarefa 2 (parte2) – G1, RT, 22/09/2020.

Ressaltamos que o G5 conseguiu realizar todas as combinações possíveis para a barra amarela (16), escrevendo as relações aditivas e comparativas de frações (Figura 2.11). Os outros grupos também conseguiram estabelecer as relações, mas a barra escolhida dificultou escrever todas as relações possíveis, como no caso do G1, que escolheu a barra laranja (seriam 512 combinações diferentes).

**Figura 2.11 – Combinações e registros tarefa 2 (parte2) G5**



**Fonte:** Dados da pesquisa (2020).

Para realizar essa tarefa, os estudantes compararam e operaram expressões de frações-de-quantidade simbólicas utilizando as barras. No entanto, na fase de DCT, ao serem questionados pela professora sobre a adição e subtração de algumas frações sem a utilização das barras Cuisenaire, os alunos demonstraram estar na fase de *Ações Formais*, quando as ideias são discutidas e escritas usando linguagem formal e simbólica, utilizando algoritmos (POWELL, 2018b), conforme mostra o excerto a seguir.

**Professora:** O nosso objetivo era comparar frações e compreender adição de frações com denominadores iguais. O que o Luffy acabou de apresentar é soma de fração com denominadores iguais, e o que vocês também fizeram no grupo, então,  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$  é quantos quintos?

**Luffy:**  $\frac{3}{5}$ .

**Professora:** Vocês compreendem isso? Que, por exemplo,  $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$  quantos terços vai dar?

**Docinho:**  $\frac{7}{3}$ .

**Professora:** Isso,  $\frac{7}{3}$ .

**Docinho:** Professora, então a gente soma só a parte de cima?

**Professora:** Apesar de ser um único número, sim, mas vocês sabem por que, agora, né? Que não é só questão de somar só o de cima, é porque o que acontece é realmente aquilo ali, se a gente pegar o oitavo [barra marrom], se eu pegar um oitavo mais dois oitavos, quantos oitavos nós temos?

**Luffy:**  $\frac{3}{8}$ .

**Professora:** Mas agora vocês entenderam que não é só uma questão de só somar o de cima, é porque as partes são iguais, a gente pode converter tudo para a mesma unidade de medida, que em relação ao marrom, a gente pega a unidade branca, que é  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ , que são três oitavos. Então é por isso, é como se eu somasse só a parte de cima? É, e isso serve, gente, não só para as barras Cuisenaire, se você for pegar aqui  $\frac{3}{15} + \frac{7}{15}$ , tem como? Da quanto?

**Luffy:**  $\frac{10}{15}$ .

**Professora:** Isso, porque não mudou a nossa unidade de medida, então a gente consegue somar. E na subtração, será que é a mesma coisa? Se eu pegar, assim,  $\frac{3}{8} - \frac{1}{8}$  quanto que dá isso?

**Docinho:**  $\frac{2}{8}$ .

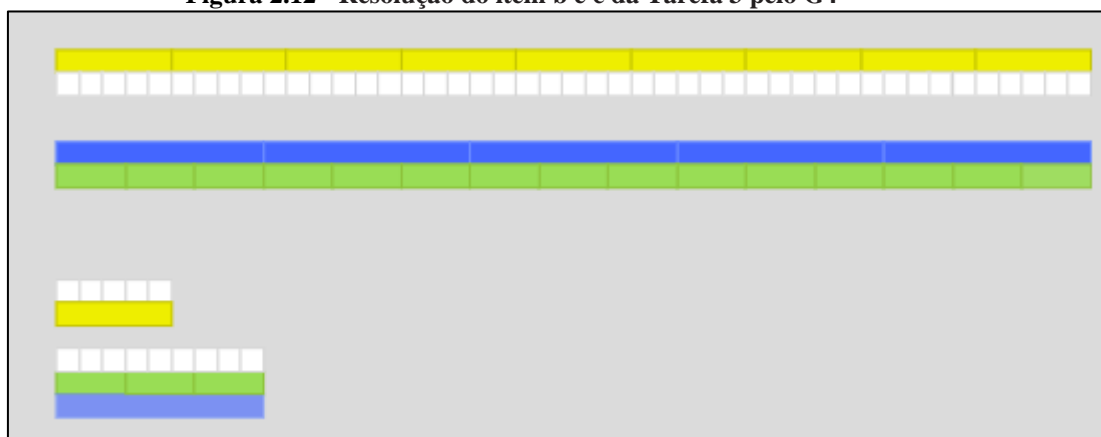
Tarefa 2 (parte2), DCT, 02/10/2020.

A tarefa 3 teve como objetivo comparar e compreender a adição e subtração de frações de unidades de medidas diferentes (denominadores diferentes). A tarefa teve início com um jogo utilizando as barras Cuisenaire, o jogo do trem. Ele foi jogado em duplas, e cada jogador escolheu uma cor de barra para ser o vagão, e unindo as barras (de mesma cor), formam o seu trem. Esse jogo inicia com o jogador que escolher a barra menor, e o jogador que está com o trem menor tem direito a fazer uma nova jogada (não importando o número de vezes). O jogador vencedor é aquele que, ao colocar uma barra, faz seu trem ficar do mesmo tamanho que o do adversário.

Após algumas rodadas, todos os grupos conseguiram identificar a melhor estratégia para ganhar o jogo: escolher a barra menor. Para dar sequência à tarefa, os grupos deveriam escolher

uma das rodadas do jogo e escrever a fração que o vagão de cada trem representava em relação ao trem inteiro, e construir trens do mesmo tamanho e da mesma cor de cada vagão de cada um dos jogadores, escrevendo, na sequência, frações equivalentes aos trens e vagões. G4 escolheu os vagões amarelo e azul. Foram necessários 5 vagões azuis e 9 vagões amarelos para finalizar o jogo. Desta forma,  $\frac{1}{5}$  representa a fração do vagão azul; e  $\frac{1}{9}$ , a fração do vagão amarelo (Figura 2.12).

**Figura 2.12 - Resolução do item b e c da Tarefa 3 pelo G4**



**Fonte:** Dados da pesquisa (2020).

G4 e G5 também não encontraram dificuldade em adicionar e subtrair as frações com denominadores diferentes após encontrar as frações equivalentes e escolher aquelas com a mesma unidade de medida para operar. No entanto, G1 e G4 necessitaram da intervenção da professora ao comparar as frações (magnitude), como é expresso no excerto abaixo, pois utilizavam propriedades dos números naturais.

**Professora:** O que é maior,  $\frac{1}{5}$  ou  $\frac{1}{9}$ ?  
**Spider Man e Ymercúrios:**  $\frac{1}{9}$ !

Após observarem no Cuisenaire, chegam à conclusão que  $\frac{1}{5}$  é maior que  $\frac{1}{9}$ .

**Professora:** Por que vocês estavam achando que  $\frac{1}{9}$  é maior?  
**Ymercúrios:** porque é maior, os números! O nove é maior que o cinco.

Tarefa 3, RT, G4, 14/10/2020.

A utilização das barras foi de suma importância para discutir e esclarecer a diferença entre as propriedades dos Números Fracionários e Naturais, conforme é apresentado no excerto.

**Professora:** [...] Continua, Docinho.  
**Docinho:** A maior fração é a do azul, que é  $\frac{1}{4}$  maior do que  $\frac{1}{9}$ , pois não podemos dizer que é maior que pelos números, e sim independente das barras que medimos.  
**Professora:** Explica para a galera o que você quis dizer com isso.

**Lindinha:** A gente falava que  $\frac{1}{9}$  era maior do que  $\frac{1}{4}$  por causa dos números, porque 9 é maior do que 4, só que daí a professora foi e explicou que a gente tem que usar como medida as barras, e daí como a gente viu que a azul é maior do que a rosa, daí um  $\frac{1}{4}$  é maior do que  $\frac{1}{9}$ .

Tarefa 3 - SAM, 16/10/2020.

G1 escolheu os vagões rosa e azul. Foram necessários 4 vagões azuis e 9 vagões rosa para finalizar o jogo. Desta forma,  $\frac{1}{4}$  representa a fração do vagão azul; e  $\frac{1}{9}$ , a fração do vagão rosa. Para a barra rosa, o grupo encontrou  $\frac{1}{9}$  equivalente a  $\frac{2}{8}$  e  $\frac{4}{36}$ ; e para a barra azul,  $\frac{1}{4}$  equivalente a  $\frac{3}{12}$  e  $\frac{9}{36}$ . Encontrar e compreender frações equivalentes e escolher as frações adequadas para comparar, adicionar e subtrair frações com denominadores diferentes, próximos itens da tarefa, contribuiu para o desenvolvimento do senso fracionário (flexibilidade, razoabilidade e magnitude). O excerto abaixo expressa que o G1 não encontrou dificuldades para realizar a adição de frações de denominadores diferentes. O resultado da operação também foi demonstrado pelo grupo com as barras na DCT (razoabilidade) (POWELL; ALI, 2018).

**Professora:** [...] olhem para as frações que vocês escreveram equivalentes à rosa, lá no item b).

**Docinho:**  $\frac{2}{18}$  e  $\frac{4}{36}$ .

**Professora:** T, e da azul?

**Docinho:**  $\frac{3}{12}$  e  $\frac{9}{36}$ .

**Professora:** Onde você tem unidade de medida igual? Tanto para a rosa quanto para azul?

**Docinho:**  $\frac{4}{36}$  e  $\frac{9}{36}$ .

**Professora:** Exato. Vocês podem fazer essa soma.

**Docinho:** Professora, mas ali está pedindo da a [referindo-se a tarefa a].

**Professora:** Mas  $\frac{1}{9}$  não equivale a  $\frac{4}{36}$ ?

**Docinho:** Sim.

**Professora:** Então, você pode fazer isso tanto para a rosa quanto para a azul e encontrar a mesma unidade de medida.

**Docinho:** Então vai dar  $\frac{13}{36}$ .

**Professora:** Pronto. Mas agora, escrevam por que vocês estão fazendo isso e por que dá esse resultado.

**Docinho:** Estou fazendo aqui.

**Lindinha:** Professora, eu não entendi a pergunta porque nós estamos falando disso e onde nós queremos chegar.

**Docinho:** Posso falar, professora, para ver se eu entendi?

**Professora:** Pode.

**Docinho:** A gente está somando esses dois números porque eles são o mesmo valor que  $\frac{1}{9}$  e  $\frac{1}{4}$ , são equivalentes.

**Professora:** Entendeu, Lindinha?

**Lindinha:** Sim.

Tarefa 3 – G1. DCT, 16/10/2020.

**Professora:** Por que vocês usaram a barra verde clara também, né?

**Luffy:** Sim, para medir a azul. E a fração  $\frac{1}{2}$  é maior do que a fração  $\frac{1}{9}$  porque  $\frac{1}{2}$  equivale a 50% do trem, e  $\frac{1}{9}$  equivale por volta de 10 ou 11% do trem. Agora, [n]a d) a gente transformou

a fração  $\frac{1}{2}$  em  $\frac{9}{18}$  e a  $\frac{1}{9}$  em  $\frac{2}{18}$  para a gente conseguir somar e chegar à conclusão que  $\frac{2}{18} + \frac{9}{18}$  equivale a  $\frac{11}{18}$ . Agora,  $[\frac{1}{2}]$  e  $\frac{1}{2}$  equivale a  $\frac{9}{18}$ , e a  $\frac{1}{9}$  equivale a  $\frac{2}{18}$ , e  $\frac{9}{18} - \frac{2}{18}$  equivale a  $\frac{7}{18}$ .

Tarefa 3 – G5. DCT, 16/10/2020.

## 2.6 Considerações finais

Embora não tenha sido objeto de análise deste estudo, verificamos que o fato de as tarefas terem sido planejadas, elaboradas, e as aulas desenvolvidas assentes em práticas exploratórias, interferiu positivamente para os resultados alcançados. Isso porque o EEM preza pela interação, envolvendo o professor e os alunos no processo de ensino e de aprendizagem. A metodologia de ensino proporcionou que os alunos, inicialmente em grupos e posteriormente no coletivo, manipulassem, observassem, ouvissem, comparassem, *estressassem* (pois estão acostumados a ter respostas diretas do professor), discutissem e, desta maneira, percebessem as relações entre as barras, favorecendo que as ideias matemáticas fossem construídas, passando da fase das Ações Concretas para a Fase de Ações Formais (POWELL, 2018b).

Identificamos que, inicialmente, os alunos não falavam sobre frações, recorrendo aos números na forma decimal e percentual para responder às questões da tarefa 1. Contudo, com o uso das barras, conseguiram compreender que um número racional pode ser escrito na forma fracionária, e não apenas na forma decimal e percentual (flexibilidade), e que apesar da fração como medida ser escrita com dois algarismos, representa um único número. Além disso, compreenderam a diferença da magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, reconhecendo que cometiam erros ao operar com frações por utilizarem propriedades dos números naturais.

Em relação à utilização da *âncora*, considerada como base para o raciocínio durante o processo de resolução de problemas matemáticos (CORSO; DORNELES, 2010; RESNIK, 1989; YANG, 2003), inicialmente os alunos utilizavam o meio (0,5) e o 50% como âncora; posteriormente evoluíram para a compreensão e utilização do  $\frac{1}{2}$  e do inteiro (senso fracionário). Houve também a compreensão das frações equivalentes, ou seja, os alunos entenderam que podem escrever frações que têm a mesma magnitude (mesma medida) por representações simbólicas diferentes, e utilizar as mais adequadas para adicionar e subtrair frações com unidades de medida diferentes (denominadores diferentes).

