UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

TESSITURAS NO ENSINO DE GEOMETRIA A PARTIR DE UM LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

Bruna Aparecida Ferreira de Castro

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

União da Vitória,

2025

PRPGEM

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR

Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

TESSITURAS NO ENSINO DA GEOMETRIA A PARTIR DE UM LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

Bruna Aparecida Ferreira de Castro

Orientador(es)
Profa. Dra. Maria Ivete Basniak
Prof. Dr. Gilberto Silva dos santos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa *Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática*, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

União da Vitória
Novembro de 2025

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Ferreira de Castro, Bruna Aparecida
Tessituras no Ensino da geometria a partir de um Livro Didático do Ensino Médio / Bruna Aparecida Ferreira de Castro. -- União da Vitória-PR,2025.
73 f.: il.

Orientador: Maria Ivete Basniak.
Coorientador: Gilberto Silva dos Santos.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2025.

1. Educação Matemática. 2. Figuras Bi e Tridimensional. 3. Perspectiva Lógico-histórica. 4. Nexos Conceituais. 5. Ensino de Geometria. I - Basniak, Maria Ivete (orient). II - Silva dos Santos, Gilberto (coorient). III - Título.

Bruna Aparecida Ferreira de Castro

TESSITURAS NO ENSINO DA GEOMETRIA A PARTIR DE UM LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

Comissão Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
MARIA IVETE BASNIAK
Data: 15/01/2026 16:50:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maria Ivete Basniak
Orientadora e Presidente da Comissão Examinadora
UNESPAR / União da Vitória

gov.br Documento assinado digitalmente
GILBERTO SILVA DOS SANTOS
Data: 15/01/2026 18:04:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Gilberto Silva dos Santos
Coorientador
UNESPAR / União da Vitória

gov.br Documento assinado digitalmente
TALITA SECORUN DOS SANTOS
Data: 19/01/2026 10:30:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prafa. Dra. Talita Secorun dos Santos
Examinadora Interna
UNESPAR / Campo Mourão

gov.br Documento assinado digitalmente
BRUNO SILVA SILVESTRE
Data: 15/01/2026 16:37:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Bruno Silva Silvestre
Examinador Externo
Secretaria Municipal de Educação / Goiânia

Resultado:
APROVADA

Campo Mourão
Novembro de 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me concedido o dom da vida e por eu ter me sustentado na fé ao longo dessa caminhada.

Agradeço a minha orientadora, Profa. Dra. Maria Ivete Basniak, por ter acreditado em mim em todo esse percurso, desde a graduação. Apesar das dificuldades enfrentadas, nunca desistiu de mim. Minha admiração e inspiração por você só aumenta a cada dia.

Agradeço também ao meu coorientador, Prof. Dr. Gilberto Silva dos Santos, por ter aceitado o desafio e que tem me auxiliado em toda essa caminhada. Sou imensamente grata a vocês dois pela paciência, dedicação, por todas as orientações e conversas que tivemos, presencialmente ou online, que sempre foram muito produtivas, e que me faziam refletir. Agradeço pelas leituras aos finais de semana e feriados. Somente posso dizer: muito obrigada por tudo.

Agradeço a minha família (hoje somos dez), por todo apoio e compreensão nos momentos em que estive ausente. Aos meus pais, obrigado por tudo, em todos os momentos. Ao meu namorado, muito obrigado por não desistir de mim, por pegar na minha mão e dizer: "já deu certo", também por leituras realizadas. Às minhas irmãs, que sempre estiveram presentes comigo, e aos meus sobrinhos, afilhado e cunhados, também sempre presentes comigo. Agradeço a todos que, de uma forma ou outra, me ajudaram.

Agradeço a todos que me ajudaram e apoiaram nessa reta final. Apesar das dificuldades e do tempo que precisei me afastar por motivos de saúde (foram quatro meses desafiadores), mas consegui seguir em frente. Em momentos que achei que não conseguiria concluir, qualifiquei-me um mês após o incidente e defendi três meses depois. Sou extremamente grata por tudo e entendi que, na vida, tudo tem um propósito.

Agradeço ao meu avô (in memoriam) que, nos momentos de desespero e vontade de desistir, sabia que estava comigo, me fortalecendo.

Agradeço a minha banca por ter aceitado o convite: Prof. Bruno Silva Silvestre, Profa. Talita Secorun dos Santos, e Profa. Vanessa Rhea, pelas valiosas considerações e contribuições trazidas durante a qualificação.

Agradeço ao Prof. Everton José Goldoni Estevam e ao grupo de estudos GEPTEMatE pelas contribuições constantes em meus textos.

Agradeço, ainda, as minhas amigas, que me ajudaram e estiveram ao meu lado nesse período: a todas vocês, meus sinceros agradecimentos. Estendo meus agradecimentos também a todos os colegas e professores do PRPGEM, que contribuíram para que tudo fosse possível.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo discutir potenciais nexos conceituais relacionados à geometria em um livro didático do Ensino Médio. A pesquisa fundamenta-se em aspectos históricos da geometria e seu ensino, e na perspectiva lógico-histórica, juntamente com os nexos conceituais. Como objeto de análise, foi escolhido o livro didático da coleção *Prisma,* adotada pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) para as escolas da rede Estadual de ensino. Essa coleção é dividida em seis volumes e o escolhido foi o de geometria. O livro é composto por quatro capítulos, dos quais foi selecionado o quarto capítulo, sobre corpos redondos, devido apresentar, de maneira unificada, o conteúdo de Geometria Plana e Espacial. A partir do quadro teórico, foram criadas as categorias de análise que orientaram a identificação: i) das posições das figuras, ii) da história da matemática, iii) das relações entre figuras no plano e no espaço, e iv) das relações da geometria com o cotidiano e outros conceitos. Com base nessas categorias, as páginas do referido capítulo foram analisadas com o intuito de selecionar trechos que respondessem às questões formuladas nas categorias de análise. Como resultado dessa busca, foram selecionados dezesseis trechos do capítulo para realizar as análises, a partir dos quais foi elaborada uma síntese interpretativa dos dados. Nesses trechos selecionados, observamos que o material permite estabelecer relações entre as figuras bi e tridimensionais e realizar ligações entre diferentes conceitos. Com relação às posições das figuras presentes nos trechos, são todas verticais, paralelas às bordas do livro. Na relação entre objetos reais, foram identificados seis trechos que abordam essa aproximação. A respeito das relações com duas e três dimensões, em dez trechos foram identificadas essas articulações e no que concerne à história da matemática, em apenas um trecho selecionado aparece essa abordagem. A partir dos trechos selecionados e analisados, reconhecemos que há indícios de nexos conceituais e que estão implícitos no livro didático, necessitando mediação dos professores para que essas relações sejam trabalhadas e exploradas em sala de aula. Conclui-se que o livro didático contribui com o encadeamento de ensino e é um material que permite diversas possibilidades para pensar aulas de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Figuras Bi e Tridimensional; Perspectiva Lógico-histórica; Nexos Conceituais; Ensino de Geometria.

ABSTRACT

This research aims to discuss potential conceptual connections related to geometry in a high school textbook. The research is based on historical aspects of geometry and its teaching, and the logical-historical perspective, along with the conceptual connections. The textbook from the Prisma collection, adopted by the State Secretariat of Education of Paraná (SEED in its Portuguese acronym) for state schools, was chosen as analysis object. This collection is divided into six volumes, and the one chosen was the geometry volume. The book is composed of four chapters, of which the fourth chapter, on round bodies, was selected because it presents, in a unified way, the content of Plane and Solid Geometry. Based on the theoretical framework, the following categories of analysis were created: i) those that guided the identification of the positions of the figures, ii) the history of mathematics, iii) the relationships between figures in the plane and in space, and iv) the relationships of geometry with everyday life and with other concepts. Based on these categories, the pages of the chapter mentioned were analyzed to select excerpts that answered the questions formulated in the analysis categories. As a result of this search, sixteen excerpts from the chapter were selected for analysis, from which an interpretive synthesis of data was developed. In these selected excerpts, we observe that the material allows for establishing relationships between two- and three-dimensional figures, and it is possible to make connections between different concepts. Regarding the positions of the figures present in the excerpts, they are all vertical, parallel to the edges of the book. In the relationship between real objects, six excerpts were identified that address this approach. On the relationships between two and three dimensions, these connections were identified in ten excerpts, and concerning the history of mathematics, this approach appears in only one selected excerpt. Based on the selected and analyzed excerpts, we recognize that there are indications of conceptual connections which are implicit in the textbook, requiring mediation from teachers so that these relationships can be addressed and explored in the classroom. In conclusion, the textbook contributes to the continuity of teaching and is a material that allows for various possibilities for planning mathematics lessons.

Keywords: Mathematics Education; Bi and Tridimensional; Logical-historical perspective; Conceptual nexus; Geometry teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

AH/SD	Altas Habilidades/Superdotação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
LRCO	Livro de Registro Classe Online
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
RCEM-PR	Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEED	Secretaria Estadual de Educação
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As ideias que nortearam esta pesquisa, relacionadas à geometria, foram abordadas de forma inicial, anteriormente, em meu[1] Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Nesse estudo, foi realizada uma investigação com alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD) por meio da manipulação de um cenário animado construído no GeoGebra, e teve como objetivo compreender quais relações eles estabelecem entre a geometria Plana e Espacial[2].

Após finalizar a graduação, ingressei na Educação Básica lecionando em uma escola do campo, com disciplinas de Matemática e itinerários[3] em turmas do Ensino Médio. Essa experiência proporcionou olhar para a sala de aula estando dentro dela, observando e tendo contato diretamente com os estudantes. Com base em vivências e experiências enquanto professora, pude observar que muitos estudantes têm dificuldades em compreender conceitos de geometria. Uma das dificuldades mais observadas em sala de aula é a tarefa de associar que as faces (lados) de um sólido geométrico são figuras planas, pois para os estudantes, quadrado e cubo são a mesma coisa.

Nesse período, fui selecionada para realizar a pós-graduação *stricto sensu* (mestrado), o que possibilitou dar continuidade[4] à pesquisa no campo do ensino de geometria, mas agora com o olhar para as aulas de Matemática. Assim, na presente pesquisa, que teve como objetivo discutir potenciais nexos conceituais relacionados à geometria em um livro didático do Ensino Médio, damos continuidade aos estudos em relação à geometria, com foco nos nexos conceituais referentes a ela.

Um dos conteúdos que fazem parte da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é a geometria. Ela está presente em nosso cotidiano, na natureza, em objetos que utilizamos durante o dia a dia e em construções. A geometria faz parte da nossa vida, pois ao nosso redor, podemos observar diferentes formas geométricas (Fonseca *et al.*, 2011).

Pesquisas como as de Barros (2021), Freitas (2022) e Koftun (2023) ampliam a temática sobre diferentes campos da geometria. Barros (2021) discute, em seu estudo, como são apresentadas as relações entre figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais em uma

---

[1] Nesta parte, utilizamos a primeira pessoa do singular, pois se trata de uma trajetória pessoal e profissional da autora deste trabalho.
[2] Disponível em formato de artigo: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/6330.
[3] Pensamento Computacional, Robótica Educacional, Educação Financeira, Física I, Matemática I e II.
[4] Esse trecho refere às mesmas autoras do TCC.

coleção de livros didáticos adotada pelo estado do Paraná. Koftun (2023) discute como ocorre a diferenciação entre objetos da geometria Plana e Espacial durante a construção de Cenários Animados no GeoGebra. Já Freitas (2022) fez uma análise entre a relação do modo de organização do ensino de matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, e sobre como isso possibilitou que estudantes se apropriem de conhecimentos fundamentais por meio de suas ações e operações, bem como dos nexos conceituais de geometria.

Os nexos conceituais da geometria, segundo Freitas (2022, p. 51), "são lógicos e históricos e podem ser considerados 'elos' que ligam os conceitos que historicamente foram construídos por várias civilizações e, assim, nunca estão prontos e acabados".

Sousa (2004) entende que os nexos podem ser uma relação existente entre os diversos conceitos matemáticos que são desenvolvidos ao longo das civilizações. O movimento lógico-histórico contém os nexos internos e externos, que são desenvolvidos ao longo da história da humanidade (Sousa, 2023). Os nexos externos limitam-se aos elementos do conceito e ficam por conta da linguagem formal, já os internos compõem o lógico-histórico do conceito.