Adicionalmente, verificamos que a linguagem algébrica foi introduzida sem gerar qualquer carga cognitiva. Em outras palavras, os alunos utilizaram letras para representar as barras e escrever expressões e equações para estabelecer relações entre suas medidas

naturalmente, revelando que a atividade matemática com as barras Cuisenaire constituiu-se em um recurso importante para a introdução da linguagem algébrica e/ou a outros temas relacionadas à Álgebra.

## 2.7 Referências

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BEHR, M. J. *et al.*. Rational Numbers Concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.

BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012.  
Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392>.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC\\_C\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf). Acesso em: 15, fev.2022.

CORSO, L.V.; DORNELES, B.V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática. **Revista Psicopedagogia**. v. 27, n. 93, p. 298-309, 2010.

CRESWELL, A. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativo e misto**. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Fracciones: comprensión de alumnos del 6º año en prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición. **Paradigma**, [S. l.], v. 42, n. 3, p. 307-339, 2021. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p307-339.id1133. Acesso em: 22 nov. 2021.

ESPADINHA, T. B. **O Desenvolvimento das Representações da Magnitude de Números Fracionários**. 2015. 72 f. – Faculdade de Psicologia, Medicina, Ciências e Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa 2015.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 205-214, 2019.

GATTEGNO, C. Arithmetic: A teacher's introduction to the Cuisenaire-Gattegno methods of teaching arithmetic. New York: **Educational Solutions Worldwide**, 1960/2009.

GATTEGNO, C. The commonsense of teaching mathematics. New York: **Educational Solutions Worldwide**, 1974/2010.

GATTEGNO, G. C.; HOFFMAN, M. R. **Handbook of activities for the teaching of Mathematics at the elementary school**. New York: Human Education, 1976.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. (Org.). **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. *In*: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p.125- 150, 1980.

MALHOTRA, N. K. **Pesquisa de marketing**: uma orientação aplicada. São Paulo: Editora Bookman, 2004.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing**: metodologia, planejamento. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

MCINTOSH, A.; REYS, B.; REYS, R.E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 2-8., 1992.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações**. Curitiba, PR: SEED/PR. 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 20 nov. 2021.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba, PR: SEED/PR. 2019. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 20 nov. 2021.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. *In*: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)**: Contribuições para Pesquisa e Ensino. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM**: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

RESNIK, L. B. Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, v.44, n.2, p.162–169, 1989. Disponível em: <https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162>. Acesso em: 15 set. 2021.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, F. C.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. 5. ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.9, n.20, 2020.

SCHMITTAU, J. Cultural-historical theory and mathematics education. In: KOZULIN, A.; GINDIS, B. et al. (ed). **Vygotsky's educational theory in cultural context**. Cambridge, UK: Cambridge, 2003, p. 225-245.

SIEGLER, R. S. *et al.* Early Predictors of High School Mathematics Achievement. **Psychological Science**, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

SIEGLER, R. S. *et al.* Fractions: the new frontier for theories of numerical development. **Trends in Cognitive Sciences**, v. 17, n. 1, p. 13-19, 1//. 2013. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661312002653>. Acesso em: 10 Set. 2021.

SIEGLER, R. S.; THOMPSON, C. A.; SCHNEIDER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, v. 62, n. 4, p. 273-296, 2011. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001002851100003X>.

SIEGLER, R. S. Magnitude knowledge: the common core of numerical development. **Developmental Science**, v. 19, n. 3, p. 341-361, 2016.

SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Como os livros didáticos do Brasil, Estados Unidos e Japão lidam com frações? **Acta Scientiai**, Canoas, v. 23, n. 4, p. 77-111, 2021

SWELLER, J. Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. **Learning and instruction**, v. 4, n. 4, p. 295-312, 1994.

SWELLER, J.; VAN MERRIENBOER, J. J.; PAAS, F. G. Cognitive architecture and instructional design. **Educational psychology review**, v. 10, n. 3, p. 251-296, 1998.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.

YANG, D. C.; HSU, C.J.; HUANG, M.C. A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 2, n. 3, p. 407-430, 2004.

### 3 FRAÇÕES: POR QUE NINGUÉM ENSINOU DESSE JEITO?

Margaret Charnei<sup>1</sup>  
Maria Ivete Basniak<sup>2</sup>

**Resumo:** Este estudo teve como objetivo investigar as dificuldades dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quanto às frações como campo diverso dos números naturais, quando apresentados às frações na perspectiva da medição proposta por Powell (2018b), tendo já estudado frações na perspectiva parte-todo. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, alicerçada no quadro de diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários, e pautada nos registros escritos dos alunos, gravações de reuniões e transcrições, em que se buscou identificar elementos que revelem e evidenciem as dificuldades na compreensão de frações, tendo seu ensino iniciado na perspectiva parte-todo. Como resultado, verificou-se que, na categoria sinalização de magnitude numérica, os alunos não conseguiam reconhecer o tamanho dos números fracionários, mesmo de forma não simbólica, tendo dificuldade em compreender que as barras representavam frações. Ao comparar frações e realizar operações, utilizavam as propriedades e os procedimentos assumidos pelos números naturais. Na categoria representação simbólica, apresentaram dificuldades em representar uma fração de maneira simbólica e de reconhecer que um número fracionário de mesma magnitude possui infinitas representações. O estudo conclui que essas dificuldades podem ser superadas com práticas pedagógicas exigentes, abordando frações na perspectiva da medição, utilizando as barras Cuisenaire.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. Barras Cuisenaire. Parte-todo. Medida.

#### FRACTIONS: WHY DID NO ONE TEACH IT THIS WAY?

**Abstract:** This study aims at investigating difficulties of 6<sup>th</sup> grade elementary school students in understanding fractions as a different field of natural numbers, when presented to fractions from the measurement perspective proposed by Powell (2018b), having the initial training on fractions in the part-whole perspective. This is a qualitative research of interpretative nature, based on the framework of differences of natural numbers and fractional numbers properties, and guided by the written records of students, recordings of meetings and transcripts, in which it was sought to identify elements that reveal and highlight the difficulties in fractions understanding when fractions teaching started from the part-whole perspective. As a result, it was found that in the category of signaling numerical magnitude, the students could not recognize the size of fractional numbers, even in a non-symbolic way, having difficulty understanding that the bars represented fractions. When comparing fractions and performing operations, they used the properties and procedures undertaken by natural numbers. In the symbolic representation category, they presented difficulties in representing a fraction in a symbolic way and in recognizing that a fractional number of the same magnitude has infinite representations. The conclusion is that the difficulties presented could be overcome with

---

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Margaret.charnei@escola.pr.gov.br

<sup>2</sup> Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM. Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, basniak2000@yahoo.com.br

pedagogical practices approaching fractions from the measurement perspective, using the Cuisenaire rods.

**Keywords:** Mathematics teaching. Cuisenaire rods. Part-whole. Measurement.

### 3.1 Introdução

Tenho um aluno que está fazendo cálculo I pela terceira vez; já aprendeu razoavelmente as regras de derivação. Para ele, um terço menos um nono dá um sexto. Quando os colegas se espantaram, ele corrigiu para menos um sexto (BALDINO, 2006 *apud* BERTONI, 2008, p. 211).

As dificuldades relacionadas aos números fracionários são salientes nos diferentes níveis de ensino, em que os alunos apresentam “dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos” (CAMPOS; RODRIGUES, 2007, p. 70).

De acordo com Fuchs *et al.* (2013), a competência com frações é considerada fundamental para aprender Álgebra. Os autores apresentam uma pesquisa em que, em uma amostra de mil professores de Álgebra dos EUA, classificaram a falta de compreensão de frações como um dos maiores problemas que dificultam a aprendizagem de Álgebra.

Escolano e Gairín (2005), Lamon (2012) e Powell (2018a; 2018b) apontam que o problema dos alunos em compreender os números fracionários está relacionado à perspectiva com a qual esses números são introduzidos e tratados ao longo da vida escolar. De maneira geral predomina, no ensino da matemática de frações, a perspectiva de partição, a qual privilegia o significado parte-todo. Em sua revisão dos conceitos de números racionais, Behr *et al.* (1992) insistiram que conceituar frações como parte de um todo não é adequado para desenvolver uma compreensão completa de frações. Segundo Powell (2018a), essa abordagem gera problemas epistemológicos, como o fato de os estudantes utilizarem as propriedades e os procedimentos assumidos pelos números naturais, tanto para fazer inferências sobre números fracionários quanto ao operarem com esses números.

Como possibilidade, para superar esses obstáculos didáticos causados pela introdução do ensino de frações como parte-todo, Powell (2018b; 2019b) propõe como alternativa o ensino de frações baseado na perspectiva da medição, abordagem que vai ao encontro do surgimento histórico das frações, utilizando as barras Cuisenaire. Suas pesquisas realizadas com estudantes dos anos iniciais, sem instrução formal prévia de fração, evidenciam que o ensino de frações na perspectiva de medição favorece o desenvolvimento do senso numérico de frações e permite

que conceitos, como de frações impróprias e equivalentes, sejam facilmente compreendidos e efetivamente construídos pelos alunos.

Scheffer e Powell (2020) concluíram que, no Brasil, a introdução de fração apresentada nos livros didáticos corresponde 100% à noção parte-todo. Considerando que no 6º ano do Ensino Fundamental a noção de números racionais é retomada e aprofundada, este artigo investiga as dificuldades dos alunos desta etapa do ensino básico na compreensão de frações como campo diverso dos naturais, na perspectiva da medição, proposta por Powell (2018b), quando já tiveram instrução formal sobre frações na perspectiva parte-todo. Dessa maneira, iniciamos nosso estudo realizando uma discussão sobre a perspectiva predominante no ensino de frações: parte-todo.

### **3.2 Predominância parte-todo e outras perspectivas para o ensino de frações**

Behr *et al.* (1983), Lamon (2012) e Kieren (1976; 1980) afirmam que, para a compreensão efetiva dos números racionais, é necessário que os alunos tenham oportunidade de estudar os diferentes significados de frações ao longo da vida escolar. Para estes autores, são cinco os significados assumidos pelas frações: parte-todo, quociente, razão, medida e operador, todos baseados na noção de partição de uma quantidade.

No entanto, no Brasil e em diversos países, a prática mais comum para introduzir e explorar o conceito de fração é a que recorre às situações que estão implícitas na relação parte-todo, sendo os outros significados, quando apresentados, tratados de maneira superficial. Por este motivo, frequentemente uma fração e partes de um todo são tratadas como sinônimos (LAMON, 2012).

Apesar da predominância do significado parte-todo no ensino de frações, esses pesquisadores têm tecido críticas quanto à adoção desse significado ser utilizada para iniciar a instrução de frações, e discutido os prejuízos para o aprendizado dos estudantes. Para Gattegno e Hoffman (1976), dos temas de matemática elementar, o das frações é provavelmente um dos mais mal apresentados, referindo-se ao significado parte-todo.

Os alunos são geralmente introduzidos às frações através de exercícios que envolvem o corte de várias formas. A partir de então, eles seguem para ilustrações pictóricas de como operar em frações, e estas, por sua vez, levam a uma série de “regras” sobre operações em frações, que têm que ser memorizadas (ex: multiplicar frações, multiplicar as partes superiores e inferiores juntas). Mas as frações não são fatias de torta, e os diagramas usados para ilustrar operações em frações (como a que usa regiões sombreadas de um

quadrado ou retângulo) são, na melhor das hipóteses, artificiais (GATTEGNO; HOFFMAN, 1976, p. 6, tradução nossa).

Powell (2018<sup>a</sup>, p. 83) é categórico ao afirmar, quanto às frações, que “nem sua representação simbólica nem sua justificativa teórica como número provaram ser suficientes ou mesmo epistemologicamente desejáveis para apoiar a compreensão e apropriação psicológica dos estudantes”. Segundo Escolano (2007), para superar esses obstáculos, o ensino de frações deve ser baseado em propostas didáticas com modelos de aprendizagem associados à gênese histórica dessa estrutura numérica. A introdução escolar dos racionais positivos, basicamente por meio do significado parte-todo, acaba sendo realizada “com a parte de trás de medir” (ESCOLANO, 2007, p. 6, tradução nossa).

É evidente que toda gênese escolar de um tópico matemático é artificial e não tem como o que reproduzir a gênese histórica correspondente; na verdade, esta gênese pode envolver noções, técnicas e problemas atualmente inexistentes ou irrelevantes, ou como complicadas que vão além das possibilidades de compreensão dos alunos. Mas aqui não estamos, neste caso: os modelos comumente usados na escola para a introdução de números racionais não são apenas contraditórios com a história de tais noções, mas também não representam uma opção mais econômica do ponto de vista de visão didática, não mais perto da matemática de hoje (ESCOLANO, 2007, p. 6, tradução nossa).

Podemos encontrar um indicativo desses *modelos comumente usados na escola* citado pelo autor nos livros didáticos, em que as frações são apresentadas com exemplos de alimentos (pizzas, tortas, barras de chocolate, etc.) e figuras geométricas divididas em partes iguais. Essas correlações visuais utilizadas para ensinar frações, segundo Escolano e Gairín (2005) e Lamon (2012), conduzem a obstáculos epistemológicos, devido à necessidade de realizar uma dupla contagem (do todo e das partes tomadas), utilizando os princípios dos números naturais.