A partir do referencial teórico, objetivo e objeto de pesquisa, este trabalho busca analisar os potenciais nexos conceituais presentes no livro didático do estado do Paraná. A presente pesquisa foi desenvolvida no estado do Paraná, no período de 2024 a 2025. Nesse estado, a Secretaria Estadual de Educação (SEED) disponibiliza materiais norteadores vinculados aos conteúdos e às avaliações diagnósticas[5], os quais são disponibilizados no Livro de Registro Classe Online (LRCO). Nesse espaço, o "professor encontra planos de aula específicos para suas disciplinas e séries para as quais leciona, com sugestões pedagógicas e encaminhamentos metodológicos" (Paraná, 2022, p. 1).

Os conteúdos programados estão disponíveis no formato de slides, estando vinculados ao livro didático e de acordo com os planos de aulas, que "são organizados por tema, conteúdo, conhecimentos prévios e objetivos. Eles também se dividem por trimestre e contemplam, além dos conteúdos essenciais, informações e atividades complementares" (Paraná, 2022, p. 1). A tarefa de casa é disponibilizada aos estudantes em formato quizizz, que são questões obrigatórias para serem resolvidas, vinculadas ao conteúdo que está sendo estudado em sala de aula.

[5] Prova Paraná e Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Essa última é nacional e ocorre a cada 2 anos.

Nessa pesquisa, o livro didático foi escolhido como objeto de investigação porque pode ser um material utilizado pelos professores, tanto para organizar e produzir suas aulas quanto para os alunos terem como referencial de apoio. Barros (2021, p. 25) compreende que o "livro didático é apontado como um dos mais importantes instrumentos de apoio ao professor para o desenvolvimento das atividades em sala de aula".

Nesse sentido, analisamos o livro didático utilizado pelas escolas do estado do Paraná. Esse livro foi escolhido pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021-2024 e é adotado por todas as escolas do estado do Paraná. A coleção de livros escolhida pelo PNLD 2021-2024 para o Ensino Médio foi a coleção *Prisma*[6]. Essa coleção está dividida em 6 volumes: Conjunto e funções; Funções e Progressões; Geometria e Trigonometria; Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas; Geometria; Estatística, Combinatória e Probabilidade. O volume escolhido para análise é o que trata de Geometria.

O livro didático intitulado como *Geometria* é composto por quatro capítulos: Áreas, Geometria Espacial de Posição, Poliedro e Corpos Redondos. O capítulo escolhido para ser analisado foi o de número quatro, que trata dos Corpos Redondos. A escolha desse capítulo se deve ao fato de que ele apresenta as definições desses sólidos estabelecendo relações entre o bidimensional e o tridimensional. Além disso, porque para construir o referencial, observou-se uma limitação de referenciais teóricos de corpos redondos, o que gerou dificuldades em encontrar estudos que tratam de forma direta desse tema.

Assim, este estudo está dividido em três capítulos, além desta introdução e das Considerações finais. O capítulo dois busca apresentar aspectos históricos da geometria e seu ensino, e os nexos conceituais de geometria na perspectiva lógico-histórica. Para isso, utilizamos como referencial o livro de Roque (2012) e as obras de Monteiro (2015) e Kaleff (1994), e buscamos fazer uma ponte com estudos de autores como Pavanello (1993, 2004), Ranzan (2010), Koftun (2023), Machado *et al.* (*2018*), Gravina (1996), Soares, Santana e Santos (2022), Fonseca *et al.* (2011), Sousa (2014, 2018, 2023), Fraga (2023), Freitas (2022), Rezende e Andrade (2010), Fischbein (1993), Costa (2020), Dumont e Bairral (2008), Piéron (1987), Davidov (1982), Panossian (2014) e Moura, Araújo e Cedro (2018), e com a BNCC (Brasil, 2018) e o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (RCEM-PR – Paraná, 2021), além de materiais para apoio.

[6] O livro pode ser acessado através do link: https://u.pcloud.link/publink/show?code=XZidzV5ZlcoCt6cDBdpfMQtw96aHBzoFD3uV.

No terceiro capítulo, apresentamos o contexto e pressupostos metodológicos. Já o quarto capítulo expõe as análises a partir dos critérios estabelecidos e do referencial teórico. No último capítulo são feitas as considerações finais da pesquisa.

2 O ENSINO DA GEOMETRIA E OS NEXOS CONCEITUAIS NA PERSPETIVA LÓGICO-HISTÓRICA

O estudo de geometria pode ser uma ferramenta de leitura do mundo, oferecendo a oportunidade de identificar conceitos que se relacionam com a Aritmética e a Álgebra. Seu estudo ganha destaque, pois implica o desenvolvimento do pensamento, que possibilita compreender, descrever e representar o mundo em que se vive, que é um mundo intuitivamente geométrico (Ranzan, 2010).

Neste capítulo, fundamentado principalmente em Roque (2012), Monteiro (2015) e Kaleff (1994), apresentamos alguns aspectos teóricos do ensino e da história da geometria. Assim, muitos aspectos históricos não são aqui discutidos, uma vez que o objetivo deste trabalho não é historiográfico, mas salientamos sua relevância. A consideração dos aspectos históricos da Geometria, produzidos por diferentes povos e culturas ao longo do tempo, é fundamental para a compreensão desse campo do conhecimento como uma construção humana, plural e situada.

Desde as civilizações antigas até os povos originários de todos os continentes, práticas geométricas estiveram presentes na organização do espaço, na arquitetura, na arte, na agricultura, na navegação, na tecelagem, na construção de utensílios e em diversas formas de relação com a natureza e com o território. Tais saberes, muitas vezes transmitidos oralmente e incorporados às práticas cotidianas, revelam modos próprios de pensar, representar e resolver problemas espaciais, que não podem ser reduzidos ou subordinados à tradição eurocêntrica da matemática formal.

Reconhecer essas contribuições implica ampliar o olhar sobre a Geometria, valorizando os conhecimentos dos povos originários e de diferentes culturas como parte constitutiva de sua história, bem como afirmar a importância de uma abordagem epistemologicamente plural, ética e socialmente comprometida na pesquisa e no ensino de Matemática.

Porém, considerando a amplitude e riqueza desses conhecimentos, compilar todos esses dados em uma dissertação de mestrado sempre traria abandono, por desatenção, descuido ou desconhecimento. Então, nesse breve recorte aqui apresentado, a escolha dos autores considerou suas contribuições sobre a história da geometria e a relação com seu ensino. Roque (2012) traz uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas sobre como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo; Monteiro (2015) fez um estudo do desenvolvimento histórico do ensino da geometria no Brasil, buscando compreender as origens da geometria e como ela se desenvolveu ao longo do tempo; e Kaleff (1994) demonstra uma visão histórica do surgimento da geometria, além de apontamentos de como ela é ensinada. Também contextualizamos a perspectiva lógico-histórica e os nexos conceituais.

Além disso, estabelecemos algumas relações entre o bi e tridimensional e como essas relações são abordadas nos currículos nacionais, em especial na BNCC e no RCEM-PR.

2.1 Aspectos históricos da Geometria e seu ensino

As origens da geometria são indefinidas, pois suas elaborações ocorreram de maneira dispersa em diferentes civilizações ao longo do tempo (Monteiro, 2015). Alguns vestígios das primeiras escritas são emergentes da Mesopotâmia e datam do final do quarto milênio a. E. C.[7], quando algumas civilizações buscavam representar e registrar certos aspectos do cotidiano (Roque, 2012). Por meio de escavações, foi possível identificar essa forma mais arcaica de escrita, que consistia em objetos (Figura 1) de diversos formatos, como cones, esferas, discos, cilindros e pirâmides (Roque, 2012), exemplificando uma contagem a partir de elementos tridimensionais e considerando, de fato, a sua tridimensionalidade.

Figura 1 - Cones, esferas e discos representando medidas

Fonte: Roque (2012, p. 41).

Nessa época, a palavra *geometria* ainda não havia sido citada, só sendo registrada por volta do século 5 a. E. C. na segunda obra de Heródoto, que foi consagrada ao Egito (Roque, 2012). Roque (2012) relata que a tradição dos egípcios era de o rei partilhar a terra igualmente entre todos, prática denominada de agrimensura que, de acordo com Heródoto, teria dado origem à "invenção da geometria, um conhecimento que teria sido importado pelos gregos" (Roque, 2012, p. 93).

Kaleff (1994) aponta que a geometria surgiu das necessidades práticas da sociedade egípcia e demais civilizações em demarcar e delimitar superfícies, que eram alagadas pelas

[7] a. E. C - Antes da Era Comum.

cheias dos grandes rios. Assim, era necessário calcular os impostos dessas áreas atingidas, o que teria impulsionado as primeiras ideias geométricas. Essa hipótese tem origem nos escritos de Heródoto, que afirmou que o rei enviava pessoas para inspecionar o terreno atingido pelas inundações (Roque, 2012).

Nesse contexto, baseado nos escritos de Heródoto, Roque (2012) aponta que Tales de Mileto teria utilizado conhecimentos empíricos de geometria para calcular a altura das pirâmides do Egito por meio de observações e experiências, o que mostra o uso da geometria prática na Antiguidade. Esse uso

> Combina a ideia de que a geometria prática, de origem egípcia, teria evoluído para a determinação indireta de medidas inacessíveis, caso da altura de uma pirâmide. Enfatiza-se, assim, a origem empírica da geometria, bem como sua utilidade no tratamento de questões mais especulativas (Roque, 2012, p. 94).

Algumas especulações sobre o possível cálculo da altura da pirâmide, afirmado por Heródoto, é que é raro encontrar uma posição em que o sol tenha uma sombra privilegiada para que se possa fazer medições. Dessa forma, surgem dúvidas sobre a real história, e a resposta para isso é que não temos informações suficientes para afirmar que aconteceu ou não o cálculo da altura da pirâmide (Nobre, 2004).

Assim, a palavra *geometria*, segundo Roque (2012, p. 93), pode ser traduzida como "medida da terra, vem daí a ideia [de] que seu surgimento está ligado à agrimensura", corroborando com os escritos de Heródoto.

Roque (2012) aponta que, no século V a. E. C., houve muita prática geométrica e uma massiva participação dos gregos na geometria, que se caracterizou pelo nome de praticantes da geometria. Essa massiva participação aconteceu tornando a geometria utilitária, quando precisavam realizar algum cálculo de terra e, subsequentemente, começaram a descobrir e aprimorar conceitos, sendo formadas e estabelecidas ideias geométricas (Kaleff, 1994). No mesmo século supracitado, a autora relata que o pensamento geométrico[8] e técnico já estavam presentes.

O pensamento geométrico no meio pré-euclidiano, segundo Roque (2012, p. 138), "era sofisticado, mas ainda não contava com o caráter dedutivo expresso nos elementos". *Os elementos,* citados por Roque (2012), trata-se de uma obra desenvolvida e escrita por Euclides, como ápice da geometria grega. *Os elementos* formam um conjunto composto por treze livros publicados por volta de 300 a. E. C. Segundo a autora, não há registros oficiais desses livros,

[8] Pensamento geométrico: é a habilidade mental de desenvolver e compreender conhecimentos geométricos (Costa, 2020).

somente fragmentos dessas versões entre diversos papiros que foram encontrados próximo a cidades às margens do Rio Nilo. Foi a partir de *Os elementos* que esses conhecimentos foram apresentados, de forma estruturada (Kaleff, 1994).

Nesses livros constam exercícios e exemplos que fazem uso de régua e compasso. Durante muito tempo, a utilização de régua e compasso na construção da geometria foi restrita, o que Roque (2012, p. 153) questiona se não poderia ser decorrente da proibição de outros materiais, pois "régua e compasso não permitem resolver todos os problemas propostos pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides". Isso possibilitou recorrer a outros métodos de construção para conseguir resolver determinados problemas.

Em muitos casos, as limitações desses instrumentos tradicionais (régua e compasso) tornavam impossível realizar algumas construções de maneira precisa.

Nesse contexto, Monteiro (2015, p. 7) refere que as primeiras unidades de medida surgiram por volta de 3500 a. E. C. e "referiam-se direta ou indiretamente ao corpo humano: palmo, pé, passo, braça, cúbito". Nessa mesma época foi necessário criar e aprimorar objetos construídos.

> Por volta de 3500 a.C. - quando na Mesopotâmia e no Egito começaram a ser construídos os primeiros templos, foi necessário desenvolver unidades de medidas mais uniformes e precisas. Adotaram então a longitude das partes do corpo de um único homem (geralmente o rei) e com essas medidas construíram réguas de madeira e metal, ou cordas com nós, que foram as primeiras medidas oficiais de comprimento (Monteiro, 2015, p. 7).

Com o passar dos anos, esses instrumentos foram sendo aperfeiçoados e substituídos por novos instrumentos, como, por exemplo, o compasso, que substituiu a corda com a estaca para construir círculos (Monteiro, 2015). Segundo Freitas (2022), o ser humano, por meio de suas vivências e experiências, aperfeiçoa os instrumentos, dando objetivo e finalidade para os materiais que utiliza em medições. Esse avanço reflete a importância contínua da pesquisa sobre geometria ao longo da história, pois corrobora para melhorar e aperfeiçoar instrumentos utilizados de forma prática.

As descobertas da geometria são incertas, e foram desenvolvidas por diversas civilizações, aparentemente coincidindo com algumas necessidades do cotidiano, como medições e divisões de terra, construções em geral e observação do movimento dos astros (Monteiro, 2015).

Relacionamos a geometria com diversas circunstâncias da nossa vida, por exemplo, na natureza, em objetos que utilizamos e em construções (Fonseca *et al.*, 2011), pois ao nosso redor, podemos observar diferentes representações de formas.

Koftun (2023, p. 38) entende que

> Há muito tempo a Geometria é essencial para auxiliar em situações da realidade, e ao admitirmos que o surgimento e desenvolvimento da Geometria está associado à resolução de problemas práticos, que a princípio são modelados por representações bidimensionais e tridimensionais, compreendemos que o conhecimento sobre Geometria Plana é indissociável da Geometria Espacial e vice-versa. Nesse sentido, é indicado que, no processo de ensino, permaneçam articuladas.

Ainda, Koftun (2023, p. 38) ressalta que a geometria está presente na "Física na natureza, no artesanato, em pinturas e na arte em geral, além de ser contemplada em problemas da própria Matemática".

Mesmo reconhecendo que representações da geometria fazem parte do nosso dia a dia, Vasconcelos (2008) afirma que a geometria ainda é pouco trabalhada em aulas de matemática na Escola Básica, pois alguns professores não têm a devida compreensão acerca desse assunto, o que pode comprometer o desenvolvimento dos alunos por priorizar o estudo de figuras geométricas sem estabelecer relações entre elas e o espaço no qual estão inseridas.

Nesse sentido, Ranzan (2010) relata que, nas conversas entre docentes e discentes, a dificuldade é tanto no ensinar quanto no aprender. Barros e Pavanello (2022, p. 12) ressaltam que "pesquisas mais recentes apontam que o ensino da geometria se mostra ineficiente e precário, o que evidencia as dificuldades tanto de professores quanto de alunos em todos os segmentos da Educação Básica". Desde a década de 1990, em seus estudos sobre um distanciamento do estudo de geometria, Pavanello (1993, 2004) evidencia que, no currículo escolar, em alguns casos, a geometria era excluída, e em outros, desenvolvida de uma maneira mais formal, a partir da introdução da Matemática Moderna.

Em certas situações, o conteúdo de geometria era programado para o fim do ano letivo, o que podia aumentar a probabilidade de não ser estudada, pois "muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixavam de inclui-la em sua programação" (Pavanello, 1993, p. 1). Nessa perspectiva, Lorenzatto (1995) aponta que, na década de 1990, a geometria compunha as últimas partes do livro didático, aumentando a chance de ser excluída das aulas de matemática no período letivo. Além disso, quando abordada nos livros didáticos, era acompanhada de definições e representações particulares, em que as figuras, denominadas *protótipos*, poderiam dificultar o entendimento dos estudantes. Como um "conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, [o conteúdo era] desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico" (Lorenzatto, 1995, p. 2).

Outro problema denunciado por Pavanello, em uma entrevista realizada por Moran *et al.* (2023, p. 6), "é a falta do ensino da geometria na formação escolar dos professores e esse contato ocorre apenas na graduação de uma forma mais complexa, voltada ao bacharel e não ao licenciando, ou seja, diferente daquela a ser ensinada na escola".

Essa dificuldade muitas vezes já percebida pelos futuros professores acaba influenciando sua prática ao ensinar os conceitos geométricos nos níveis iniciais de ensino (Moran *et al.,* 2023). Nesse sentido, esses profissionais, quando vão para a sala de aula, levam essa forma mais axiomática, e deixam os alunos amarrados nas questões de cálculo. Costa *et al.* (2009, p. 2), observaram

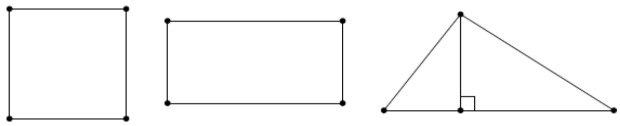
> [...] que os discentes estão presos a fórmulas e em sua maioria não conseguem relacionar conceitos, identificar os elementos do sólido ou ainda estabelecer relação entre dois sólidos, isto se deve muitas vezes a deficiências de conceitos básicos da Geometria Plana e também as dificuldades conceituais dos próprios professores em conceitos básicos da Geometria Plana e mesmo da Geometria Espacial.

Do mesmo modo, Machado *et al.* (2018, p. 7) apontam que, "em Geometria Plana, alunos da Escola Básica frequentemente confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado", isso se deve ao fato de não explorar o pensamento geométrico necessário para conseguir estabelecer relações entre elementos geométricos.

Pensar nesses obstáculos apresentados por parte dos alunos, em confundir propriedades, possivelmente seja um reflexo de como é comumente trabalhada em sala de aula (figuras não podem ser movidas ou alteradas em uma página de um livro ou no quadro-negro) Machado *et al.* (2018). Souza e Mattos (2024, p. 15) também entendem que esse não reconhecimento ou confusão pode ocorrer pelo fato de que as figuras geométricas, quando "construídas no papel ou na lousa com auxílio de régua e compasso, são estáticas e comumente representadas na mesma posição".

Muitos desses exercícios presentes no livro didático vêm acompanhados ainda de desenhos, como quadrados, retângulos e triângulos. Essas figuras são "desenhadas quase sempre com os lados paralelos às bordas da folha e os triângulos, em sua maioria, são acutângulos e quase sempre estão desenhados com um dos lados na 'horizontal' e sua altura na 'vertical'" (Machado *et al.,* 2018, p. 2). A Figura 2, na página seguinte, demonstra os desenhos.

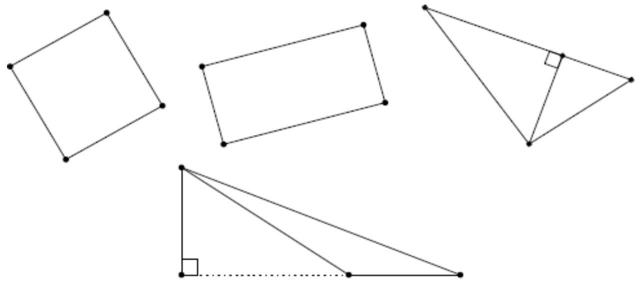
Figura 2 - Representação de um quadrado, retângulo e triângulo



Fonte: Machado *et al*. (2018, p. 2).

Machado *et al.* (2018, p. 2) discutem, ainda, que quando essas representações estão em posições diferentes, "leva[m] nossos alunos a não reconhecerem desenhos desses mesmos objetos em outras posições". A Figura 3 apresenta as representações em outras posições.

Figura 3 - Representações de um quadrado, retângulo e triângulo em posições diferentes



Fonte: Machado *et al.* (2018, p. 2).

Similarmente, o estudante também enfrenta desafios no que se refere ao pensamento espacial, conforme apontado por Machado *et al.* (2018, p. 7), pois "a tarefa de reconstruir mentalmente uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional estática impressa na página de um livro" exige um raciocínio complexo por parte dos alunos, e alguns não conseguem exercer tal raciocínio.

Nesse sentido, torna-se relevante compreender que o termo *figura* pode assumir diferentes significados, sendo comum referirmos *figura* quando queremos "indicar a representação de algum objeto ou imagem, seja em livros, revistas, jornais, folders ou até mesmo em um quadro" (Barros, 2021, p. 20). Kaleff (2016) entende que a palavra *figura* pode ter diversos significados, como elementos gráficos, também pode ser representada por meio de um gráfico em papel, telas e pinturas. Quando se fala de uma figura matemática, Kallef (2016, p.18) defende que:

> Uma figura é considerada uma figura matemática quando preenche exigências específicas relativas a duas maneiras de ser representada: por um lado, em uma forma de pontos e traços, e por outro em uma forma proposicional, isto é, na forma de proposições expressas em linguagem natural ou simbólica formal, representando suas propriedades matemáticas características, isto é, seus atributos relevantes.

Logo, entendemos que figuras planas podem também ser chamadas de figuras bidimensionais, ou seja, que somente duas dimensões, largura e comprimento, podem ser representadas no plano, também compõem as faces e as bases dos sólidos geométricos. Seus traços podem ser obtidos por meio de ferramentas de desenho (régua, esquadro, compasso, curvas francesas, etc.), ou ainda outras, como as advindas do uso do computador, como software de geometria dinâmica (Kaleff, 2016).

Barros (2021, p. 22) entende a figura "geométrica plana, também conhecida como figura geométrica bidimensional, como uma figura que possa ser representada em duas dimensões, ou seja, é possível observar tanto a largura quanto o comprimento da figura".

Fonseca *et al.* (2011, p. 38, grifo dos autores) salientam "que as figuras planas são idealizações, já que elas não possuem espessura; portanto o que as crianças podem *perceber* são representações dessas formas". Nesse sentido, o plano se refere a um exemplo de algo que não tem espessura: "o plano, além de não ter espessura, também não tem limite, e essa é mais uma característica que nos impede de encontrar para ele um modelo físico fiel" (Fonseca *et al.*, 2011, p. 56). Os objetos geométricos, como o ponto, a reta e o plano, também não são concretos. O ponto apresenta dimensão zero ou sem dimensão, a reta tem uma dimensão e o plano duas dimensões; assim, tais características apresentadas não são visivelmente compreendidas na realidade (Fischbein, 1993).

Vasconcelos (2009, p. 12) entende que alguns exemplos de figuras geométricas planas são "(círculo, triângulo, quadrado, retângulo e representações gráficas das figuras não-planas) e alguns exemplos de figuras geométricas não-planas (esfera, pirâmide, cubo, paralelepípedo)". Entender o que são essas figuras geométricas não planas possibilita nos familiarizar com objetos do espaço, procurando entender o espaço em que vivemos.

As formas geométricas espaciais podem ser relacionadas com o cotidiano, permitindo estabelecer comparações "entre objetos físicos e geométricos, como comparar uma lata de refrigerante a um cilindro, e uma esfera com uma bola de futebol, por exemplo" (Koftun, 2023, p. 39). Uma figura geométrica espacial, também conhecida como tridimensional ou 3D, é caracterizada por possuir três dimensões: altura, comprimento e largura. Embora em nosso meio os objetos presentes sejam tridimensionais, algumas de suas representações não são regulares, apresentam as características altura, comprimento e largura, mas com as medidas alteradas, não sendo regulares. Mesmo "o cubo ou a esfera, a que o matemático se refere, não existem na realidade física, embora sejam representações tridimensionais. Esses, também, são meras construções mentais que não devem possuir qualquer realidade substancial" (Costa, 2020, p. 4). Portanto, esses objetos geométricos não existem na realidade, no mundo físico, mas podemos encontrar as representações desses objetos geométricos a partir de objetos físicos que atendem características dos objetos geométricos espaciais (Costa, 2020).

As figuras geométricas espaciais são classificadas entre poliedros e corpos redondos. Os poliedros são: prisma, cubo, pirâmide, tetraedro, octaedro e o dodecaedro. Já os corpos redondos são: cilindro, esfera e cone. Os corpos redondos são construídos a partir da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Os sólidos geométricos têm suas faces e bases formando figuras planas. Os corpos redondos são objetos que possuem pelo menos um lado curvo. Quando colocados sobre uma mesa ou no chão, esses objetos podem rolar (Dumont; Bairral, 2008).

Dentre as características do cilindro, podemos citar que possuem “duas bases planas na forma de um círculo e uma superfície lateral visualmente arredondada”, e o cone deve possuir “uma base plana na forma de um círculo, um único vértice e uma superfície lateral visualmente arredondada” (Koftun, 2023, p. 136). Assim, “são classificados como corpos redondos, por possuírem ao menos uma superfície curva. A superfície curva não é o círculo da base, mas a lateral desses objetos” (Koftun, 2023, p. 136).