Essa perspectiva, dependente da contagem, tem implicado em dificuldades cognitivas para os estudantes, pois “[...], simplesmente encoraja os alunos a aplicar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes, e então as partes pintadas – sem entender o significado deste novo número” (NUNES; BRYANT, 1997, apud CAMPOS; RODRIGUES, 2007, p.196).

Graça, Ponte e Guerreiro (2021) apontam que os alunos não atribuem sentido a uma fração na qual o numerador é maior que o denominador, pois quando recebem instrução de frações baseada no significado parte-todo, ficam com a ideia equivocada de que uma fração representa sempre uma quantidade menor que a unidade. Eles citam o exemplo de quando alunos de 5º ano, para representar  $\frac{7}{5}$ , fazem representações pictóricas associadas ao seu inverso,

$\frac{5}{7}$  e justificam que “a gente não pode tirar 7 de 5” (GRAÇA; PONTE; GUERREIRO, 2021, p. 701).

Souza e Powell (2021) afirmam que, no Brasil e nos Estados Unidos, concentram-se a interpretação parte-todo e a abordagem procedimental. Esta afirmação já foi realizada por Scheffer e Powell (2020) que, ao analisarem os livros didáticos brasileiros, identificaram que todas as abordagens de frações correspondem à noção parte-todo. Segundo Powell (2018a, p. 80), “tanto para professores quanto para alunos, as fontes autorizadas para o conhecimento da matemática escolar, impressas ou digitais, são livros didáticos”. O autor enfatiza que o livro didático é, para muitos professores, o principal recurso utilizado para planejar e ministrar suas aulas, além de ser o único recurso que os alunos acessam para estudar conteúdos matemáticos. Apesar da indiscutível importância do livro didático para a realidade da educação básica brasileira, essa dependência, tanto por professores quanto pelos alunos, é preocupante. Conforme Lajolo (1996, p. 4), ao assumir importância dentro da prática de ensino, é possível que “ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina”. Isso ocorre no Brasil e em diversos países.

Para Souza e Powell (2021, p. 95), a perspectiva parte-todo na introdução ao ensino de frações “pode prejudicar uma compreensão ampla das frações, considerando que a parte-todo não parece promover a inspiração e a profundidade de compreensão necessárias para fertilizar outras esferas da matemática”.

Outra dificuldade com as frações é a estrutura da forma simbólica de duas partes de uma fração. Segundo Powell (2019c, p. 703), “em vez de comunicar que uma fração de forma holística é de uma magnitude única, o foco instrucional sugere aos estudantes que uma fração é composta de duas partes numéricas distintas”. Esta interpretação leva os estudantes a aplicarem, de forma equivocada, propriedades dos números naturais para avaliar e operar com as frações.

Diversas pesquisas têm indicado que parte dos erros dos estudantes em relação às frações decorre da aplicação de conhecimentos dos números naturais (NUNES *et al.*, 2003; LOPES, 2008; POWELL, 2018a; 2019b). Isso é denominado por vários pesquisadores como *o viés do número natural* (NI; ZHOU, 2005). Embora tenha sido descoberto que o viés natural do número diminuiu com a idade, Vamvakoussi, Dooren e Verschaffel (2012) e DeWolf e Vosniadou (2011) revelaram que *ele* ainda está presente em estudantes universitários, incluindo professores em formação e em adultos, nunca sendo superado completamente.

Para Itzcovich (2008), os erros não devem ser associados à falta de conhecimento, mas como resultado de um ou vários conhecimentos que os estudantes já possuem. Nesta perspectiva, é preciso considerar que, para os estudantes, os conhecimentos, que anteriormente os levavam ao sucesso no estabelecimento de relações com os números naturais, passam a ser inadequados para as situações que envolvem fração.

Powell (2019b) ressalta que a magnitude é uma propriedade fundamental para todos os números e, portanto, essencial para compreender frações. No entanto, em termos de magnitude, os números naturais e os racionais (frações) possuem propriedades diferenciadas. O autor apresenta o quadro 3.1 (OBERSTEINER *et al.*, 2019 apud POWELL, 2019b) codificando as diferenças entre as propriedades dos números naturais e fracionários em quatro categorias.

**Quadro 3.1 - Diferenças das propriedades dos Números Naturais e Números Fracionários**

Continua

Categoria de Propriedades	Propriedades	
	Números Naturais	Números Fracionários
(1) Sinalização de magnitude numérica	<p>Mais dígitos quanto maiores a magnitude:</p> $123 > 23.$ <p>Numeral maior, maior número:</p> $9 > 3.$	<p>Nem o número de dígitos no numerador ou denominador nem as magnitudes dos dígitos determinam a magnitude da fração:</p> $\frac{8}{9} > \frac{123}{432}.$ <p>Numerais maiores não indicam maior número:</p> $\frac{99}{100} < \frac{4}{3}.$
(2) Representação simbólica	<p>Sem usar, a magnitude tem uma única representação simbólica: a magnitude de um conjunto de três itens é simbolizada unicamente com o número 3.</p>	<p>Sem usar, a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas:</p> <p>um e meio itens = <math>\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \dots</math></p>
(3) Densidade	<p>Cada número natural tem unicamente um antecessor imediato, um sucessor imediato ou ambos:</p> <p>Para o 5, o antecessor imediato é 4 e o sucessor imediato é 6.</p> <p>Entre quaisquer dois Números Naturais, o número de Números Naturais é finito: entre 2 e 7 tem quatro Números Naturais, 3, 4, 5 e 6.</p>	<p>Cada fração não possui nenhum antecessor imediato ou sucessor imediato.</p> <p>Entre quaisquer duas frações existem infinitas outras frações.</p> <p><math>\frac{2}{7}</math> não é antecessor imediato de <math>\frac{3}{7}</math></p> <p>Entre as duas frações existe, por exemplo, este conjunto infinito de frações:</p> $\left\{ \frac{5}{14}, \frac{7}{21}, \frac{9}{28}, \frac{11}{35}, \frac{13}{42}, \dots \right\}.$

<p>(4) Produto e Quociente</p>	<p>Multiplicação pode ser definida como adição repetida:</p> $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3.$ <p>Multiplicando-se dois Números Naturais diferentes de 1 ou 0 entre si produz-se um produto maior que os fatores:</p> $4 \times 3 = 12, 12 > 4 \text{ e } 12 > 3.$ <p>Dividindo-se quaisquer dois Números Naturais que sejam diferentes de 1 produz-se um quociente que é menor do que o dividendo:</p> $12 \div 3 = 4, 4 < 12.$	<p>Multiplicação como adição repetida é uma definição insuficiente:</p> $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}, \text{ mas } \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} \text{ não.}$ <p>Multiplicando-se duas frações diferentes de 1 ou 0 entre si pode-se produzir um produto menor que um dos dois fatores:</p> $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \frac{1}{3} > \frac{2}{15} \text{ e } \frac{2}{5} > \frac{2}{15}$ <p>Dividindo-se duas frações diferentes de 1 entre si pode-se obter um quociente maior que o dividendo:</p> $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2, 2 > \frac{1}{2}.$
--	--	---

**Fonte:** Obersteiner *et al.* (2019), apud Powell (2009b, p. 58).

De acordo com Powell, as diferenças entre a magnitude dos números naturais e fracionários destacadas no quadro acima são “fontes de dificuldades para a aprendizagem de frações tanto pelos estudantes no Ensino Fundamental como no Ensino Médio” (POWELL, 2019b, p. 57). A dificuldade em reconhecer a magnitude de um número fracionário e um número natural leva, por vezes, os estudantes a considerarem uma fração como dois números e, desta maneira, operarem com os números fracionários utilizando as propriedades dos números naturais, como, por exemplo,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ . Powell (2019b; 2019c) e Lamon (2012) afirmam que a introdução ao ensino de frações deve ser realizada pela perspectiva da medição. Porém, os autores divergem quanto à noção de fração na perspectiva de medição adotada, pois para Powell, uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade; e para Lamon, são pontos na reta numérica na perspectiva da partição.

Lamon (2012) alerta para as grandes perdas que ocorrem devido às lacunas no entendimento conceitual sobre frações, proporções e outros tópicos relacionados. De acordo com a autora, as consequências da falta do conhecimento desses conceitos podem afetar direta ou indiretamente as atitudes de uma pessoa em relação à matemática, reduzindo significativamente a motivação na aprendizagem, assim como induzir ao desinteresse na seleção de cursos de graduação nas áreas de matemática e de ciências. Por consequência, é possível que afete também o desempenho profissional, repercutindo na menor flexibilidade na carreira e até mesmo na diminuição da capacidade de apreciar alguns dos fenômenos mais simples do cotidiano (LAMON, 2012).

Diversos estudos têm relacionado o bom aproveitamento do aluno em Álgebra e em conteúdos matemáticos mais avançados ao domínio de frações (BAILEY *et al.*, 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; SIEGLER *et al.*, 2012; TORBEYNS *et al.*, 2015). Bailey *et al.* (2012) apontam que a relação das frações com a Álgebra pode ser justificada pela sua estrutura matemática, pois as frações estão fortemente embutidas em muitos de seus conceitos.

Corroborando, o *National Mathematics Advisory Panel* (NMAP, 2008) afirma que um conhecimento fundamental das frações é essencial para o sucesso dos estudantes em Álgebra. O estudo realizado por Booth e Newton (2012) aponta que o conhecimento da fração está relacionado à prontidão da álgebra, mais do que o conhecimento da magnitude numérica em geral, além de “fornecer evidências de que o conhecimento de magnitudes de fração está relacionado tanto a aspectos conceituais quanto processuais da prontidão em Álgebra” (BOOTH; NEWTONS, 2012, p. 252, tradução nossa). Adicionalmente, Wu (2001) indica que a capacidade de compreender e operar com as frações de forma eficiente é essencial para uma real compreensão da Álgebra, e que frações podem ser um meio oportuno para introduzir variáveis aos estudantes, pois as regras para operar com frações podem ser generalizadas. Porém, ele adverte que as dificuldades com a Álgebra continuarão, se a forma de ensinar frações não for modificada.

Frente à necessidade de que o estudo das frações aborde diferentes significados, investigamos os obstáculos relacionados ao ensino de frações na perspectiva da medição, com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, série em que as frações são retomadas, após terem a instrução baseada no significado parte-todo, que não tem se mostrado eficiente para a compreensão de frações.

### **3.3 Contexto e Pressupostos Metodológicos**

A pandemia de Covid-19 trouxe consigo diversas alterações no cotidiano das escolas, entre elas a suspensão do ensino presencial, e por conseguinte, a necessidade de adaptação das pesquisas. Diante desse cenário, optamos por utilizar, nesta pesquisa, dados secundários, definidos por Malhotra (2004) como aqueles coletados para fins diferentes do problema em pauta, enquanto dados primários são os originados pelo pesquisador para solucionar o problema da pesquisa.

Esses dados constituem-se na gravação de aulas planejadas e realizadas no Ensino Remoto de Emergência (ERE), pela plataforma *Google Meet*, com alunos de duas turmas de 6º

ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual de ensino, com idades entre 11 e 13 anos, que haviam estudado frações em anos anteriores do Ensino Fundamental.

Este estudo é qualitativo e interpretativo (CRESWELL, 2010). O objetivo é investigar as dificuldades dos alunos na compreensão de frações como campo diverso dos naturais, quando os alunos já tiveram estudo formal sobre frações na perspectiva parte-todo, e quando, no 6º ano do Ensino Fundamental, são apresentadas as frações na perspectiva da medição, na qual uma fração é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade (POWELL, 2018b).

Durante a produção de dados, a professora regente da turma, responsável por planejar e desenvolver as tarefas, constituiu seis grupos, com cinco alunos cada. Os grupos e os encontros foram organizados de acordo com a disponibilidade de dia e horário e equipamento disponível de cada aluno, previamente informados para a professora. Também foi criado um grupo de *WhatsApp* para cada grupo, objetivando: 1) o repasse de informações e a comunicação entre ela e os alunos antes das aulas; 2) orientação quanto aos estudos e auxílio com os artefatos tecnológicos aos que necessitassem; e 3) solicitar auxílio da professora pesquisadora na fase de desenvolvimento da tarefa, pois embora estivesse conectada o tempo todo, desligava o áudio e a câmera para que os alunos fossem tivessem mais autonomia (DONEDA DE OLIVEIRA; BASNIAK, 2021).

As aulas foram planejadas utilizando pressupostos do Ensino Exploratório de Matemática (EEM). Trata-se de uma metodologia ativa e inovadora, que exige mudança de atitude de professores e alunos. O professor necessita de muito estudo de planejamento para elaborar as tarefas, que são de nível cognitivo elevado, e conduzir as aulas para que dimensões<sup>1</sup> do EEM se manifestem. Do aluno é exigido o protagonismo na realização das tarefas. Nesta dinâmica, o professor assume o papel de mediador.

Assim, as tarefas de natureza exploratória foram estruturadas e desenvolvidas considerando quatro fases das aulas: introdução da tarefa (IT), realização da tarefa (RT), discussão coletiva da tarefa (DCT) e sistematização das aprendizagens matemáticas (SAM), siglas utilizadas no decorrer das análises (DONEDA DE OLIVEIRA; BASNIAK, 2021)<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> As dimensões do Ensino Exploratório de Matemática são discutidas nos trabalhos de Estevam e Basniak (2019).

<sup>2</sup> Estudo que discute o planejamento de aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM) no contexto do ensino remoto emergencial (ERE) para comprovar sua viabilidade e orientar professores no desenvolvimento de aulas nesta perspectiva de ensino. Disponível na íntegra em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/3774>.