Portanto, é necessário que o estudante estabeleça relações entre a geometria plana e espacial para diferenciá-las. Entretanto, alguns estudantes não conseguem estabelecer essas relações tão facilmente, sendo uma alternativa para amenizar esses problemas causados pela transição da geometria plana para a espacial inverter o processo, ou trabalhá-las de maneira unificada (Silva Filho, 2015).

Nesse sentido, uma possibilidade ao ensino de geometria, é desenvolver uma relação lógico-histórica, que “pode possibilitar a estudantes e professores estabelecerem relações entre os conteúdos apreendidos em sala de aula e o movimento fluente da vida” (Moura; Sousa, 2004, p. 16), pois favorece entender o lógico-histórico do pensamento geométrico das diversas civilizações. Segundo Moura e Sousa (2004, p. 16), isso “significa entender a relação existente entre a mutabilidade e a imutabilidade das coisas, bem como entender a relatividade existente entre o pensamento e a realidade ao qual estamos inseridos e ajudamos a construir, no movimento do vir a ser”, o que está associado aos nexos conceituais de geometria e à perspectiva lógico-histórica, que apresentamos brevemente na seção 2.2, a seguir.

2.2 Perspectiva lógico-histórica e nexos conceituais de geometria

Entendemos que tanto o campo da geometria quanto os demais campos da Matemática foram desenvolvidos e elaborados historicamente por indivíduos de diversas civilizações, e a cada época que se passava era necessário se adaptar a novas necessidades existentes (Freitas, 2022). Ainda observamos que essas transformações não aconteceram de forma cumulativa, mas por meio de construções e reorganização de conceitos.

Com base em Sousa (2018), Silvestre e Estevam (2024, p. 3), compreende-se o movimento lógico-histórico como "premissa fundamental para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem escolar, na defesa de uma perspectiva didática para o ensino de Matemática". Kopnin (1978, p. 183) considera que o *histórico* é o "processo de mudança do objeto, as etapas do seu surgimento e desenvolvimento". Assim, o *lógico* é "o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica" (Kopnin, 1978, p. 183). O pensamento humano não copia os passos históricos, mas realiza uma reconstrução desse objeto (Dias; Saito, 2009).

Sousa (2018) corrobora com Kopnin (1978) ao afirmar que o *lógico* pode refletir os principais períodos da história do objeto, e que o processo da mudança do objeto está relacionado às diversas civilizações que passaram para desenvolver tal objeto, e o lógico é a reflexão desse processo histórico. Kopnin (1978, p. 186) analisa a inter-relação entre o lógico e o histórico:

> O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico, ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento dialético do histórico e do lógico resolve–se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento.

Nesse sentido, entende-se que o *histórico* é a formação e a evolução dos conceitos matemáticos, considerando a interferência cultural e as civilizações ao longo do tempo. Já o *lógico* é a formulação da racionalidade do conceito[9], possibilitando identificar as relações presentes no conceito. Com isso, ao estudar a história da Matemática, não somos obrigados a seguir exatamente e impor o processo histórico, mas permitir a formação do pensamento lógico do movimento (Dias; Saito, 2009) e dos sentidos atribuídos ao longo de sua historicidade.

[9] Segundo Piéron (1987, p. 88), conceito é a "representação simbólica (quase sempre verbal), utilizada no jogo do pensamento abstrato, e tendo um significado geral válido para um conjunto de representações concretas naquilo que elas têm de comum". Fishbein (1993, p. 1) acredita que a característica de um conceito reside no "fato de ele expressar uma ideia, uma representação geral, o ideal de uma classe de objetos, a partir de suas características comuns".

Estudar o movimento lógico-histórico do conceito possibilita contribuir com a aprendizagem, de modo a auxiliar na construção do conhecimento, e permite que o indivíduo "compreenda a inexistência de verdades absolutas, concepções frequentes de estudantes em relação à matemática, gerada pelo método de ensino que aborda somente a lógica formal" (Dias; Saito, 2009, p.12).

Entendemos que o *histórico* consiste no processo de mudança do objeto, nas etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O *lógico* é o meio pelo qual o pensamento realiza essa ação no processo de reflexão sobre o histórico, de forma a refletir os principais períodos da história de tal objeto, ao evidenciar seus sentidos, suas aparições (Sousa, 2018).

Pensar em um ensino apoiado na perspectiva lógico-histórica "possibilita ao estudante o entendimento de um conceito em seu cerne. Por este viés, é dado ao estudante a oportunidade de (re)elaborar suas concepções sobre o conceito ao invés de simplesmente decorá-lo" (Rezende; Andrade, 2010, p. 2-3) e, com isso, aproximar suas aprendizagens dos contextos históricos e culturais dos elementos que constituem o campo da geometria.

Nesse sentido, utilizar esse movimento pode ter papel fundamental tanto para os estudantes quanto para os professores de matemática. Sousa e Moura (2016, p. 4) discutem que a perspectiva lógico-histórica em sala de aula tem

> como principal função auxiliar o pensamento tanto daquele que ensina quanto daquele que aprende a movimentar-se no sentido de encontrar as verdades que são relativas porque são definidas e redefinidas, continuamente, a partir de definibilidades próprias do conceito. A história, com suas várias vertentes historiográficas, assume o papel de elo entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades do conceito, que permitam compreender a realidade estudada.

Quando o movimento lógico-histórico dos conceitos é levado para a sala de aula e são "compreendidos pelos profissionais do ensino, podem se constituir em elementos didáticos que orientam os alunos a compreenderem boa parte do percurso das construções teóricas" (Sousa, 2023, p. 2), e incentivar os estudantes a pensarem e formularem conceitos matemáticos.

Utilizando o processo do conhecimento de um "objeto, a análise do lógico e do histórico faz parte do desenvolvimento do pensamento teórico" (Freitas, 2022, p. 50). No processo de conhecimento, o movimento dialético dessas categorias possibilita compreender a "realidade em seus nexos, relações internas e gênese, potencializando a compreensão do conceito" (Freitas, 2022, p. 50).

Aliados a essa perspectiva lógico-histórica, podemos identificar os nexos que se apresentam no pensamento teórico[10]. Nessa perspectiva, entendemos nexos conceituais, segundo Sousa (2018, p. 12), como

> os elos que fundamentam os conceitos contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento. Definimos nexo conceitual como o elo entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens que representam o conceito matemático.

Sousa (2023, p. 2) apresenta uma definição mais recente do que são os nexos conceituais:

> Entendemos que nexos conceituais podem ser considerados elos existentes entre conceitos, os quais são elaborados historicamente pelas diversas culturas humanas. Tais nexos podem ser definidos e compreendidos por licenciandos e professores que atuam nas escolas de Educação Básica, na medida em que entram em contato com as diferentes vertentes de historiografias de Matemática, as quais indicam o movimento lógico-histórico dos conceitos matemáticos.

Corroborando com Sousa (2018, 2023), Freitas (2022) reitera que os nexos conceituais são construídos historicamente. Assim, são construídos proporcional e constantemente, enquanto nos fazemos humanos. Portanto, "os nexos conceituais da geometria são lógicos e históricos, e podem ser considerados 'elos' que ligam os conceitos que historicamente foram construídos por várias civilizações e, assim, nunca estão prontos e acabados" (Freitas, 2022, p. 50-51).

Os nexos conceituais "são lógicos-históricos, e se apresentam no movimento do pensamento, tanto daquele que ensina, quanto daquele que aprende" (Sousa, 2018, p. 13). Referente à aula, isso vale tanto para sua preparação quanto para seu desenvolvimento, pois o pensamento está processando enquanto realizamos essas etapas. Os nexos estão e são formados ao longo do movimento lógico-histórico, trazem novas qualidades ao conceito e aprimoram conceitos primeiros (Fraga, 2023).

Fabri (2022) acrescenta que os conceitos não são compreendidos de forma separada ou linearmente. Os nexos conceituais não são uma recapitulação histórica do ensino, eles apresentam algumas necessidades que foram perpassadas pela humanidade, por meio das quais

[10] O pensamento teórico segundo Davidov (1982, p. 308-309) é considerado o "processo formativo do sistema, da integridade, do concreto, e apenas dentro desse processo revelam as peculiaridades e conexões dos objetos singulares".

foram se delineando algumas relações entre esses conceitos. Nessas relações e conexões está a essência[11] desses conhecimentos.

No processo histórico são considerados dois tipos de nexos: internos e externos. Segundo Freitas (2022, p. 50), "os nexos externos são formais, uma linguagem de comunicação do conceito pelo indivíduo". Logo, os nexos externos limitam-se ao conceito e às suas definições formais. Sousa (2018) entende que os nexos conceituais externos são apresentados na sala de aula desconectados das áreas do conhecimento, a partir dos símbolos, e como se tivessem vida própria, falassem por si só. Sousa (2016, p. 2), aponta que os nexos externos são apresentados em sala de aula por meio de:

> aspectos simbólicos contidos nos conceitos. É como se os símbolos tivessem vida própria; falassem por si só. Aqui, os conceitos são apresentados, em seu último estágio de rigor, a partir de alguns experimentos ou ainda de memorizações. Não há preocupações em analisar mudanças históricas, ou ainda, as sínteses históricas que se apresentam nos conceitos matemáticos. Podemos citar como exemplo, o conceito de função, tratado no Ensino Médio, de nossas escolas.

Ensinar por meio dos nexos externos traz resultados parciais aos alunos, e isso pode causar certo tipo de prejuízo. Segundo Sousa (2014, p. 76), "os prejuízos podem ser comprovados não só na falta de subjetividade do sujeito como também na formação do pensamento teórico", e um exemplo disso seria "aprender a variável só a partir da incógnita".

Os nexos internos "compõe os aspectos lógicos-históricos, filosóficos e culturais, do conceito e consequentemente, propiciam a formação do conceito geral para o particular, isto é, o pensamento teórico" (Freitas, 2022, p. 50). Entendemos que os nexos internos estão impregnados na história e por isso são históricos.

Portanto, um estudo histórico pode ajudar a reconhecer e realizar esse movimento atrelado aos nexos conceituais, entretanto, está sujeito a alterações a partir dos fatos que se tem acesso e do modo pelo qual o processo histórico é compreendido. Esse movimento é chamado de lógico-histórico.

Sousa (2014, 2018, 2023), Freitas (2022) e Fabri (2022) entendem que os nexos conceituais são ligações entre conceitos históricos que foram desenvolvidos por várias

[11] Com base em Panossian (2014, p. 84), a essência não se manifesta direta e imediatamente, e não pode ser "confundida com o conteúdo do objeto ou fenômeno, pois este abrange não só as relações internas (a essência), mas as externas, com a interação com outros objetos e fenômenos, que estão em constante transformação. [...] A essência se transforma, mas em um processo mais lento. A ciência não se limita à descrição dos fenômenos, mas revela a essência como nexo interno desses fenômenos. É sabido que a essência não coincide, em seu conteúdo, com os fenômenos e propriedades do objeto" (Davidov, 1982, p. 92-93, tradução nossa).

civilizações, e assim, nunca estão prontos e acabados e, portanto, vão se moldando a cada tempo.

Todos os conceitos possuem uma história que revela tanto sua origem quanto seu desenvolvimento ao longo da civilização (Rezende; Andrade, 2010). Essa trajetória é acompanhada por um desenvolvimento histórico e processo lógico também, que estabelece fundamentos racionais e estruturais para sua construção. O histórico e o lógico caminham lado a lado, complementando-se mutuamente em um movimento dialético (Rezende; Andrade, 2010).

Rezende e Andrade (2010, p. 2) entendem que

> Um estudo nessa perspectiva, não tem a intenção de, necessariamente, reportar a história do conceito, mas entender o movimento do pensamento que culminou na sua formalização teórica, ou seja, possibilitar que os estudantes se apropriem das particularidades do histórico que fundamentam o lógico.

Essa perspectiva possibilita, ao estudante, compreender e aprofundar os conceitos que estão sendo estudados, permitindo tentar "se apropriar dos nexos conceituais e aderir sentido a ele, criando bases sólidas para posterior aprendizagem de conceitos geométricos mais abstratos" (Freitas, 2022, p. 49).