No quadro 3.2 são apresentadas as tarefas desenvolvidas, seus objetivos e as datas de desenvolvimento das fases de cada tarefa.

**Quadro 3.2 - Tarefas de natureza exploratórias e seus objetivos, datas e tempo de produção dos dados**

Tarefa	Objetivo(s)	Dias de desenvolvimento das fases e minutos gravados		
		IT e RT		DCT e SAM
Tarefa 1: Qual o comprimento?	- Compreender fração como medida.	15/09/2020 G1 e G3	16/09/2020 G4 e G5	18/09/2020 Todos os alunos
Tarefa 2: Medindo com Barras <i>Cuisenaire</i> (Parte 1)	- Compreender relações de equivalência e representá-las algebricamente; - Compreender equivalência de frações; - Compreender a representação fracionária.	22/09/2020 G1 e G3	23/09/2020 G4 e G5	25/09/2020 Todos os alunos
Tarefa 2: Medindo com Barras <i>Cuisenaire</i> (Parte 2)	- Comparar frações; - Compreender a adição de frações com denominadores iguais.	29/09/2020 G1 e G3	30/09/2020 G4 e G5	02/10/2020 Todos os alunos
Tarefa 3: Jogo do Trem	- Comparar frações; - Compreender adição e subtração de frações com denominadores diferentes.	14/10/2020 G1	14/10/2020 G4 e G5	16/10/2020 Todos os alunos

Fonte: Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 318).

Após o início do desenvolvimento da tarefa, com a desistência de alguns alunos, ficaram quatro grupos (G1, G3, G4 e G5) constituídos por cinco ou seis alunos, denominados por pseudônimos escolhidos por eles (Quadro 3.3).

**Quadro 3.3 – Codinome dos participantes**

Grupos	Participantes
G1	Docinho, Doguinha, Florzinha, Fofinha, Lindinha e Thor
G3	Boom, Flora, Maluquinha, Mazarect e Olívia
G4	Anubis, Bob, Fifo, Magrão, Spider-man e Ymercurius
G5	Luffy, Mulher Maravilha, Poster, Viúva Negra, Zorro

Fonte: Doneda de Oliveira e Basniak (2021, p. 318).

As análises estão alicerçadas no quadro diferenças das propriedades dos números naturais e números fracionários (Quadro 3.1) (POWELL, 2019b). Na análise qualitativa de dados, recebemos os dados não estruturados para, então, estruturá-los e interpretá-los (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2013). No entanto, de acordo com Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 447), a análise de dados da pesquisa qualitativa não é padrão, “pois cada estudo

exige um esquema ou ‘coreografia’ própria da análise”. Desta maneira, a fim de atingir o objetivo deste artigo, as análises foram organizadas da seguinte maneira: as tarefas foram previamente separadas em pastas no Google Drive<sup>1</sup>. Na pasta de cada tarefa, colocamos o arquivo da gravação da aula da fase de introdução e realização da tarefa (IT e RT) de cada grupo, o arquivo com a gravação da discussão coletiva e sistematização da tarefa (DCT e SAM), um arquivo com as transcrições dos vídeos e um arquivo com os registros realizados pelos alunos, que foram enviados por meio do Google Classroom<sup>2</sup>. Elaboramos um quadro para realizar os registros das análises contendo a data da aula, a tarefa realizada, o grupo, a fase da tarefa, o tempo da gravação em que eram identificadas as falas relativas ao nosso objeto de pesquisa, a categoria de propriedades (sinalização de magnitude numérica, representação simbólica e densidade) e os excertos, capturas de telas e registros realizados pelos alunos.

O enfoque dado ao ensino de frações no significado parte-todo tende a conduzir os estudantes ao erro na compreensão de que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais. A partir desse pressuposto buscamos, nos registros e principalmente nos diálogos dos alunos, indícios das dificuldades apresentadas na sinalização de magnitude numérica, representação simbólica e na densidade de números fracionários, a partir dos elementos apontados no Quadro 3.1, trazendo, desta forma, dificuldades no conhecimento conceitual e procedimental dos números fracionários (POWELL, 2018a; 2019b).

Assistimos às gravações das aulas, parando e voltando o vídeo quando identificávamos falas e registros relativos às dificuldades apresentadas pelos alunos que já haviam estudado frações em anos anteriores do Ensino Fundamental, ao trabalharem frações na perspectiva da medição com as barras Cuisenaire, pautadas nas propriedades já mencionadas.

Analisamos as tarefas na ordem em que foram propostas e desenvolvidas (tarefa 1, tarefa 2 - parte 1 e parte 2 e tarefa 3). Porém, como utilizamos as três categorias de propriedades para estruturar as análises, os excertos e figuras utilizados não se apresentam na ordem em que as tarefas foram desenvolvidas, mas relacionados a estas categorias. Apresentamos excertos dos grupos G1, G4 e G5, os quais participaram efetivamente de todas as tarefas e fases das aulas.

---

<sup>1</sup> O Google Drive faz parte da cadeia de aplicativos do Google, e tem como função o **armazenamento em nuvem de fotos, documentos de texto, planilhas e apresentações**. Tudo sincronizado e com possibilidade de compartilhamento.

<sup>2</sup> O Google Classroom ou Google Sala de Aula pode ser acessado pelo navegador de internet ou por aplicativo de celular. Trata-se de um serviço gratuito que conecta professores e alunos em uma sala de aula on-line. Permite que seus administradores ou professor crie(m) diferentes turmas, distribua(m) conteúdos, tarefas e avaliações, além de enviar e receber notas e feedbacks. Ainda pode ser integrado com o G Suite for Education, um conjunto de ferramentas e serviços gratuitos do Google adaptados para escolas.

Salientamos que, por as aulas terem sido realizadas de maneira remota, percebemos limitações quanto à participação dos alunos nas tarefas. Vários alunos não interagiram, principalmente com o grupo, não sendo possível avaliar o motivo para tal. Centramos nossas análises na discussão coletiva da tarefa, e em momentos da resolução da tarefa em que a professora interage com os grupos, realizando questionamentos e os alunos expressando suas ideias.

### 3.4 Análise de Dados

Na tarefa 1, o objetivo era compreender fração como medida. Para tanto, o *applet*<sup>1</sup> das barras Cuisenaire foi apresentado aos alunos e foi solicitado que realizassem a medição do comprimento horizontal da tela do *applet*, registrando no caderno ou arquivos a medida encontrada com cada barra, as que completavam completamente o comprimento do *applet* e as que não completavam, sobrando ou faltando um *pedaço de barra*. Os grupos deveriam realizar os registros para, posteriormente, na fase de DT, explicar aos colegas como realizaram a medição com as barras Cuisenaire e como ficaria a medida do comprimento que não resultava em um número inteiro de barras. Inicialmente, durante a realização da tarefa, nenhum grupo mencionou explicitamente a utilização de frações para representar a medida. Utilizaram a forma decimal e a porcentagem, ainda que de maneira equivocada em suas explicações e nos registros das medidas que não completavam com barras inteiras.

Qualquer uma das *Barras Cuisenaire* pode ser usada como referencial de unidade de medida, visto que não possuem um valor fixo de unidade. No entanto, após manusearem o *applet*, primeiro brincando com as barras e depois discutindo com o grupo sobre como fariam a medição solicitada, a partir de estimativas, todos os grupos optaram por utilizar a barra branca. O G4 utilizou 31 barras brancas como referência para a medida do comprimento, motivo pelo qual todas as outras barras ficaram incompletas, conforme exposto na figura 3.1, após Ymercurios arrastar a tela do *applet* para mostrar o quanto sobrava em cada barra.

---

<sup>1</sup> Applet é uma aplicação executada dentro de um site ou programa maior. Podem ser animações, simuladores, jogos, entre outros, que não necessitam de instalação no artefato utilizado.

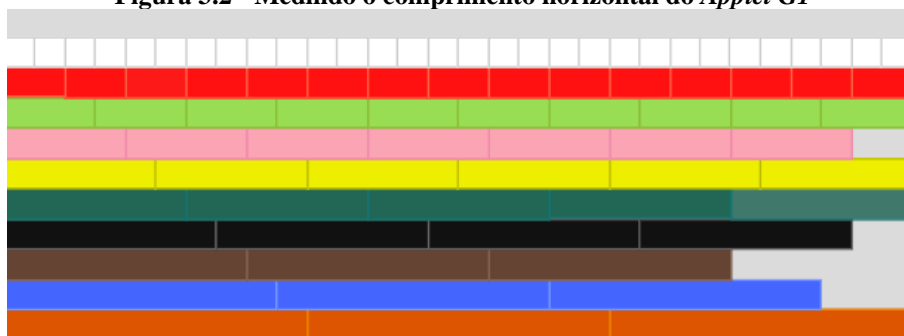
**Figura 3.1 - Tela indicando as barras que sobravam do G4**



Fonte: arquivo da pesquisa (2020).

Na figura 3.2, que é relativa à tela do G1, é possível identificar que, diferentemente do G4, o G1 não completou o comprimento quando o número de barras não era inteiro, e que as partes que faltam para completar a medida do comprimento variam muito, assim como as barras que sobravam para o G4.

**Figura 3.2 - Medindo o comprimento horizontal do Applet G1**



Fonte: arquivo da pesquisa (2020).

Não conseguindo encontrar uma forma de expressar a medida do comprimento horizontal total do *applet* quando as barras não completavam o comprimento, G1 e G4 utilizavam o termo *meio* ou *metade* para expressar o *pedaço de barra* que sobrava ou faltava, como pode ser lido no excerto do G4, abaixo.

*Ymercurios: O branco deu 31, vermelho 15 e meio, e o verde deu 11 e meio [...]*

*Ymercurios: Branco 31.*

*Professora: E o vermelho?*

*Anubis: 15 e meio.*

*Professora: Vermelho 15 e meio...*

*Ymercurios: 15 e um bloquinho, que eu não sei quanto que é esse bloquinho.*

*Magrão Professora, não vai dar meio.*

*Anubis: Tudo vai dar meio.*

*Professora: Tá, mas o que é meio?*

*Anubis: Que a metade da barrinha ficou para fora.*

*Professora: E o que isso significa?*

*Anubis: Sei lá.*

Tarefa 1 – G4. RT, 16/09/2020.

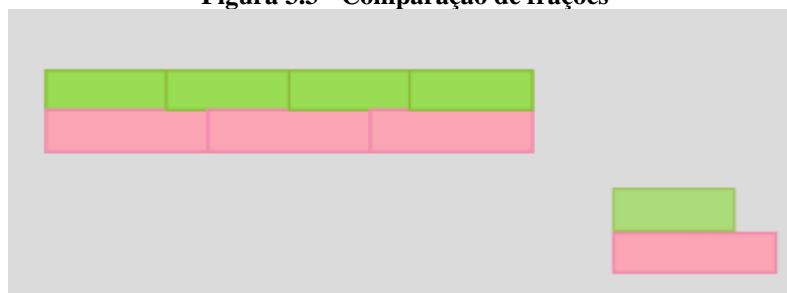
Após perceber o *equivoco/dificuldade* do grupo ao considerar como meio todas as medidas de barras que sobravam, a professora foi discutindo e mostrando aos alunos, no *applet*,

o *pedaço* de cada barra que sobrava, até que percebessem que nem todas as barras que sobravam representavam meio. Da mesma maneira, após evidenciar nas falas, na fase RT, que a parte que faltava em cada barra era meio, o G1 foi questionado pela professora se as barras que não completavam o comprimento eram realmente sempre meia barra. Lindinha afirma que sim e Florzinha diz que não sabia. A professora, então, perguntou se não recordavam outra forma de expressar, de maneira exata, a medida das barras. Como os alunos não recordavam, ela questionou se eles já haviam estudado frações. Com isso, deu-se início a discussão de como as frações poderiam ser utilizadas na medida, o que indica que, embora os alunos já tivessem estudado frações nos anos anteriores, eles não associavam a ideia de fração à de medir. Essa situação ocorreu em todos os grupos.

Apesar de a Base Nacional Comum Curricular – BNCC indicar que o estudo dos números racionais, na forma fracionária, deve ser iniciado no 4º ano do Ensino Fundamental, assumindo como objeto de conhecimento “reconhecer as frações unitárias mais usuais ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{100}$ ) como unidades de medida menores do que uma unidade” (BRASIL, 2018, p. 290), essas frações, como por exemplo  $\frac{1}{2}$ , não parecem trazer significado para os alunos.

A importância da magnitude para a compreensão de frações, bem como sua relação com a flexibilidade e a razoabilidade, são características essenciais para a compreensão de frações (POWELL; ALI, 2018). Identificamos que, apesar de já terem estudado frações em anos anteriores, os alunos não conseguem reconhecer o tamanho dos números fracionários, mesmo de forma não simbólica. De acordo com Obersteiner *et al.* (2013), a falta de compreensão da magnitude das frações parece ser a fonte de muitos problemas que os estudantes encontram com as frações. Isto é evidenciado na tarefa 3, na qual identificamos que, ao comparar números fracionários, os alunos utilizavam a propriedade de sinalização de magnitude numérica dos números naturais (quadro 3.1), que indica que numeral maior significa maior número. No excerto a seguir, é possível entender a dificuldade de Docinho, do G1, ao não associar as frações às medidas das barras, expressando que, embora a barra rosa seja maior que a verde, a fração  $\frac{1}{4}$  é maior que  $\frac{1}{3}$ , valendo-se da comparação dos numerais do denominador para responder qual fração é maior.