Para isso, é necessário superar a lógica das aulas e atividades disponibilizadas prontas, sem considerar aspectos do contexto em que os estudantes estão inseridos, de sua realidade, de seus conhecimentos prévios e de sua construção lógica e histórica da geometria. Isso porque essas aulas e atividades, normalmente, são formais, estruturadas, padronizadas e não consideram aspectos lógicos-históricos. Nesse sentido, também não são consideradas possíveis dificuldades mentais, apresentadas pelos estudantes. Além disso, desconsidera-se a realidade existente nas escolas, como estrutura e funcionamento.

> Vários nexos conceituais de conceitos matemáticos, dentre eles, fluência, grandezas contínuas e discretas, senso numérico, composição e decomposição objetos tridimensionais presentes nos pensamentos aritméticos, algébricos e geométricos, praticamente, não frequentam a maioria das salas de aula brasileiras. Isso porque, as atividades de ensino de Matemática que são utilizadas pelos professores são formais e desconectadas da realidade e praticamente não consideram os aspectos lógico-históricos dos conceitos matemáticos (Sousa, 2014, p. 22).

Buscando relacionar e identificar indícios de potenciais nexos conceituais, usamos um exemplo a partir das relações entre conceitos, que está presente na obra de Fonseca *et al.,* (2011, p. 51), é:

> O quadrado é um quadrilátero que possui todos os ângulos internos retos e todos os lados iguais. Os ângulos são iguais; os lados são iguais[12]; as diagonais são iguais, e, ainda, interceptam-se nos respectivos pontos médios, que, por sua vez, estão (na verdade está, pois são coincidentes) alinhados com os pontos médios dos lados paralelos. Enfim, uma figura absolutamente "bem comportada", "certinha", padrão.

Esse exemplo representa um nexo conceitual externo e potencial de nexos conceituais internos, pois permite ter possibilidades de articulação e conexão entre os conceitos, buscando relações entre os conceitos de ângulos, ponto médio e diagonais para explicar o que vem a ser um quadrado.

Sousa (2018, p. 14) discute que um dos nexos conceituais de geometria são "a composição e a decomposição de figuras". O autor defende a ideia de que as atividades fornecidas aos estudantes priorizem tais nexos, o que pode convidar os estudantes a pensarem sobre determinados conteúdos (Sousa, 2018).

Paralelamente ao exemplo que explora aspectos de um quadrado, observamos que há indícios de nexos conceituais externos, mencionando as características do quadrado e exemplificando como é a figura quadrada. Notamos potenciais indícios de nexos conceituais internos, que podem ser relacionados com a representação dos objetos tridimensionais a partir das figuras planas, no caso de o quadrado relacionar com os lados (faces) de um cubo. Segundo Moura, Araújo e Cedro (2018), para o nexo conceitual *relação entre as formas tridimensionais e bidimensionais*, espera-se que o estudante construa relações entre o tridimensional, seu formato e a projeção do seu formato, que se relacionam com o plano.

A fim de identificarmos como o nexo conceitual *relação entre as formas tridimensionais e bidimensionais* aparecem nos documentos norteadores do currículo atualmente, realizamos uma busca na BNCC, pelas palavras *bidimensionais* e *tridimensionais*, as quais são mencionadas somente três vezes. Trocando as palavras para 2D e 3D, não encontramos nenhuma menção.

Associadas a essas palavras, aparecem duas habilidades: "Expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais" (Brasil, 2018, p. 48); e "Identificar e interpretar imagens bidimensionais e tridimensionais em diferentes tipos de representação cartográfica" (Brasil, 2018, p. 375). As habilidades selecionadas da BNCC não demonstram compreensão no que se refere às relações entre bi e tridimensionalidade, mas cabe associar os conceitos propostos e relacionados. A última aparição dessas palavras encontramos em um texto com uma breve explicação do

[12] A palavra iguais nesse trecho se refere a mesma medida ou congruentes.

documento, o qual afirma que sejam desenvolvidas “relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associam figuras espaciais a suas planificações e vice-versa” (Brasil, 2018, p. 272). Esse trecho demonstra o que se espera que os estudantes desenvolvam a partir das habilidades propostas.

Realizando uma busca no documento RCEM-PR pela palavra *bidimensionais*, só encontramos uma menção, proposta em uma habilidade: “Compreender o conceito de espaço geométrico (bi e tridimensional)” (Paraná, 2021). Na mesma busca, notamos a presença de mais duas habilidades que estão diretamente ligados ao bi e tridimensional: “reconhecer polígonos e sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos)” (Paraná, 2021), e à habilidade de “Identificar, associar e construir sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos) a partir de suas respectivas planificações” (Paraná, 2021). As habilidades selecionadas apresentam características que promovem relações entre o bi e tridimensional, mesmo sendo poucas as menções e sendo mencionadas somente no sexto ano, e possibilitam construir algumas relações entre o bi e tridimensional.

Considerando que o livro didático está alinhado a BNCC e ao RCEM-PR e é um dos materiais mais utilizados pelos professores para organizar e desenvolver as suas atividades para a aula, sendo uma das principais fontes de consultas dos estudantes (Costa; Allevato, 2010), é um objeto pertinente de análise de pesquisa, frente ao discutido neste capítulo, quanto às dificuldades enfrentadas no ensino de geometria relacionados à perspectiva lógico-histórica, aos nexos conceituais e questões curriculares.

No capítulo seguinte, discutimos o contexto e pressupostos metodológicos da pesquisa, utilizando o livro didático como referência para analisar os potenciais de nexos conceituais presentes nele.

3 CONTEXTO E PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa tem caráter qualitativo-interpretativo, cujo objetivo é discutir potenciais nexos conceituais relacionados à geometria em um livro didático do Ensino Médio.

Portanto, neste capítulo são discutidos e apresentados os procedimentos metodológicos e a organização dos dados para a análise. Por conseguinte, são descritas as características da pesquisa, assim como o processo de análise ocorreu.

A seção 3.1 é apresentado o contexto da pesquisa, com destaque para o livro didático, sublinhando suas características e como é realizada a escolha desse material. Nesta seção, apresentamos qual livro será objeto de análise, justificamos a sua escolha e construímos as categorias de análises, que são discutidas no capítulo de análises.

3.1 Contexto da pesquisa

Costa e Alevato (2010) defendem a ideia de que o livro didático deve ser bem estruturado para facilitar a preparação de aulas para os professores e para a pesquisa e leitura dos alunos, tendo papel fundamental para o ensino e para a aprendizagem.

Segundo Lajolo (1996) o livro didático pode ser considerado aquele material que será utilizado para aulas, cursos, o qual é escrito, editado, vendido e comprado, destinado para leitores que tenham interesses específicos pelo livro, e que necessitam de discussões e reflexões mais aprofundadas. O livro didático é um material importante para os processos de ensino e de aprendizagem, mas é necessário considerar que não é o único recurso. Barros (2021, 26), defende que

> o livro didático, por si só, não garante a aprendizagem dos alunos, mesmo porque ele pode apresentar incorreções. Daí a importância da escolha de um livro didático que não apresente incorreções para que o professor possa não só utilizá-lo em sua prática letiva como obtendo nele informações que possam auxiliá-lo verdadeiramente em sua tarefa pedagógica.

Para acontecer essa escolha e garantir um bom livro, foi criado, em 1985, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), por meio do qual existe a responsabilidade de escolher e distribuir gratuitamente, a todas as escolas brasileiras, obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educacional, com exceção da Educação Infantil (Barros 2022).

O livro didático no Ensino Médio do estado do Paraná começou a ser distribuído a partir do ano de 2006 nas escolas públicas de maneira gratuita. Esse livro, inicialmente, foi construído com a participação dos professores, com um projeto denominado *Projeto Folhas*[13]. Com isso, um dos resultados desse projeto foi a produção do *Livro Didático Público*, o qual foi direcionado a professores e alunos do Ensino Médio (Paraná, 2010). Em 2006, o Paraná realizou o primeiro lançamento desse livro, e distribuiu cerca de "5,4 milhões de exemplares, de doze disciplinas, e agora são mais 1,8 milhão para os alunos que estão chegando ao ensino médio" (Paraná, 2008, p. 1). Esse livro ficou vigente no estado do Paraná até o ano de 2010, depois disso passou a ser responsabilidade do governo federal.

A partir do ano de 2004 foi implantado, pela Resolução nº 38 do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), que previa a distribuição universal do livro didático do público no país. No Quadro 1, apresentamos informações sobre a distribuição desses livros.

Quadro 1 - Distribuição dos livros didáticos

(continua)

Ano	Disciplina	Observações
2004	Implantação da PNLEM	Resolução nº 38 do FNDE previa a distribuição universal do livro didático
2005	Matemática e Língua Portuguesa	Distribuição parcial para a 1ª série do Norte e Nordeste
2006	Matemática e Língua Portuguesa	Distribuição para todos os anos escolares e regiões do país
2007	Matemática, Língua Portuguesa e Biologia	Reposição e complementação de Matemática e Língua Portuguesa e distribuição integral de Biologia
2008	Matemática, Língua Portuguesa, Biologia, Química e História	Reposição e complementação de Matemática, Língua Portuguesa e Biologia e distribuição integral para Química e História
2009	Matemática, Língua Portuguesa, Biologia, Física e Geografia	Distribuição integral dos livros de Matemática, Língua Portuguesa, Biologia, Física e Geografia e reposição de Química e História
2010 e 2011	Reposição	Foram feitas as primeiras e segundas reposições
2012	Lançamento de edital	No edital era possível editoras se inscrever com obras multimídia, reunindo livros impressos e livros digitais
2015	6 Coleções aprovadas no PNLD	Conexões com a Matemática, Matemática: Contexto e Aplicações, Matemática Paiva, Matemática Ciências e Aplicações, Matemática: Ensino Médio, Novo Olhar Matemática.
2018	8 coleções escolhidas pelo PNLD	Matemática – Contexto & Aplicações, Quadrante Matemática, Matemática: Ciência e Aplicações, Matemática para Compreender o Mundo, Matemática: Interação e Tecnologia, #Contato Matemática, Matemática – Paiva, Conexões com a Matemática.
2018	8 coleções escolhidas pelo PNLD	Matemática – Contexto & Aplicações, Quadrante Matemática, Matemática: Ciência e Aplicações, Matemática para Compreender o Mundo, Matemática: Interação e Tecnologia, #Contato Matemática, Matemática – Paiva, Conexões com a Matemática.

[13] O projeto folhas tratava-se de um programa de Formação Continuada dos Profissionais da Educação que tinha como foco incentivar os professores a pesquisarem e produzirem o material didático com uma metodologia mais específica (Paraná, 2010).

(conclusão)

Ano	Disciplina	Observações
2021	10 coleções aprovadas	Conexões - matemática e suas tecnologias, Diálogo - Matemática e suas tecnologias, Interação matemática, Matemática em contextos, Matemática interligada, Matemática nos dias de hoje, Multiversos - matemática, Matemática Prisma, Quadrante matemática e suas tecnologias e Ser protagonista matemática e suas tecnologias.

Fonte: elaboração própria dados de Brasil (2010; 2015; 2017; 2021).

No ano de 2021 foram aprovadas dez coleções, e dessas, a coleção adotada pelo estado do Paraná foi a coleção Prisma, que teve como período de vigências os anos compreendidos entre 2021 e 2025.

A coleção está dividida em 6 volumes: Conjunto e Funções; Funções e Progressões; Geometria e Trigonometria; Sistema, Matemática Financeira e Grandezas; Geometria; Estatística, Combinatória e Probabilidade. Essa coleção foi escrita por José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr e Paulo Roberto Câmara de Sousa, publicada pela editora FTD em 2020. Em relação ao ano escolar, é uma coleção de volume único, sendo necessário organizar e utilizar o livro necessário a partir do que vai ensinar. O livro escolhido (Figura 4) da coleção é intitulado *Prisma Matemática*: *Geometria*.

Figura 4 – Capa do Livro

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020).

A obra é disponibilizada gratuitamente para alunos e professores, e segue uma organização de acordo com a BNCC. O livro é composto por 4 capítulos (Quadro 2, na página seguinte): Áreas, Geometria Espacial de posição, Poliedros e Corpos redondos.

Quadro 2 - Organização do livro didático *Prisma*

Capítulo	Título	Temas abordados
1	Áreas	Introdução à área, cálculo da área de polígonos regulares e irregulares.
2	Geometria espacial de posição	Posição relativa entre retas e planos, representação espacial, projeções.
3	Poliedros	Definição, classificação, propriedades e planificações de poliedros.
4	Corpos redondos	Cilindro, cone e esfera: propriedades, áreas e volumes.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020).