**Figura 3.3 - Comparação de frações**



Fonte: arquivo da pesquisa (2020).

**Lindinha:** Então vai ser  $\frac{1}{4}$ .

**Docinho:** E da rosa é  $\frac{1}{3}$ .

**Professora:** Muito bem, então, se vocês forem pensar, quem é maior  $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{3}$ ?

**Lindinha:**  $\frac{1}{3}$ .

**Docinho:** Em fração é  $\frac{1}{4}$ , mas nas barras é o rosa.

**Professora:** Opa, opa, não tem isso. A barra representa a fração.

Tarefa 3 – G1. RT /2020.

A aluna não consegue se desvincular da ideia já construída, relacionada à magnitude dos números naturais, e justifica que frações e barras são coisas diferentes. A discussão continua, e a professora apresenta outros exemplos no *applet*, mas Docinho ainda mostra dificuldade em compreender e aceitar que a fração  $\frac{1}{4}$  é maior que  $\frac{1}{9}$ , uma vez que o número 9 é maior que o número 4 no conjunto dos números naturais, e insiste que frações e barras são coisas distintas.

**Professora:** Porque assim, o que vocês confundem quando, por exemplo, Doguinha falou assim, o algarismo maior embaixo dá impressão de que o número é maior, só que não é. Quando vocês falaram  $\frac{1}{9}$  e  $\frac{1}{4}$ , dá impressão [de] que  $\frac{1}{9}$  é maior, mas não é, é o contrário, ele é menor.

**Docinho:** Professora, se fosse fração sem ser de barra, se fosse normal mesmo, daí o maior seria  $\frac{1}{9}$ ?

Tarefa 3 – G1. RT /2020.

Ao questionar a professora com a questão acima, identificamos que, até então, o conhecimento de frações restrito à perspectiva parte-todo gera confusões epistemológicas quanto às frações como campo diverso dos naturais. Acostumados a contarem partes, nas quais o todo é dividido, e mais uma vez, contarem as partes tomadas desse todo (normalmente aquelas pintadas ou hachuradas), os alunos assumem que as propriedades dos naturais continuam valendo para os racionais. O diálogo com a aluna continua no excerto a seguir.

**Professora:** Não. Sempre  $\frac{1}{4}$  vai ser maior, independente[mente] de ter barra. A fração representa um tamanho, assim como o número 3, ele representa uma quantidade.  $1/9$  representa um tamanho, e esse tamanho pode ser em relação a 50m, a 3m, e esse tamanho,

*1/9, ele significa uma medida de alguma coisa, ou uma quantidade de alguma coisa, ou uma proporção de alguma coisa. Então, assim, o que vocês precisam entender é isso, que a fração, independente[mente] se eu estou utilizando a barra para eu visualizar ou não, ela não muda o seu tamanho. Por exemplo, 1/9 é menor do que  $\frac{1}{4}$  com barra ou sem barra. Isso vai acontecer se você for medir 1/9 de 50 m ou  $\frac{1}{4}$  de 50 m: o resultado do 1/9 vai ser menor do que o resultado de  $\frac{1}{4}$ .*

**Docinho:** *Eu não sabia disso, professora, antes de fazer essa aula.*

**Professora:** *Vocês pensam como se fosse os números naturais, mas é um outro conjunto numérico.*

**Lindinha:** *Isso!*

Tarefa 3 – G1. RT /2020.

Após muita discussão na fase RT e das intervenções da professora, questionando a aluna e explicando que as Barras Cuisenaire e suas respectivas frações representam a mesma magnitude, Docinho e o G1 conseguiram avançar na compreensão da propriedade de magnitude numérica dos números fracionários e seguir com a tarefa.

Essa mesma dificuldade foi identificada no G4, pois o grupo também associou que algarismos maiores no denominador das frações, quando os numeradores são iguais, indicariam fração maior. O grupo escolheu a barra azul e a amarela para o jogo do trem (figura 3.4). A barra azul representa  $\frac{1}{5}$ ; e a barra amarela,  $\frac{1}{9}$ , utilizando a branca como unidade de medida. Assim como ocorreu com o G1, mesmo visualizando que a barra azul é maior que a amarela, os alunos insistiam que  $\frac{1}{9}$  é maior, como explicitado no excerto a seguir.

**Professora:** *O que é maior,  $\frac{1}{5}$  ou  $\frac{1}{9}$ ?*

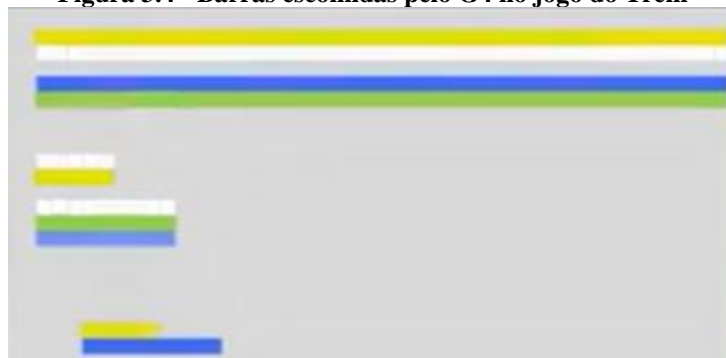
**Spider Man e Ymercurios:**  *$\frac{1}{9}$ !*

**Professora:** *Por que vocês estavam achando que  $\frac{1}{9}$  é maior?*

**Ymercurios:** *Porque é maior, os números! O nove é maior que o cinco.*

Tarefa 3, RT, G4, 14/10/2020.

**Figura 3.4 - Barras escolhidas pelo G4 no jogo do Trem**



**Fonte:** dados da pesquisa (2020).

A dificuldade é observada em outro momento, na RT, quando a professora pergunta para o G4 grupo quem é maior:  $\frac{2}{4}$  ou  $\frac{3}{5}$ . Anubis e Ymercurios, em um primeiro momento,

respondem  $\frac{2}{4}$ , mas logo mudam de ideia, referindo que  $\frac{3}{5}$  é maior porque três é maior que dois e cinco é maior que quatro! A dificuldade apresentada pelo G1 e pelo G4 pode ser caracterizada como *o viés do número natural* (NI; ZHOU, 2005), quando os conhecimentos, que anteriormente levavam os estudantes ao sucesso no estabelecimento de relações com os números naturais, passam a ser inadequados para as situações que envolvem fração.

O *viés com o número natural* também é observado ao adicionar números fracionários, como por exemplo, o excerto a seguir, que expressa a forma de adicionar números fracionários pelo G1, que adiciona os numeradores e os denominadores da fração.

**Professora:** Lembra que nas aulas anteriores vocês fizeram adição de fração, o que precisava ter?

**Docinho:**  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9}$

**Professora:** Antes de vocês fazerem essa soma assim, pensem nas barras, usem as barras.

**Docinho:** Professora, aqui deu  $\frac{2}{13}$ .

**Professora:** O que vocês estão somando?

**Docinho:** A fração da a) [referindo-se ao item da tarefa]  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ .

**Professora:** Como que vocês chegaram que dá  $\frac{2}{13}$ ? Quem concorda?

**Lindinha:** Porque daria 2/13 Docinho?

**Docinho:** Pela soma da fração,  $1 + 1 = 2$  e  $4 + 9 = 13$ , mas não sei se está certo.

**Lindinha:** Então seria  $\frac{2}{13}$  avos.

Tarefa 3- RT, G1, 14/10/2020.

Os outros grupos também utilizaram a propriedade dos números naturais ao operar com frações. Ymercurios, do G4, ao adicionar  $\frac{1}{5}$  mais  $\frac{1}{9}$ , apresentou  $\frac{2}{14}$  como resultado, utilizando as regras aprendidas para adição do conjunto dos números naturais.

Nos números naturais, a magnitude tem uma única representação simbólica. Fato este que não ocorre com os números fracionários, em que a magnitude de uma comparação entre duas quantidades tem uma infinidade de representações simbólicas (quadro 1). Na tarefa 2 (parte 2), na qual um dos objetivos consistia em comparar frações, durante a RT, a professora explica para o grupo que é muito importante para a compreensão dos números racionais eles saberem reconhecer, ao comparar frações, qual é maior e menor. A professora perguntou ao G5, em relação a  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{1}{2}$ , quem é maior. O grupo fica na dúvida entre os dois números, mas não cogita serem iguais, por não compreender a magnitude numérica de  $\frac{1}{2}$ , e que existem outras formas de representar simbolicamente esse número. Somente após manipular o *applet* com a intervenção da professora, os alunos conseguiram elucidar a questão, conforme pode ser lido no excerto a seguir.

**Professora:** E se eu falar para vocês, quem é maior:  $\frac{4}{8}$  ou  $\frac{1}{2}$ ?

**Anubis:**  $\frac{4}{8}$ .

**Ymercurios:**  $\frac{4}{8}$ .

**Anubis:** Não,  $\frac{1}{2}$ .

**Professora:** Vai lá no Cuisenaire. Coloca aí,  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{1}{2}$ .

Enquanto Ymercurios abria o *applet* e compartilhava a tela, Anubis aproveitou para se queixar do cansaço que sente em ficar muito tempo sentado nas aulas on-line, e fez uma observação em relação à pergunta da professora.

**Anubis:** Depende, professora, do  $\frac{1}{2}$ , depende do  $\frac{1}{2}$ . A professora está tentando fazer uma pegadinha com a gente, se  $\frac{1}{2}$  fosse do laranja seria bem maior.

Anubis questionou a professora se ele estaria certo ou errado, que depende do  $\frac{1}{2}$ . Ymercurios conta as barras e escolhe a barra marrom como unidade de medida, utilizando a barra rosa para representar o  $\frac{1}{2}$  do marrom.

**Professora:** Tem que ser do marrom.

**Anubis:** O rosa.

**Professora:** E como você faz  $\frac{4}{8}$ , aí?

**Anubis:**  $\frac{4}{8}$  [Ymercurios pega mais uma barra rosa].

**Professora:** E  $\frac{1}{2}$ ?

**Anubis:** Pega um vermelho e um branco [Ymercurios coloca na tela uma barra vermelha e uma branca para representar  $\frac{1}{2}$ ].

**Professora:** Mas eu quero saber da marrom.

**Anubis:** Mas o  $\frac{1}{2}$  não é o rosa? [Anubis fica muito confuso].

**Professora:** Então... Põe toda a branca ali no marrom [Ymercurios coloca as barras brancas embaixo da barra marrom].

**Anubis:** Vai dar 8.

**Professora:** Então, o que é maior?  $\frac{4}{8}$  ou  $\frac{1}{2}$ ?

**Anubis:**  $\frac{4}{8}$ .

**Professora:** Por quê?

**Anubis:** é  $\frac{1}{2}$ . [professora pede para Ymercurios deixar 4 das 8 barras brancas que colocou].

**Professora:** Por quê? Olha aí [no applet], o que é maior  $\frac{4}{8}$  ou  $\frac{1}{2}$ ?

**Spider-man:** Dá na mesma.

**Professora:** Pois é, os Algarismos 4 e 8 serem maiores, não significa que o número seja maior. O que a gente pode dizer de  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{1}{2}$ ?

**Anubis:** Que é a mesma coisa?

**Professora:** Isso, então  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{1}{2}$  é a mesma coisa, só que são escritas com frações diferentes, mas significam a mesma coisa, certo?

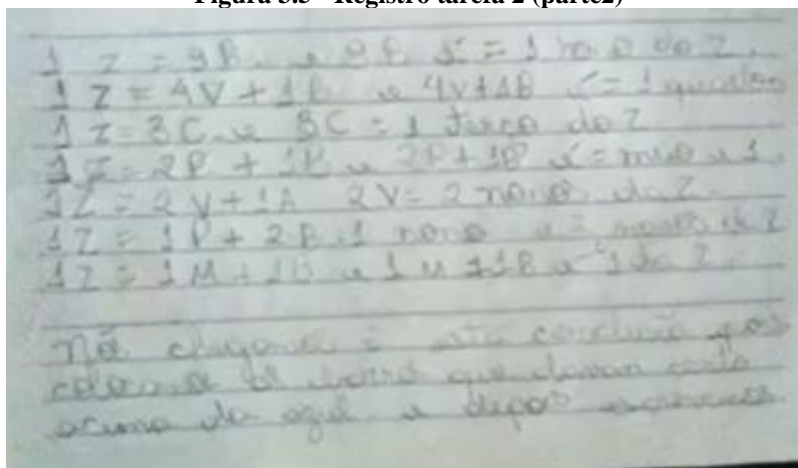
**Spider-man:** Certo.

Tarefa 2 (Parte 2) - RT, G4, 30/09/2020.

A representação simbólica das frações utilizando algarismos indo-arábicos gerou dificuldades na tarefa 1 e 2 em todos os grupos. Os alunos não se expressavam com naturalidade

ao falar de frações, preferindo escrever parte da fração com algarismos e parte por extenso, como pode ser observado na figura 3.5. Quando questionados pela professora do porquê escreverem dessa maneira, justificaram que era mais fácil *interpretar e entender*.