O Quadro 3 apresenta o sumário do livro didático.

Quadro 3 - Organização dos capítulos 1, 2, 3 e 4 do livro didático.

(continua)

Capítulo 1	
Áreas	**Introdução**
	Área de polígonos ● Área do retângulo ● Área do quadrado ● Área do paralelogramo ● Área do triângulo ● Área do losango ● Área do trapézio
	Área do círculo e de suas partes ● Área do círculo ● Área do setor circular ● Área da coroa circular
	História da Matemática Uma aproximação de Π
	Polígonos regulares ● Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência ● Relações métricas nos polígonos regulares ● Área de um polígono regular
	Área e perímetro de um polígono regular em função da medida dos lados
	Razão entre áreas de polígonos semelhantes
	Ladrilhamento do plano
	Conexões ● Áreas verdes
	Explorando a tecnologia ● Explorando polígonos inscritos na circunferência
	Atividades complementares
	Para refletir

(continua)

Capítulo 2	
Geometria espacial de posição	**Introdução**
	Noções primitivas
	Postulados ● Postulados da reta ● Postulados do plano
	Determinação do plano
	Posições relativas de duas retas no plano e no espaço
	Posições relativas de uma reta no plano e no espaço
	Posições relativas de dois planos no espaço
	Paralelismo no espaço ● Teoremas sobre paralelismo
	Perpendicularismo no espaço ● Perpendicularismo entre reta e plano ● Planos perpendiculares teoremas sobre perpendicularismo
	Projeção ortogonal ● Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ● Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano ● Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano
	Conexões Arquitetura
	Explorando a tecnologia Programando posições relativas de retas e de planos
	Atividades complementares
	Para refletir
Capítulo 3	
Poliedros	**Poliedros** ● Poliedros convexos e poliedros não convexos ● Poliedros regular Poliedros de Platão
	Prismas ● Prisma regular ● Paralelepípedo ● Secção transversal de um prisma Área da superfície de um prisma
	História a Matemática A academia de Platão
	Volume ● Volume de um paralelepípedo ● Volume de um cubo ● Princípio de Cavalieri Volume de um prisma
	Pirâmides ● Pirâmide regular ● Secção transversal de uma pirâmide ● Área da superfície de uma pirâmide Volume de uma pirâmide
	Conexões ● Arte e Geometria
	Explorando a tecnologia ● Construção de modelos sólidos geométricos
	Atividades complementares
	Para refletir

(conclusão)

Capítulo 4	
Corpos redondos	**Introdução**
	Cilindro ● Secções de um cilindro ● Área da superfície de um cilindro ● Volume de um cilindro
	Cone ● Secções de um cone ● Área da superfície de um cone reto ● Volume de um cone
	Conexões ● Água: recurso e disponibilidade
	Esfera ● Volume de uma esfera ● Área da superfície esférica Secção de uma esfera
	História a Matemática ● Arquimedes
	Projeções cartográficas ● Projeção cilíndrica ● Projeção cônica ● Projeção plana
	Explorando a tecnologia ● Áreas e volumes de corpos redondos
	Atividades complementares
	Para refletir

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020).

Desses capítulos (Quadro 2), foi selecionado o capítulo quatro para realizar a seleção dos materiais que compõem as análises.

Assim, focamos nosso olhar para buscar, neste capítulo, tarefas, exercícios e explanações dos conteúdos que apresentassem ilustrações além do texto, especialmente aquelas relacionadas a bi e tridimensionalidade, contexto histórico, contexto do cotidiano, relações com outros conceitos.

Assim, o Quadro 4 foi construído a partir do referencial teórico, o qual aborda os aspectos históricos da geometria e seu ensino, diante disso, a partir dos trechos selecionados do livro didático na seção 4.2 foram analisados os potenciais nexos conceituais. Sua construção esteve orientada pelo objetivo da pesquisa, qual seja: discutir potenciais nexos conceituais relacionados à geometria em um livro didático do Ensino Médio. A partir desse objetivo, construímos os critérios de pesquisa e as questões orientadoras, que guiaram na seleção dos trechos do livro didático para posterior nortear as análises do capítulo quatro. O Quadro 4 (na página seguinte) está organizado em duas colunas: critérios de análise e questões orientadoras. Os critérios de análise são os tópicos centrais do referencial teórico para produzir as questões de análise.

Quadro 4 - Critérios de análises

Critérios de Análise	**Questões orientadoras**
Posições das figuras no plano e no espaço	As figuras aparecem sempre na mesma posição? Qual a posição que geralmente aparecem?
Relação entre as figuras bi e tridimensionais	Aparecem relações entre bidimensionais e tridimensionais?
	A associação de figuras geométricas planas com duas dimensões são elencadas?
	A figura geométrica espacial é apresentada com relação a duas dimensões? E com três?
Relação com o cotidiano	As figuras espaciais são contextualizadas com representações de objetos reais?
História da geometria	A história da geometria é citada, como? Aparece relacionada a outros contextos?
	Quando aparece, está relacionada às questões práticas da época, do local e da região em que foi considerada?
Conexões entre conceitos	São feitas ligações entre conceitos?

Fonte: Elaboração própria.

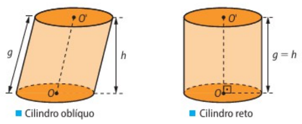
A partir do Quadro 4 foram selecionados os trechos do livro didático do capítulo quatro, cujas análises são apresentadas no próximo capítulo.

4 ANÁLISE DOS TRECHOS SELECIONADOS DO LIVRO DIDÁTICO

Primeiramente, na produção dos dados, foi realizada uma identificação das partes a serem analisadas, tomando como base as questões orientadoras (Quadro 4 e 5). Nessa etapa, foram lidas todas as páginas do capítulo quatro e foram feitos registros (*prints* das partes) dos textos, tarefas, imagens e explicações. Nessa etapa, foram selecionados 16 registros do livro, os quais estão sistematizados no Quadro 5, que é utilizado no movimento de análises de perguntas e respostas. O Quadro 5 contém três colunas: Questões orientadoras, Observações e Seleções no livro didático. A primeira coluna apresenta os critérios de análises, entendidos como tópicos centrais e relevantes para a investigação; a segunda coluna desdobra as observações, que propõem os aspectos encontrados nos trechos selecionados que serão discutidos à luz do referencial teórico; e a terceira coluna indica a localização de manifestações e evidências para possíveis respostas às questões formuladas. Ressalta-se que uma mesma questão pode encontrar respaldo em diferentes trechos do livro didático, podendo, nessa coluna, ser encontradas diversas páginas como referências.

Quadro 5 - Seleção de trechos do livro didático[14]

(continua)

Questões orientadoras	**Observações**	**Seleções no livro didático**
As figuras aparecem sempre na mesma posição? Qual a posição que geralmente aparecem?	As figuras 5 (exemplo abaixo) a 20 estão organizadas na posição vertical, com suas bases paralelas às bordas do livro didático. A figura 16 está com as bordas paralelas ao livro, mas rotacionada com o vértice do cone paralelo ao livro, diferente das imagens quando propõem a definição. **Figura 5 -** Definição de cilindros oblíquos e retos De acordo com a inclinação das geratrizes em relação aos planos das bases, os cilindros podem ser **oblíquos** ou **retos**.  Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 111).	Figura 5 (p.111) Figuras 6 e 7 (p. 112) Figura 8 (p. 113) Figuras 9 e 10 (p. 115) Figura 11 (p. 118) Figura 12 (p. 119) Figura 13 (p. 120) Figura 14 (p. 121) Figura 15 (p. 122) Figura 16 (p. 123) Figura 17 (p. 128) Figura 18 (p. 129) Figura 19 (p. 131) Figura 20 (p. 132)

[14] As figuras dentro do quadro 5 são repetidas na sequência das análises, e por isso sua numeração dentro do quadro não é sequencial.

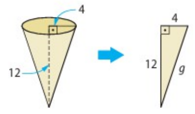
(continua)

<table>
<tr><th>Questões orientadoras</th><th>Observações</th><th>Seleções no livro didático</th></tr>
<tr><td>Aparecem relações entre bidimensionais e tridimensionais?</td><td>Nas figuras 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16 e 18 apresentadas, identificamos relações entre o bi e o tridimensional, utilizando conceitos bidimensionais para construir os objetos tridimensionais. Na Figura 16, por exemplo, é utilizada a rotação de um retângulo para construir um cone e utiliza do cálculo de uma figura plana para encontrar a geratriz do cone.

Figura 16 - Atividade resolvida

4. Um fabricante resolveu fazer a embalagem para um de seus produtos no formato de um cone reto, com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual será a quantidade mínima do material utilizado para cobrir toda a superfície dessa embalagem? Use $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{10} = 3{,}16$.

Resolução
Modelo de embalagem:

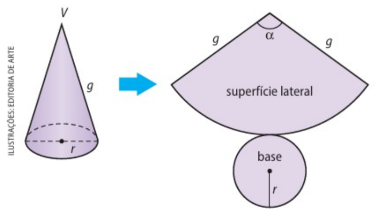


Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$g^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$
$g = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$
$g = 4\sqrt{10}$ cm
Vamos agora determinar a área da base (S_b):
$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \Rightarrow S_b = 16\pi$ cm²
Cálculo da área lateral (S_ℓ):
$S_\ell = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{10} = 16\pi\sqrt{10}$
$\Rightarrow S_\ell = 16\pi\sqrt{10}$ cm²
Cálculo da área total (S_t):
$S_t = S_b + S_\ell = 16\pi + 16\pi\sqrt{10} = 16\pi\left(1+\sqrt{10}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow S_t = 16\pi\left(1+\sqrt{10}\right)$ cm²
Como $\sqrt{10} = 3{,}16$, obtemos:
$S_t = 16 \cdot (3{,}14) \cdot (1 + 3{,}16) = 50{,}24 \cdot (4{,}16) \cong 209$
Portanto, a quantidade mínima será de 209 cm² de material.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 123).</td><td>Figuras 6 e 7 (p. 112)
Figura 8 (p. 113)
Figuras 9 e 10 (p. 115)
Figura 12 (p. 119)
Figura 13 (p. 120)
Figura 14 (p. 121)
Figura 15 (p. 122)
Figura 16 (p. 123)
Figura 18 (p. 129)</td></tr>
<tr><td>A figura geométrica espacial é apresentada com relação a duas dimensões? E com três?</td><td>Sim, nas figuras 8, 9, e 14 (exemplo abaixo) são apresentadas relações entre as duas dimensões e três dimensões, utilizando a planificação dos sólidos para denotar essa relação.

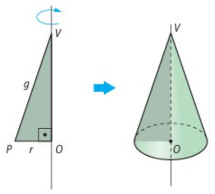
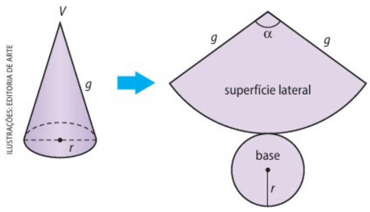
Figura 14 - Área da superfície de um cone

Área da superfície de um cone reto
Vamos planificar a superfície de um cone reto de raio da base *r* e geratriz *g* para determinar sua área.



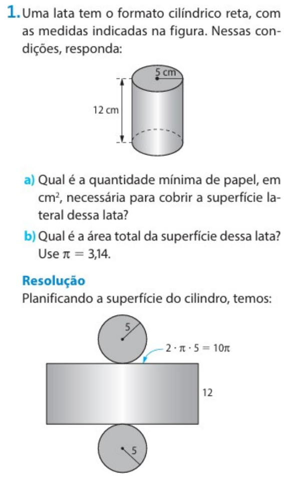
Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 121).</td><td>Figura 8 (p. 113)
Figura 9 (p. 115)
Figura 14 (p. 121)</td></tr>
</table>

(continua)

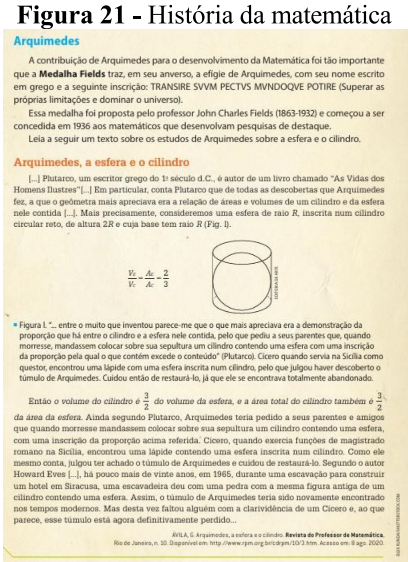
Questões orientadoras	Observações	Seleções no livro didático
A associação das figuras geométricas planas com as duas dimensões são elencadas?	Sim, em alguns trechos selecionados, como nas figuras 6, 7, 8, 10, 12, 13, 16 e 18, do livro, as duas dimensões são abordadas. As figuras 6 e 7 relacionam os cilindros de revolução a partir de um retângulo e um quadrado. Na figura 12 é apresentada um cone de revolução a partir de um triângulo retângulo. **Figura 12 -** Cone de revolução a partir de um triângulo retângulo Um cone circular reto também pode ser obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno do eixo de um dos catetos. Assim, o cone reto também é denominado **cone de revolução**.  Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 119).	Figuras 6 e 7 (p. 112) Figura 8 (p. 113) Figura 10 (p. 115) Figura 12 (p. 119) Figura 16 (p. 123) Figura 17 (p. 128) Figura 18 (p. 129)
A figura geométrica espacial é apresentada com relação a duas dimensões? E com três?	Sim, nas figuras 8, 9, e 14 (exemplo abaixo) são apresentadas relações entre as duas dimensões e três dimensões, utilizando a planificação dos sólidos para denotar essa relação. **Figura 14 -** Área da superfície de um cone **Área da superfície de um cone reto** Vamos planificar a superfície de um cone reto de raio da base *r* e geratriz *g* para determinar sua área.  Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 121).	Figura 8 (p. 113) Figura 9 (p. 115) Figura 14 (p. 121)

(continua)

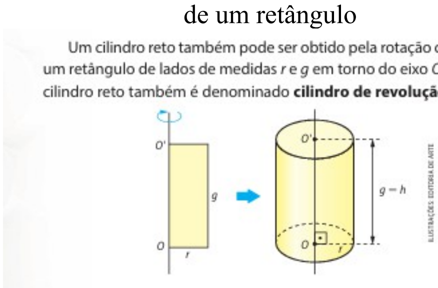
<table>
<tr><th>Questões orientadoras</th><th>Observações</th><th>Seleções no livro didático</th></tr>
<tr><td>As figuras espaciais são contextualizadas com representações de objetos reais?</td><td>Sim, nas figuras 9 (exemplo abaixo), 11, 15, 16, 17 e 20, são feitas contextualizações com objetos reais do mundo.

Figura 9 - Exercício resolvido

1. Uma lata tem o formato cilíndrico reta, com as medidas indicadas na figura. Nessas condições, responda:

a) Qual é a quantidade mínima de papel, em cm^2, necessária para cobrir a superfície lateral dessa lata?
b) Qual é a área total da superfície dessa lata? Use $\pi = 3{,}14$.
Resolução
Planificando a superfície do cilindro, temos:

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 115).</td><td>Figura 9 (p. 115)
Figura 11 (p. 118)
Figura 15 (p. 122)
Figura 16 (p. 123)
Figura 17 (p. 128)
Figura 20 (p. 132)</td></tr>
<tr><td>A história da geometria é citada, como? Aparece relacionada a outros contextos?</td><td>Somente na figura 21 a história da matemática é mencionada no livro didático, em uma seção, que aborda um fato sobre a vida de Arquimedes.
Figura 21 - História da matemática

Arquimedes
A contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento da Matemática foi tão importante que a **Medalha Fields** traz, em seu anverso, a efígie de Arquimedes, com seu nome escrito em grego e a seguinte inscrição: TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRE (Superar as próprias limitações e dominar o universo).
Essa medalha foi proposta pelo professor John Charles Fields (1863-1932) e começou a ser concedida em 1936 aos matemáticos que desenvolvam pesquisas de destaque.
Leia a seguir um texto sobre os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro.
Arquimedes, a esfera e o cilindro
[...] Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres"[...] Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida [...]. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio *R*, inscrita num cilindro circular reto, de altura 2*R* e cuja base tem raio *R* (Fig. I).
$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$
Figura I. "... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.
Então *o volume do cilindro é* $\frac{3}{2}$ *do volume da esfera, e a área total do cilindro também é* $\frac{3}{2}$ *da área da esfera*. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves [...], há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido...
ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 10. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm. Acesso em: 8 ago. 2020.
Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 132).</td><td>Figura 21 (p. 137)</td></tr>
<tr><td>Está relacionada às questões práticas da época, do local e da região?</td><td>Sim, a figura 21 está relacionada a questões da época da Grécia Antiga, sobre um pedido de Arquimedes, como é apresentado na Figura 21, acima.</td><td>Figura 21 (p. 137)</td></tr>
</table>

(conclusão)

Questões orientadoras	Observações	Seleções no livro didático
São feitas ligações entre conceitos?	Sim, nas figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 21 são realizadas relações entre conceitos, manifestando buscar conexões entre outros conceitos, como por exemplo na Figura 6, utiliza da rotação de um retângulo para construir um cilindro. **Figura 6 -** Definição de um cilindro de revolução a partir de um retângulo  Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 112).	Figura 5 (p.111) Figuras 6 e 7 (p. 112) Figura 8 (p. 113) Figuras 9 e 10 (p. 115) Figura 12 (p. 119) Figura 13 (p. 120) Figura 14 (p. 121) Figura 15 (p. 122) Figura 16 (p. 123) Figura 17 (p. 128) Figura 18 (p. 129) Figura 19 (p. 131) Figura 20 (p. 132) Figura 21 (p. 137)

Fonte: elaboração própria.

O Quadro 5 apresenta os trechos selecionados do livro didático, selecionando excertos do livro que responderam às questões. Na seção 4.1, realizamos o processo de análises a partir dos trechos selecionados do livro didático, quando é retornado ao referencial teórico para realizar o movimento de análises.

4.1 Análise dos dados selecionados do livro didático a partir do Quadro 5

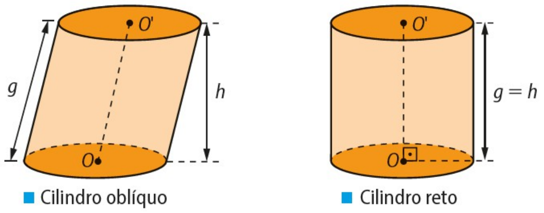
Nesta seção são apresentadas as análises realizadas a partir dos trechos selecionados do livro didático, conforme o Quadro 5. Nesta seção 4.1 não é mencionado as relações com os possíveis nexos conceituais, somente na seção 4.2 na síntese das análises.

A primeira imagem selecionada apresenta a definição de cilindros oblíquos e retos. Neste trecho o autor propõe a definição de cilindros oblíquos e retos, apresentada por meio de duas representações distintas, utilizando a geratriz[15]. Quando a geratriz é oblíqua, o cilindro também é, e quando a geratriz é perpendicular à base, o cilindro é reto.

[15] O que é geratriz? São os segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases, cuja medida é indicada por g (Bonjorno, *et al.* 2020).

Figura 5 - Definição de cilindros oblíquos e retos

De acordo com a inclinação das geratrizes em relação aos planos das bases, os cilindros podem ser **oblíquos** ou **retos**.



Um cilindro é oblíquo quando as geratrizes são oblíquas aos planos das bases e é reto quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 111).

Nesse recorte, observamos que as figuras estão organizadas na posição vertical, com as bases do cilindro paralelas às bordas do livro didático. Não aparece qualquer observação sobre a possibilidade de as imagens serem rotacionadas, corroborando com Machado *et al.* (2018, p. 2), que aponta que “figuras são desenhadas quase sempre com os lados paralelos às bordas da folha”. Logo, podem-se criar lacunas ou dificuldades para os estudantes quando visualizarem essas mesmas figuras em outras posições.

A partir da figura 5, conseguimos criar relações entre o bi e tridimensionais, relacionando as bases do cilindro, tanto do oblíquo quanto o reto com o círculo, também podemos relacionar com o raio e a geratriz.

A relação entre a figura geométrica espacial e as duas dimensões não é feita explicitamente, mas pode ser associada a bases do cilindro com os círculos. Já com as três dimensões é possível relacionar, pois apresenta a geratriz e a altura do cilindro.

Considerando a posição da figura, supomos que o estudante pode ter desafios em reconhecer e imaginar uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional, porque exige uma elaboração que impossibilita alguns estudantes de estabelecer conexões, podendo criar barreiras na sua aprendizagem (Machado *et al*., 2018).

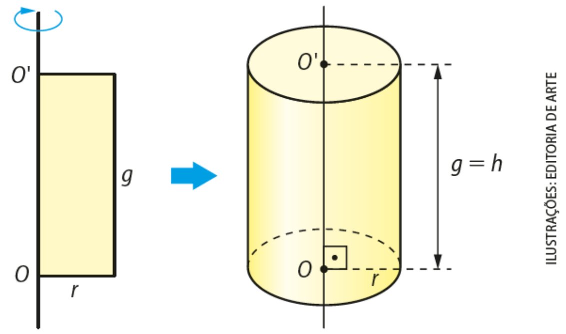
Na figura 5, não há relação com objetos do mundo, mas é possível relacionar “objetos físicos e geométricos, como comparar uma lata de refrigerante a um cilindro” (Koftun 2023, p.39). Também podemos relacionar com o cilindro oblíquo, que pode estar presente em construções. Relacionadas com objetos do mundo, essas representações desses corpos geométricos, a partir de objetos físicos que atendem as características dos elementos geométricos espaciais, são somente representações dos objetos geométricos (Costa, 2020).

Por meio do excerto, não são encontradas explicitamente ligações entre os conceitos, mas podemos realizar essas ligações entre eles por meio das bases do cilindro, relacionando com a geometria plana. Também possibilita relacionar com duas representações de cilindro à geratriz. Quando a geratriz é oblíqua, o cilindro também é, e quando a geratriz é perpendicular à base, o cilindro é reto. O trecho cita sobre as geratrizes serem perpendiculares, e com isso, é possível relacionar e compreender a perpendicularidade e não perpendicularidade do sólido geométrico, a angulação formada a partir do cilindro oblíquo.

A figura 6 apresenta a definição de um cilindro de revolução a partir de um retângulo, em que é construída uma relação entre figuras planas e espaciais, utilizada para explicar o cilindro de revolução. A rotação de um retângulo tem a posição das bases das figuras apresentadas no livro, que também aparecem de maneira paralela às bordas do livro, na posição vertical.

Figura 6 - Definição de um cilindro de revolução a partir de um retângulo

Um cilindro reto também pode ser obtido pela rotação completa de um retângulo de lados de medidas *r* e *g* em torno do eixo *OO'*. Assim, o cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**.

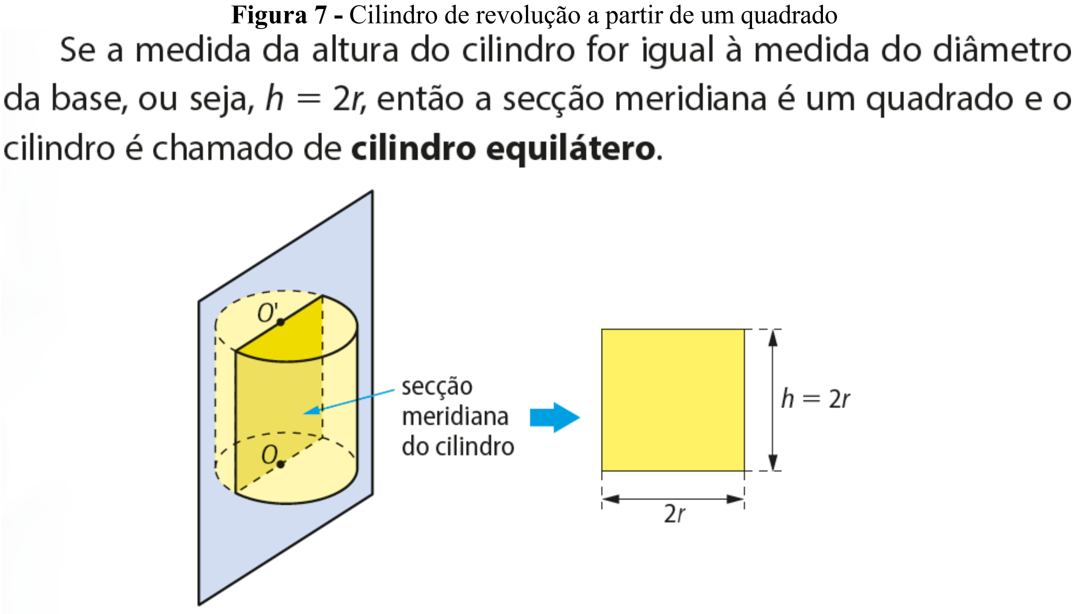


Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 112).