**Figura 3.5 - Registro tarefa 2 (parte2)**



**Fonte:** arquivo da pesquisa (2020).

Na tarefa 2 (parte2), o G5 escolheu a barra amarela para realizar as combinações de barras do mesmo tamanho. Ao apresentar as representações matemáticas de equivalência que o grupo encontrou com a barra amarela, no Documento Google<sup>1</sup>, Luffy, ao falar da relação da barra amarela com a branca (uma amarela é igual a cinco brancas), expressa-se com segurança em relação à porcentagem, falando que uma branca é 20% da amarela. A professora elogia a habilidade de Luffy com a porcentagem (já demonstrada em outras tarefas), e fala da importância da compreensão da porcentagem, mas insiste em como ficaria a relação de equivalência utilizando frações. Após intervenção da professora, Poster sugere a adição de frações para representar as equivalências, começando com as barras brancas. No entanto, ao escrever as frações, Luffy inverte o numerador com o denominador, e isso é aceito pelo grupo, como pode ser lido no excerto a seguir.

**Poster:** Vamos fazer da forma que é mais fácil e mais compreensível, vamos fazer com a adição.

**Luffy:** Ok [Luffy escreve  $\frac{5}{1} + \frac{5}{1} + \frac{5}{1} + \frac{5}{1} + \frac{5}{1}$ ].

**Poster:** É 5 por 1?

**Luffy:** Aham, um quinto, um quinto, um quinto [Luffy fala um quinto, porém o que escreveu foi  $\frac{5}{1}$ ].

**Poster:** Hum, agora faz sentido.

**Luffy:** Ok [Luffy continua escrevendo as combinações sozinho].

**Professora:** Luffy, que fração é essa que você fez?

<sup>1</sup> O Documentos **Google** é um processador de texto on-line que você pode usar para criar e formatar documentos e colaborar com outras pessoas.

**Luffy:** É essa aqui, óh [mostra no applet a relação uma barra vermelha mais três barras brancas equivalem a uma amarela].

**Professora:** Como que ela é? Que fração é?

**Luffy:** Dois quintos [Luffy digita  $\frac{5}{2}$ ].

**Professora:** Mas você está escrevendo dois quintos? Gente, ele está escrevendo dois quintos? Cadê o Zorro e a Mulher Maravilha?

**Mulher Maravilha:** Não.

**Professora:** Como que ele tem que escrever?

**Luffy:** Ao contrário.

**Professora:** Que fração que ele escreveu? Cadê o Zorro?

**Zorro:** Eu saí da live, professora, eu não vi.

**Professora:** Ah, tá, mas você está vendo agora a tela do Luffy?

**Zorro:** Tô.

**Professora:** Que número que ele escreveu? Como que lê essa fração?

**Mulher Maravilha:** Dois quintos.

**Poster:** Dois terços.

**Professora:** Poster, que fração Luffy escreveu?

**Poster:** Dois quintos.

**Professora:** Não é dois quintos, gente.

**Luffy:** Dois cinco avos?

**Professora:** Não, você escreveu 5 o que? Quando é o 2 embaixo, como que a gente fala? [...] Olha lá as representações da tarefa 2 [...] Vou mostrar para vocês [...] Olha o que a gente copiou lá na tarefa 1, como que lê [...] Metade ou um meio, 1 sobre 2 [professora compartilha uma tela para retomar a representação de frações].

**Luffy:** Ah, 5 sobre 2.

**Professora:** Então, 5 sobre 2 seria cinco meios.

**Luffy:** Cinco meios?

**Professora:** É. Como que você escreve dois quintos? Olha lá, como que é um quinto.

**Luffy:** Aah, o 2 fica em cima.

Grupo 5 – Tarefa 2 (parte 2), SAM

A dificuldade apresentada pelo G5 também foi observada em outros grupos. Ao inverter o numerador e o denominador, os alunos demonstravam não compreender a forma simbólica de um número fracionário. Ainda com relação à representação simbólica da fração na fase IT da tarefa 3, surgiu no G1 a ideia errônea de que uma fração é composta de dois números naturais diferentes.

**Professora:** Como assim? O que é uma fração? Ela é duas partes?

**Docinho:** Não, uma parte só.

**Lindinha:** Uma parte do inteiro.

**Professora:** O que a fração é? Ela é uma medida que representa quantos números?

**Docinho:** Dois números.

**Lindinha:** Infinitos.

**Professora:** Calma, quando eu tenho uma representação fracionária, ela significa o quê? Quantos números é aquela representação?

**Docinho:** Dois, um em cima e outro embaixo.

Tarefa 3 - G1, 14/10/2020.

Pelo fato de os alunos terem sido apresentados às frações somente no significado parte-todo, acabam entendendo que uma fração é uma contagem de partes, e o uso da dupla contagem das partes leva-os a pensar no número fracionário como sendo dois numerais, um em cima do outro (SILVA, 2005). A professora explica que, apesar de a fração ser escrita com dois algarismos, nesse caso, ela representa um único número, uma única medida, e complementa

que a afirmação da Lindinha está correta, pois remete ao que foi visto na aula anterior, que uma fração possui infinitas representações, chamadas *frações equivalentes*.

Na categoria densidade (quadro 3.1), nos números naturais, cada número tem somente um sucessor imediato, característica que não se aplica aos números fracionários. Na fase DCT da tarefa 3, a professora questiona os alunos sobre quantas frações existem entre  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  (alunos ficam em absoluto silêncio nesse momento). Após insistir na pergunta e os alunos realizarem alguns questionamentos, percebemos, no excerto abaixo, que eles não reconhecem que, diferentemente de números naturais, entre duas frações existe um número infinito de frações.

**Professora:** *Agora eu vou fazer uma pergunta para vocês, quantas frações será que existem entre  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$ ? [Após um tempo em silêncio, a professora insiste na pergunta].*

**Zorro:** *Nenhuma, eu acho.*

**Professora:** *Quem acha que tem duas?*

**Florzinha:** *Uma pergunta, professora, eles dois contam?  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  conta?*

**Professora:** *Na verdade, eu estou falando entre eles dois.*

**Florzinha:** *Eu acho que tem uma.*

**Lindinha:** *Eu acho que não tem nenhuma.*

Tarefa 3 - DCT, 16/10/2020.

Os estudantes não concebem que, diferentemente dos números naturais, os números fracionários são um denso subconjunto de números reais (NI; ZHOU, 2005; SIEGLER, 2016).

### 3.5 Conclusões e Considerações

O primeiro questionamento que fizemos ao sermos apresentadas ao ensino de frações na perspectiva da medição, sendo uma fração uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade (POWELL, 2019b), era se haveria e quais seriam as dificuldades encontradas por estudantes de 6º ano do Ensino Fundamental, que já haviam estudado frações na perspectiva parte-todo, ao estudarem frações nessa perspectiva, visto que as pesquisas realizadas nessa perspectiva foram com crianças sem instrução prévia de frações.

Inicialmente constatamos que, apesar de já terem estudado frações nas séries anteriores, os alunos não lembraram de utilizar frações, na tarefa 1, para indicar as medidas que faltavam ou sobravam, ao medir o comprimento horizontal do *applet*. Utilizaram, mesmo que de maneira equivocada ou imprecisa, números decimais e porcentagem. Foi necessária a intervenção da professora para a realização da tarefa, e assim, os alunos entenderam como poderiam representar essas medidas, de maneira precisa, utilizando números fracionários.

Na categoria *sinalização de magnitude numérica*, os alunos não conseguiam reconhecer o tamanho dos números fracionários, mesmo de forma não simbólica. A dificuldade inicia ao apresentarem *meio* ou *metade* como qualquer medida que sobrava ou faltava no comprimento das barras, demonstrando não reconhecer a magnitude de  $\frac{1}{2}$ . A intervenção da professora, utilizando as barras *Cuisenaire*, para explicar aos alunos que nem todas as medidas indicadas por eles representavam *meio*, ajudou na compreensão da magnitude do número fracionário  $\frac{1}{2}$ .

A importância da magnitude para a compreensão de frações, bem como sua relação com flexibilidade e razoabilidade, são características essenciais para a compreensão de frações (POWELL; ALI, 2018). Ao comparar dois números fracionários, os alunos utilizavam a propriedade de sinalização numérica dos números naturais, que indica que numeral maior significa maior número. Apesar de visualizarem, no *applet*, as barras que representavam um número maior, o conhecimento que tinham de frações restrito à perspectiva parte-todo os fez assumir as propriedades dos números naturais, e colocar as medidas representadas pelas barras como não sendo frações, e assim ficando impedidos de compreender a magnitude dos números fracionários representados com as barras. Ao esclarecer que a barra representa uma fração e com o *applet*, os alunos observarem outros exemplos de comparação de frações. Docinho, em sua fala, traduziu a impressão de que tivemos em relação à compreensão da magnitude das frações do grupo depois das discussões utilizando as barras *Cuisenaire*: *eu não sabia disso, professora, antes de fazer essa aula!*

A utilização das propriedades dos números naturais, também denominado como *viés do número natural*, surgiu novamente, ao adicionar frações com denominadores diferentes. Os alunos adicionavam os numeradores e os denominadores, e a utilização de propriedades dos números naturais os impediu de considerar holisticamente o valor numérico das frações. A tarefa desenvolvida com as barras *Cuisenaire* possibilitou a compreensão das frações equivalentes, e desta maneira, os alunos realizaram corretamente as operações.

Na categoria *representação simbólica*, várias dificuldades se apresentaram. Inicialmente houve a dificuldade em representar uma fração com algarismos. Apesar de já terem estudado frações nos anos anteriores, os alunos não conseguiam se expressar com naturalidade com a representação simbólica das frações, realizando a leitura e a escrita erroneamente, e preferindo escrever os números por extenso. Posteriormente, nos registros, trocavam numerador com denominador, e tiveram dificuldade em compreender que, diferentemente dos números naturais, as frações podem ter infinitas representações simbólicas, bem como a ideia errônea que uma fração representando uma medida são dois números, *um em cima e outro embaixo*. As

discussões realizadas ao manipular as barras para realizar a tarefa e a intervenção da professora quando solicitada, principalmente nas fases RT e DCT, contribuíram para a compreensão da representação simbólica de uma fração.

Obersteiner *et al.* (2013), citando Siegler *et al.* (2013), afirmam ser necessária grande quantidade de pesquisas para determinar as formas mais eficazes de como representar as frações, bem como os materiais manipulativos que serão utilizados ou projetados e as tarefas relacionadas, e como implementar esses elementos em uma abordagem instrucional integrada. Concluímos que o ensino de frações na perspectiva da medição, com tarefas assentes no EEM utilizando as barras *Cuisenaire* apresenta-se como uma dessas possibilidades, oportunizando superar dificuldades apresentadas decorrentes de outras perspectivas de ensino de frações, bem como na construção de novas ideias matemáticas relacionadas à compreensão de frações.

Adicionalmente, acrescentamos uma reflexão não relacionada diretamente ao nosso objetivo de pesquisa, mas que pode ser objeto de pesquisas futuras. Igualmente, como os alunos questionaram sua professora sobre o fato de ninguém ter ensinado frações a eles desse jeito, também a professora/pesquisadora deste trabalho se questionou no decorrer dos estudos: por que *também* ninguém me ensinou frações desse jeito? Após concluir a graduação, especialização e tantas formações continuadas, em mais de duas décadas de magistério, ninguém havia falado sobre os diferentes significados de frações ou mencionou sobre as perspectivas de fração enquanto medida. Frente a isso, como poderia ensinar o conteúdo aos alunos em uma perspectiva que desconhecia? Desses questionamentos, fica a certeza de que a prática da professora/pesquisadora mudou, e que daqui para frente, seus alunos terão a oportunidade de estudar frações de outro jeito.

### 3.6 Referências

BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.

BEHR, M. J. *et al.*. Rational Numbers Concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.

BERTONI, N.E. A construção do número fracionário. **Boletim de Educação Matemática**, ano 21, n.31. Rio Claro: UNESP, 2008.

BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012.

Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392>. Acesso em: 10, jan.2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC\\_C\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf) . Acesso em: 15, fev.2022.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 4, p. 68-93, 2007.

CRESWELL, A. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativo e misto**. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DEWOLF, M.; VOSNIADOU, S. The Whole Number Bias in Fraction Magnitude Comparisons with Adults. **Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society**, 33, 2011. Disponível em: <https://escholarship.org/uc/item/0vw4p1c2>. Acesso em: 23, mar.2022.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Fracciones: comprensión de alumnos del 6º año en prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición. **Paradigma**, [S. l.], v. 42, n. 3, p. 307-339, 2021. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p307-339.id1133. Acesso em: 22 nov. 2021.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de Medida para la Enseñanza Del Número Racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESCOLANO, R. V. **Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente**. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza, 2007.

ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. Mobilização do pensamento estatístico no ensino exploratório. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 32, n.2, p. 205-214, 2019.

GRAÇA, S. I.; PONTE, J. P.; GUERREIRO, A. Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo...! **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 23(1), 683-712, 2021. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p683-712>.

ITZCOVICH, H. La matemática escolar: **las prácticas de enseñanza en el aula**. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2008.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

GATTEGNO, G. C.; HOFFMAN, M. R. **Handbook of activities for the teaching of Mathematics at the elementary school**. New York: Human Education, 1976.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. (Org.). **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. *In*: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p.125- 150, 1980.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** – essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 20 jan. 2022.

MALHOTRA, N. K. **Pesquisa de marketing**: uma orientação aplicada. São Paulo: Editora Bookman, 2004.

NATIONAL MATHEMATICS ADVISORY PANEL - NMAP. **Foundations for Success**: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington DC: U.S. Department of Education, 2008.

NI, Y; ZHOU, Y.D. Teaching and learning fraction numbers: The origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist**, v.40, n. 1, p. 25-52, 2005.

NUNES, T.; BRYAN T, P.; PRETZLIK, U.; HURRY, J. The effect of situations on children's understanding of fractions. Trabalho apresentado no encontro da **British Society for Research on the Learning of Mathematics**. Oxford, jun, 2003.

OBERSTEINER, A.; DRESLER, T.; WORTH, M.S.; MOELLER, K. **Understanding fractions**: Integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. *In*: NORTON, A.; ALIBALI, M. W. (Org.). **Constructing number: Merging perspectives from psychology and mathematics Education**. Cham: Springer, 2019. p. 135-162.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-29, 2021.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. *In*: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT)**: Contribuições para Pesquisa e Ensino. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECeM**, Cascavel, PR, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. 5. ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.9, n.20, 2020.

SIEGLER, R. S. *et al.* Early Predictors of High School Mathematics Achievement. **Psychological Science**, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

SIEGLER, R. S. Magnitude knowledge: the common core of numerical development. **Developmental Science**, v. 19, n. 3, p. 341-361, 2016.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Como os livros didáticos do Brasil, Estados Unidos e Japão lidam com frações? **Acta Scientiai**, Canoas, v. 23, n. 4, p. 77-111, 2021.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.

VAMVAKOUSSI, X.; DOOREN, W.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **The Journal of Mathematical Behavior**. 31. 344–355, 2012. [10.1016/j.jmathb.2012.02.001](https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001).

WU, H. (2001). **How to prepare students for algebra**. *American Educator*, 25(2), 10-17.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A inquietação gerada frente às dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender frações nos fizeram, desde o início, querer estudar sobre este tema tão complexo. Além disso, a oportunidade de cursar a disciplina ofertada pelo PRPGEM, intitulada *Investigando a Representação e o Ensino de Números Fracionários: o Atual e uma Alternativa*, ministrada pelo professor Arthur B. Powell, permitiu compreender um pouco mais essa questão. Nessa disciplina foi abordado o ensino de frações por meio da interpretação de frações como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades utilizando as barras *Cuisenaire*.

Ainda durante a realização da disciplina, surgiram as questões que norteariam a nossa pesquisa, frente a essa forma *alternativa* de ensinar frações. Após compreender melhor essa forma de ensino, levantou-se a seguinte problemática: quais seriam as potencialidades e as dificuldades em ensinar frações na perspectiva da medição, utilizando as barras *Cuisenaire*, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental que já tiveram instrução formal sobre frações na perspectiva parte-todo?

A partir deste questionamento, definimos ser este o objeto da pesquisa, contando com o apoio do próprio Prof. Arthur B. Powell, que trouxe as primeiras sugestões para o desenvolvimento do projeto. No entanto, com o momento pandêmico que o mundo vive (vivia), com os estudantes fora da sala de aula, a proposta inicial de elaborar e desenvolver tarefas utilizando as barras *Cuisenaire* físicas (manipuláveis), tornou-se inviável. Isto porque investigar a aprendizagem de frações na perspectiva da medição utilizando as **barras físicas** só seria possível com estudantes no ensino presencial. Apesar desses entraves, consideramos que os dados secundários utilizados nesta pesquisa, provenientes de pesquisa realizada com o *Cuisenaire digital*, possibilitaram que o estudo fosse realizado, atingindo os objetivos propostos.

Embora não tenha sido objeto de análise deste estudo, verificamos que a metodologia do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) interferiu positivamente para os resultados alcançados. As tarefas assentes em práticas exploratórias são exigentes, tanto com o professor quanto com o aluno, pois segundo Oliveira e Basniak (2021, p. 24), “requer do professor um planejamento minucioso, prevendo situações que os alunos possam enfrentar e meios para

auxiliá-los, e que, mesmo com os quadros de antecipação/orientação<sup>1</sup>, podem surgir situações não previstas, para as quais não se tenha respostas prontas”.

As tarefas foram planejadas, elaboradas, e as aulas desenvolvidas pela professora regente no segundo semestre de 2020, considerando as quatro fases sugeridas de Cyrino e Teixeira (2016): 1º) Introdução da Tarefa – em que a professora orientava os alunos quanto à realização da tarefa (organização e registro) e eram esclarecidas as dúvidas quanto à compreensão da tarefa proposta; 2º) Realização da tarefa – momento em que os alunos em pequenos grupos observavam, trocavam ideias e conhecimento matemático, sugeriam estratégias; 3º) Discussão Coletiva da Tarefa – momento realizado com todos os alunos, quando cada grupo apresenta a forma como resolveu a tarefa, estando correta ou não, e assim, de maneira coletiva, podem refletir sobre as conclusões encontradas; e 4º) Sistematização das Aprendizagens Matemáticas – momento em que a professora sistematiza e legitima as aprendizagens matemáticas envolvidas, orientando os alunos para realizarem os registros necessários.

Devido à condição do Ensino Remoto de Emergência imposta pela pandemia Covid-19, diversas situações imprevistas puderam ser verificadas ao assistir as gravações das aulas, e que foram obstáculos para o aprendizado. Muito recorrente foram os problemas de conexão da internet ou problemas com os equipamentos, trazendo prejuízo ao aprendizado. Soma-se a isso a dificuldade dos alunos em permanecer nas aulas, pois alguns deles cuidavam de irmãos menores enquanto estavam participando da aula, e precisavam se ausentar para atendê-los. Também foi possível verificar a grande dificuldade de concentração, pois em vários momentos, durante a realização das tarefas, os alunos eram distraídos com questões do ambiente em que se encontravam, porque durante o período de isolamento social, os pais, irmãos e outros familiares também estavam em casa, no confinamento. Outro fator limitante foi a participação de alguns alunos, que não ligavam a câmera e não interagiam nas tarefas, seja ligando o microfone ou escrevendo no *chat*, não sendo possível observar se estavam participando da aula toda, ou somente respondiam quando eram chamados.

Situações como essas, provenientes do ERE, muitas vezes, apesar do planejamento, fogem do alcance do professor. No entanto, observamos que, pelo fato de o EEM exigir a interação para sua realização, tanto do professor com os alunos, quanto dos alunos com os seus pares, as estratégias utilizadas pela professora, como, por exemplo, a comunicação com os

---

<sup>1</sup> O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência é discutido no trabalho de Doneda de Oliveira e Basniak (2021).

grupos pelo WhatsApp, caso surgisse alguma dificuldade, amenizaram essas questões envolvendo a professora e os alunos no processo de ensino e de aprendizagem.

Para realizar nosso estudo, desafiamos-nos a escrever a dissertação no formato multipaper (DUKE; BECK, 1999, BARBOSA, 2015) sendo constituída inicialmente por dois capítulos/artigos, com os seguintes objetivos, respectivamente: 1) investigar atividades matemáticas desencadeadas por tarefas de natureza exploratória utilizando o material Cuisenaire para abordar frações na perspectiva de medição no 6º ano do Ensino Fundamental, considerando as quatro fases do Modelo 4A-Instrucional na compreensão de frações; e 2) investigar as dificuldades trazidas pelos alunos na compreensão de frações como campo diverso dos naturais, quando tiveram a formação inicial sobre frações na perspectiva parte-todo. Porém, no decorrer dos estudos, surgiu a necessidade de esclarecer aspectos referentes às diferentes interpretações, sobretudo a interpretação de fração como medida, constituindo, assim, mais um capítulo/artigo da dissertação. Os três artigos foram discutidos em reuniões síncronas, via Google Meet, pelos integrantes do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística – GEPTeMatE, que trouxeram contribuições importantes para a elaboração desses documentos.

O estudo das frações é um tema bastante complexo, pois este conceito não pode ser definido por um único significado. Nesse sentido, pesquisadores como Kieren (1976; 1980) e Berh et al. (1983) afirmam que, para compreender frações, é necessário conhecer suas diferentes interpretações, pois cada significado possibilita certos conhecimentos que são importantes. Interpretações estas que a professora/pesquisadora também não conhecia, demonstrando a lacuna que existe na formação acadêmica dos professores de Matemática e nas formações continuadas que são ofertadas, ficando restritas a discussões, principalmente na introdução de frações no significado parte-todo. Ao nos debruçarmos para estudar as diferentes interpretações de fração, encontramos estudos que discutem e apresentam a instrução de frações baseada no significado medida, na perspectiva da partição e da medição, ambas com resultados que evidenciam que esse significado favorece a compreensão dos números fracionários pelos estudantes.

Ao nos aprofundarmos nesses estudos, sentimos a necessidade de discutir e esclarecer cada abordagem, visto que as diferentes perspectivas de ensino de frações são originárias, em sua maioria, da literatura internacional, enquanto, como constatado por Scheffer e Powell (2020), as pesquisas brasileiras restringem-se principalmente ao significado parte-todo. A partir dessas leituras, esclarecemos as diferenças do significado medida assente na partição de uma quantidade e a abordagem assente na perspectiva da medição, em que a medida é compreendida

como uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo, medidas pela mesma unidade. Esse conceito foi utilizado em nosso estudo e acreditamos ser a perspectiva indicada para a introdução das frações, mas consideramos que todos os significados de frações são importantes e devem ser apresentados aos alunos no decorrer da vida escolar.

Algumas questões surgiram em relação ao questionamento inicial, sobre as dificuldades encontradas pelos estudantes de 6º ano que já haviam recebido instrução formal baseada no significado parte-todo, ao serem apresentados às frações na perspectiva da medição utilizando as barras *Cuisenaire*. Inicialmente deparamo-nos com o fato de os alunos, em um primeiro momento, não lembrarem dos números fracionários, preferindo utilizar principalmente os números na forma decimal e na forma percentual, demonstrando que as frações não faziam parte do *rol* de possibilidades enquanto número. Desta forma, verificamos que eles não lembraram de utilizar as frações para resolver a situação proposta na tarefa, apesar de já terem estudado frações nas séries anteriores com o significado parte-todo. A intervenção realizada pela professora, argumentando sobre a forma imprecisa e muitas vezes equivocada que estavam escrevendo as medidas representadas por algumas barras foi fundamental para as reflexões realizadas com os estudantes. Portanto, houve necessidade de frações serem *reapresentadas*, de forma que houve necessidade de a professora lembrar-lhes que eram possibilidades para a resolução da tarefa.

Nas primeiras tarefas, ao utilizarem as frações, os alunos não se sentiam confiantes quanto à sua representação simbólica, e demonstravam não compreender a magnitude numérica representada pelo número, evidenciando que a forma que haviam estudado as frações, por meio do significado parte-todo, não se constituiu uma alternativa eficiente para a introdução das frações. Além disso, essa interpretação fez com que os alunos considerassem a fração como dois números naturais, um em cima do outro, com o entendimento equivocado da fração como uma contagem de partes, e o uso da dupla contagem promoveu a compreensão equivocada do número fracionário.

O *viés com o número natural* foi observado ao comparar números fracionários, também ao operar. Ao comparar dois números fracionários, utilizavam a propriedade de sinalização numérica dos números naturais, que indica que numeral maior significa maior número, não conseguindo, portanto, reconhecer o tamanho dos números fracionários. Adicionalmente, também tiveram muita dificuldade em reconhecer que as barras representavam frações, inclusive sugerindo serem coisas diferentes. Frente a esta situação, em diversos momentos a professora precisou utilizar de vários exemplos com o *applet* para que compreendessem que as

barras representavam as frações e compreendessem a magnitude do número representado pela fração, característica imprescindível para a compreensão de frações.

É importante ressaltar que, ao elaborar o quadro contendo os registros das dificuldades e das potencialidades, constatamos que as potencialidades se sobressaíram às dificuldades, ao ensinar frações na perspectiva da medição utilizando as barras *Cuisenaire* a alunos que já haviam estudado frações na perspectiva parte-todo. Neste sentido, verificamos que os alunos, ao manipular, observar, comparar, discutir e perceber as relações entre as barras durante a realização das tarefas, avançaram na construção de ideias matemáticas relacionadas às frações, passando da fase de Ações Concretas para a fase de Ações Formais (POWELL, 2018b). A partir disso, compreenderam a diferença de magnitude numérica dos números naturais para os fracionários, conseguindo estabelecer relações multiplicativas entre as barras *Cuisenaire* e nomeá-las. Isso, inclusive, possibilitou que os alunos reconhecessem que cometiam erros, porque pensavam nas frações como números naturais, confessando à professora que não sabiam disso antes de estudar frações com as barras *Cuisenaire*.

Além disso, ao comparar frações, compreenderam que frações equivalentes têm a mesma medida (tamanho/magnitude) e podem ser escritas por representações simbólicas diferentes, e desta maneira foram capazes de utilizar as frações mais adequadas para realizar as operações, e analisar se os resultados encontrados eram razoáveis. Em vários momentos os alunos passaram a se utilizar da *âncora*  $\frac{1}{2}$  e o 1 (inteiro) para verificar a razoabilidade das suas respostas, sendo esta, além da magnitude e da flexibilidade, características elencadas por Powell e Ali (2018) como definidoras da compreensão de frações. Ademais, destacamos que, apesar da Álgebra, nesse momento, não ser um tema abordado no estudo de frações, identificamos que a linguagem algébrica foi introduzida sem gerar qualquer carga cognitiva. Em outras palavras, os alunos utilizaram letras para representar as barras e escrever expressões e equações para estabelecer relações entre suas medidas, assim como realizaram operações. Desta forma, constatamos que a atividade matemática com as barras *Cuisenaire* constituiu-se em um recurso importante para a introdução da linguagem algébrica e/ou a outros temas relacionadas à Álgebra, tema que consideramos importante ser investigado.

Encaminhando-nos para as linhas finais da dissertação, realizamos uma reflexão adicional não relacionada diretamente ao nosso objeto de pesquisa, mas que, assim como os alunos questionaram a professora sobre o fato de ninguém ter ensinado frações a eles desse jeito, também a professora/pesquisadora realizou os seguintes questionamentos a si mesma: por que também ninguém me ensinou frações desse jeito? Como, após passar pela graduação,

especialização e após tantas formações continuadas, nos mais de 20 anos de magistério, ninguém havia falado sobre os diferentes significados de frações, e menos ainda sobre as perspectivas de fração enquanto medida? Como poderia ensinar de maneira mais eficiente a seus alunos esse tema tão complexo e que sempre trouxe tanta angústia devido às dificuldades apresentadas, sendo até então tão desconhecadora desse assunto? Desses questionamentos, fica a certeza de que a prática da professora/pesquisadora mudou, e que daqui para frente, seus alunos terão a oportunidade de estudar frações de outras perspectivas, além de discutir e apresentar, a seus colegas e alunos, as frações nos seus diferentes significados.

Por fim, acreditamos serem necessários trabalhos com intuito de trabalhar as múltiplas interpretações/significados das frações, especialmente na perspectiva da medição, tanto com estudantes quanto com professores que ensinam matemática nos anos iniciais e finais da Educação Básica.

## REFERÊNCIAS

- ALEKSANDROV, A. D. A general view of mathematics. In: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N. (Ed.). **Mathematics: its content, methods, and meaning**. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, v. 1, p. 1-64. 1963.
- BAILEY, D.; HOARD, M. K.; NUGENT, L.; GEARY, D. C. Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 113, p. 447-455, 2012.
- BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. Campinas: Mercado de Letras**, v. 1, p. 347-367, 2015.
- BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook on research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, p. 296-333, 1992.
- BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. R., SILVER, E. A. Rational Numbers Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Process**. New York, NY: Academic Press, 1983.
- BERTONI, N. E. A construção do número fracionário. In: **Boletim de Educação Matemática**, ano 21, n.31. Rio Claro: UNESP, 2008.
- BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392>. Acesso em: 10, jan.2021.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC\\_C\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf). Acesso em: 15, fev.2022.
- CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, SC, v. 2, n. 1, p. 68-93, 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992>. Acesso em: 20, jul.2021.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, p. 107-152, 1951.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.
- CORSO; L.V.; DORNELES, B.V. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na Matemática. **Rev. Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 298-309. 2010.

COSTA, W. N. G. Dissertações e teses Multipaper: uma breve revisão bibliográfica. **Anais Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 8, n. 1, 2014.

CRESWELL, A. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativo e misto**. 3.ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CYRINO, M. C. C. T; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática: elaboração e perspectivas**. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

DEWOLF, M; VOSNIADOU, S. The Whole Number Bias in Fraction Magnitude Comparisons with Adults, **Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society**, 33, 2011. Disponível em: <https://escholarship.org/uc/item/0vw4p1c2>. Acesso em: 23 mar. 2022.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 7, p. 1-20, 2021.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. Fracciones: comprensión de alumnos del 6º año em prácticas de enseñanza exploratoria orientados por la perspectiva de medición. **PARADIGMA**, [S. l.], v. 42, n. 3, p. 307-339, 2021. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p307-339.id1133. Acesso em: 22 nov. 2021.

DONEDA DE OLIVEIRA, V. S.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Revista Educação Matemática Debate**. v. 5, n.3, p. 1-29, 2021.

DUKE, N. K.; BECK, S.W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ESCOLANO, R. V.; GAIRÍN, J. M. S. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 1, p. 17-35, 2005.

ESPADINHA, T. B. **O Desenvolvimento das Representações da Magnitude de Números Fracionários**. Faculdade de Psicologia, Medicina, Ciências e Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa. 72 f. 2015.

FUCHS, L. S.; SCHUMACHER, R. F.; LONG, J.; NAMKUNG, J.; HAMLETT, C. L.; CIRINO, P. T.; JORDAN, N. C.; SIEGLER, R.; GERSTEN, R.; CHANGAS, P. Improving at-risk learners' understanding of fractions. **Journal of Educational Psychology**, 105(3), p. 683–700, 2013. <https://doi.org/10.1037/a0032446>

GATTEGNO, C. Arithmetic: A teacher's introduction to the Cuisenaire-Gattegno methods of teaching arithmetic. New York: **Educational Solutions Worldwide**, 1960/2009.

GATTEGNO, C. The commonsense of teaching mathematics. New York: **Educational Solutions Worldwide**, 1974/2010.

GATTEGNO, G. C.; HOFFMAN, M. R. **Handbook of activities for the teaching of mathematics at the elementary school**. New York: Human Education, 1976.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GRAÇA, S.; PONTE, J.P.; GUERREIRO, A. Quando as frações não são apenas partes de um todo...! **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 23, n. 1, p.683-712, 2021

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p. 101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E., (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

KIEREN, T. E. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E., *et al* (Ed.). **Rational numbers: An integration of research**. New Jersey: Erlbaum., p.49-84, 1993.

LAJOLO, M. **Livro didático**: um (quase) manual de usuário. Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3.ed. New York: Routledge, 2012.

LIN, C.Y. *et al*. Preservice Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Fraction Operations: A Comparative Study of the United States and Taiwan. **School Science and Mathematics**, v. 113, n. 1, p. 41-51, 2013. Disponível em: <https://login.proxy.libraries.rutgers.edu/login?url=http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1009005&site=eds-live>

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 20 jan. 2022.

MALHOTRA, N. K. **Pesquisa de marketing**: uma orientação aplicada. São Paulo: Editora Bookman, 2004.

MARTIN, W. G. *et al*. **The learning of mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

MATTAR, F. N. Pesquisa de marketing: metodologia, planejamento. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

MCINTOSH, A.; REYS, B.; REYS, R.E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 2-8, 1992.

NATIONAL MATHEMATICS ADVISORY PANEL - NMAP. Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington DC: U.S. Department of Education, 2008.

NI, Y; ZHOU, Y.D. Teaching and learning fraction numbers: The origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist**, v.40, n. 1, p. 25-52, 2005.

NUNES, T.; BRYAN T, P.; PRETZLIK, U.; HURRY, J. The effect of situations on children's understanding of fractions. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, jun, 2003.

OLIVEIRA, V. S. D.; BASNIAK, M. I. O planejamento de aulas assentes no ensino exploratório de Matemática desenvolvidas no ensino remoto de emergência. **Educação Matemática Debate**, v. 5, n. 11, p. 1-29, 2021.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações**. Curitiba, PR: SEED/PR. 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 20 nov. 2021.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba, PR: SEED/PR. 2019. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 20 nov. 2021

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (Org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, v. 36, n. 2, p. 399-420, 2018b.

POWELL, A. B. Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. **ReviSeM**, n. 1, p. 1-19, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 9, n. 2, p.50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECM**, Cascavel, PR, v.3, n.3, p. 700-713, 2019c.

POWELL, A. B. Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. **XIII ENEM**, Brasil, jun.

2019d. Disponível em:

<https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1258/1834>.

Acesso em: 04 junho 2021.

RESNIK, L. B. Developing mathematical knowledge. **American Psychologist**, v.44, n.2, p.162–169, 1989. Disponível em: <https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162>

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. 5. ed. Porto Alegre: Penso, 2013. 624 p

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.20, 2020.

SCHMITTAU, J. Cultural-historical theory and mathematics education. In: KOZULIN, A.; GINDIS, B. et al. (ed). **Vygotsky's educational theory in cultural contexto**. Cambridge, UK: Cambridge, 2003, p. 225-245.

SIEGLER, R. S. Magnitude knowledge: the common core of numerical development. **Developmental Science**, v. 19, n. 3, p. 341-361, 2016.

SIEGLER, R. S.; THOMPSON, C. A.; SCHNEIDER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, v. 62, n. 4, p. 273-296, 2011. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001002851100003X>.

SIEGLER, R. S. *et al.* Early Predictors of High School Mathematics Achievement. **Psychological Science**, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

SIEGLER, R. S. et al. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. **Trends in Cognitive Sciences**, v. 17, n. 1, p. 13-19, 1//. 2013. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661312002653>

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SOUZA, M. A. V. F.; POWELL, A. B. Como os livros didáticos do Brasil, Estados Unidos e Japão lidam com frações? **Acta Scientiai**, Canoas, v. 23, n. 4, p. 77-111, 2021.

SWELLER, J. Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. **Learning and instruction**, v. 4, n. 4, p. 295-312, 1994.

SWELLER, J.; VAN MERRIENBOER, J. J.; PAAS, F. G. Cognitive architecture and instructional design. **Educational psychology review**, v. 10, n. 3, p. 251-296, 1998.

TORBEYNS, J.; SCHNEIDER, M.; XIN, Z.; SIEGLER, R.S. Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, **Learning and Instruction**, v. 37, p. 5-13, 2015, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.

TUCKER, A. Fractions and units in everyday life. *In*: MADISON, B. L.; STEEN, L. A. (Org.). **Calculation vs. context**: Quantitative literacy and its implications for teacher education. Washington, DC: Mathematical Association of America, p. 75-86, 2008.

VAMVAKOUCSI, X.; DOOREN, W.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **The Journal of Mathematical Behavior**. 31. 344–355, 2012. 10.1016/j.jmathb.2012.02.001.

WU, H. How to prepare students for algebra. **American Educator**, 25(2), 10-17, 2001.

YANG, D. C.; HSU, C.J.; HUANG, M.C. A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 2, n. 3, p. 407-430, 2004.

## APÊNDICES

### TAREFA 1 – Qual o comprimento?

Acessem o link <https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html>

1) Ao clicar nos círculos coloridos nas ferramentas à direita, aparecem barras de tamanhos e cores diferentes. Para selecionar a barra que irão utilizar cliquem na cor desejada.

a) Utilizando barras da mesma cor, determinem qual o comprimento horizontal da região do *applet*. Façam isso para todas as cores.

b) Vocês já perceberam que algumas cores de barras não completam o comprimento horizontal total da região do *applet*. Como vocês podem explicar aos colegas o comprimento horizontal total da região do *applet* usando essa barra (que não completa o comprimento) na explicação?

## TAREFA 2 - Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 1)

1) Acessem o link <https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html>

a) Para facilitar as representações nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.

Branca = ___	Vermelha = ___	Verde Clara = ___	Rosa = ___	Amarela = ___
Verde Escura = ___	Preta = ___	Marrom = ___	Azul = ___	Laranja = ___

b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida formem o máximo de combinações possíveis nessa condição. Utilizem as representações do quadro do item a para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

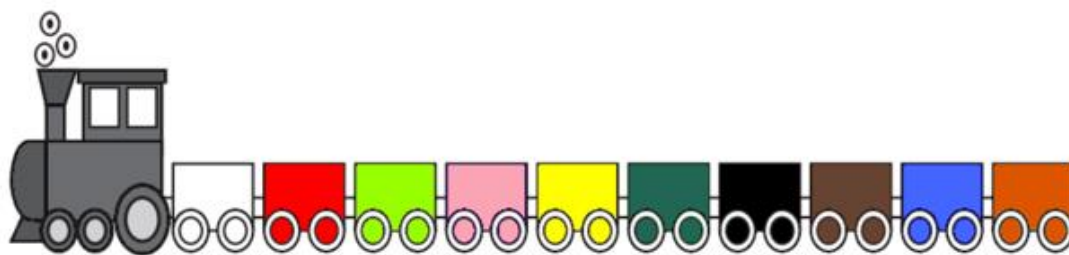
## TAREFA 2 – Medindo com Barras Cuisenaire (Parte 2)

c) Na primeira parte da tarefa vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.

O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.

d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos  $<$  e  $>$  as comparações entre as barras de cada combinação.

## TAREFA 3 – Jogo do Trem



1) Acessem o link <https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html>

Vamos fazer o jogo do trem. Chamaremos de *vagão* cada barra e de *trem* o alinhamento horizontal de um ou mais *vagões*. Para isso, cada grupo deve se dividir em duplas ou jogam dois e um espera, para jogar na próxima rodada. Cada dupla ou jogador escolhe um vagão. O jogo do trem funciona assim:

- Cada dupla ou jogador só utilizará o vagão escolhido para jogar, ou seja, sempre a barra de mesma cor.
- O vagão escolhido por cada jogador (ou dupla) serão colocados alinhados verticalmente na tela.
- Inicia jogando quem escolher o vagão mais curto.
- Joga sempre quem tem o trem mais curto, até que fique com o trem maior que o adversário.
- O jogo acaba quando os trens ficarem do mesmo tamanho.
- Ganha o jogo a dupla ou jogador que colocar o último vagão.

Após jogarem algumas vezes respondam:

- a) Qual(is) a(s) melhor(es) estratégia(s) para ganhar o jogo? Após a finalização de uma rodada do jogo, considerando cada um dos trens separadamente, escreva a fração que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro.
- b) Observando as frações escritas no item *a*, construam trens do mesmo tamanho de cada vagão de cada um dos jogadores. Mas há uma condição: os trens devem ser da mesma cor. Escrevam as frações equivalentes, respectivas aos trens e vagões.
- c) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual dessas duas frações é maior?
- d) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual o resultado da soma dessas frações? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*.
- e) Considerando as frações que o vagão de cada trem representa em relação ao seu trem inteiro do item *a*, qual o resultado da subtração da fração maior menos a fração menor? Expliquem representando com as barras *Cuisenaire*