A partir da imagem ilustrada no livro, o estudante necessita reconstruir mentalmente que, por meio de uma rotação de um retângulo, tem-se um cilindro. Essa tarefa pode exigir um esforço mental dos estudantes e alguns não conseguirem entender (Machado *et al.,* 2018). Paralelo a isso, podemos elencar que utilizar ferramentas auxiliares para representar essa revolução do cilindro pode ser uma alternativa para reconstruir uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional. Isso permite a associação entre as dimensões, relacionando os lados do retângulo, largura e comprimento, com as medidas do cilindro para construir uma superfície curva, que é a lateral desse objeto (Koftun, 2023). Nesse trecho selecionado, notamos a presença de ligações entre conceitos tanto bidimensionais quanto tridimensionais, utilizando elementos que compõem o plano para construir um objeto do espaço, como largura, associada com o raio do cilindro e o comprimento com o comprimento do cilindro, e como isso determina o seu tamanho.

Na figura 7 é apresentado o cilindro de revolução a partir de um quadrado. Nessa imagem, é feita uma relação com o quadrado, que com isso recebe o nome de cilindro equilátero. As bases dessa figura também são paralelas às bordas do livro didático, sendo apresentada sempre na mesma posição, verticalmente às bordas do livro.

Figura 7 - Cilindro de revolução a partir de um quadrado

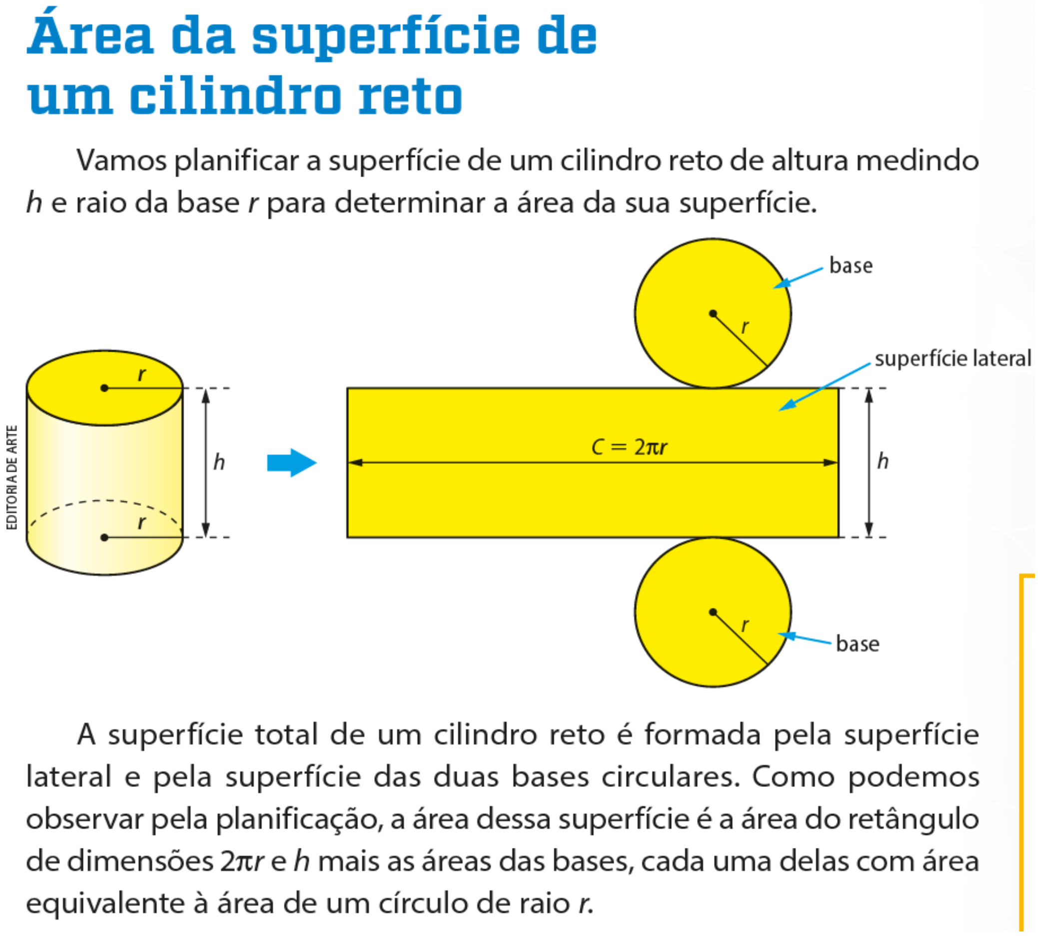

Se a medida da altura do cilindro for igual à medida do diâmetro da base, ou seja, $h = 2r$, então a secção meridiana é um quadrado e o cilindro é chamado de **cilindro equilátero**.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 112).

Nesse excerto, o autor busca realizar uma conexão entre os conceitos utilizando o diâmetro para denotar o lado do quadrado, criando uma relação entre as figuras bidimensionais e tridimensionais. Por meio da secção meridiana do cilindro, é construído um quadrado, e a altura do cilindro e o diâmetro tem a mesma medida.

Na figura 8 é apresentada a área de um cilindro reto, por meio de "duas bases planas na forma de um círculo e uma superfície lateral visualmente arredondada" Koftun (2023, p. 146), fazendo relação entre conceitos de raio, base e altura. Assim, cria-se uma conexão com as figuras bidimensionais e tridimensionais.

Figura 8 - Área da superfície de um cilindro reto



Área da superfície de um cilindro reto

Vamos planificar a superfície de um cilindro reto de altura medindo *h* e raio da base *r* para determinar a área da sua superfície.

A superfície total de um cilindro reto é formada pela superfície lateral e pela superfície das duas bases circulares. Como podemos observar pela planificação, a área dessa superfície é a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e *h* mais as áreas das bases, cada uma delas com área equivalente à área de um círculo de raio *r*.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 113).

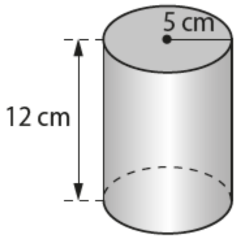
O excerto acima apresenta a ideia da área de um cilindro planificado em três partes, duas bases circulares, que são as áreas do círculo; e uma área retangular, que é a área do retângulo. O retângulo que é apresentado na planificação tem como medida o comprimento da circunferência, relacionando, então, com as noções de bi e tridimensionalidade.

Notamos que a posição dessa figura é vertical, paralela à borda do livro. A construção dessa figura pode exigir do estudante reconstruir ou construir uma imagem tridimensional a partir de uma imagem bidimensional.

A figura 9, na página seguinte, apresenta um exercício resolvido de um objeto no formato cilíndrico. O livro propõe um exercício com sua representação verticalmente paralela às bordas do livro, mantendo as posições apresentadas nas definições. Esse exercício apresenta relação com objetos do mundo, ou seja, uma lata, que podemos encontrar em nosso cotidiano. Assim, é possível comparar objetos físicos com objetos geométricos (Koftun, 2023). Esses objetos do mundo são representações dos objetos geométricos que atendem características dos objetos geométricos espaciais (Costa, 2020).

Figura 9 - Exercício resolvido

1. Uma lata tem o formato cilíndrico reta, com as medidas indicadas na figura. Nessas condições, responda:

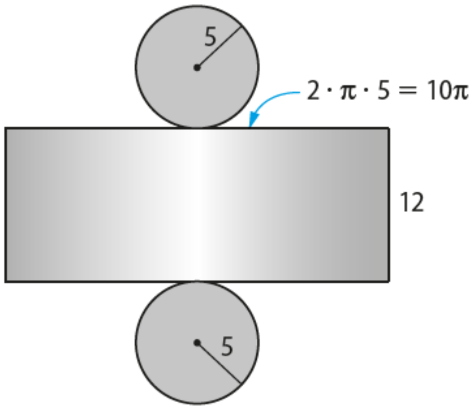


a) Qual é a quantidade mínima de papel, em cm^2, necessária para cobrir a superfície lateral dessa lata?

b) Qual é a área total da superfície dessa lata? Use $\pi = 3{,}14$.

Resolução

Planificando a superfície do cilindro, temos:



Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 115).

A resolução também apresenta a planificação, utilizando conceitos bidimensionais para resolver o exercício. Assim, são apresentados dois círculos, que correspondem às bases do cilindro, enquanto a parte retangular representa a altura e comprimento da parte curva do cilindro. Logo, para calcular a área total do cilindro, é utilizado o cálculo da área do círculo, também do retângulo. Dessa forma, é possível criar uma relação entre o bi e tridimensional, pois a partir da planificação em duas dimensões forma-se o objeto espacial em três dimensões. Nesse trecho, utiliza-se uma conexão entre conceitos, como a altura do cilindro sendo representada pela largura do retângulo e a parte curva do cilindro, sendo o comprimento do retângulo, e as bases do cilindro, formado por círculos.

Na figura 10 é apresentado um exercício resolvido, como um calcule, utilizando um sólido menor e outro maior, por meio da rotação de um retângulo. A figura plana e o sólido geométrico aparecem com a mesma posição habitual das definições. Embora o exercício apresente duas formas de relacionar o retângulo, um sendo menor e outro maior, não são exploradas variações ou rotações. Também, o exercício pede uma interpretação de que o cilindro de revolução que tem maior área é aquele que possui maior base do retângulo, pois está relacionado à medida do raio da circunferência, e o que tem raio menor tem a área menor.

Nesse contexto, os mesmos objetos em posições diferentes podem levar os estudantes a não reconhecê-los (Machado *et al.*, 2018).

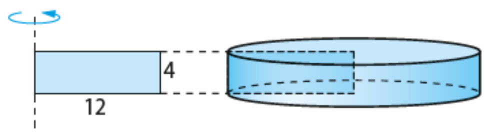
Figura 10 - Exercício resolvido

2. Calcule a área total do sólido obtido pela rotação completa de um retângulo de dimensões 4 cm e 12 cm em torno do lado:

a) menor; **b)** maior.

Resolução

a) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 12 cm e altura 4 cm.

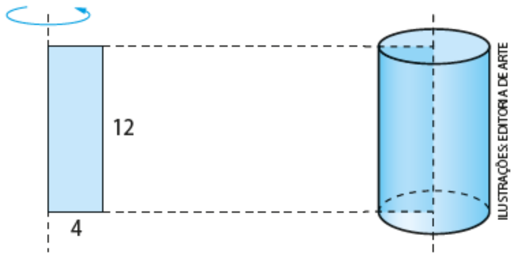


$S_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 2\pi \cdot 12\ (4 + 12) \Rightarrow S_t = 384\pi$

Portanto, $S_t = 384\pi$ cm².

b) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 4 cm e altura 12 cm. Assim:



$S_t = 2\pi \cdot 4(12 + 4) \Rightarrow S_t = 128\pi$

Portanto, $S_t = 128\pi$ cm².

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 115).

Em outro exercício sobre cilindros (Figura 10), é estabelecida uma relação entre as figuras planas com o retângulo e os sólidos geométricos com o cilindro, tentando associar o comprimento e a largura do retângulo com o raio e a altura do cilindro. Nesse excerto, o estudante necessita um esforço mental na tarefa de reconstruir essa rotação, podendo gerar dificuldade para alguns (Machado *et al.,* 2018). No trecho selecionado, é possível notar que é utilizada a relação entre conceitos, com o uso de elementos do plano, como raio e comprimento, relacionando com a altura e a parte curva do cilindro da geometria espacial.

Na figura 11 é apresentada a definição e contextualização do cone.

Figura 11 - Definição e contextualização do cone

Cone

Além do cilindro, há outro grupo de corpos redondos, cuja forma pode ser associada a objetos do cotidiano, como funis, casquinha de sorvete e cones de trânsito. Esse tipo de corpo redondo, que é denominado **cone**, estudaremos a seguir.

Dado um plano α, um círculo C contido em α e um ponto V que não pertence a α, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do círculo C é denominada **cone circular** ou, simplesmente, **cone**.

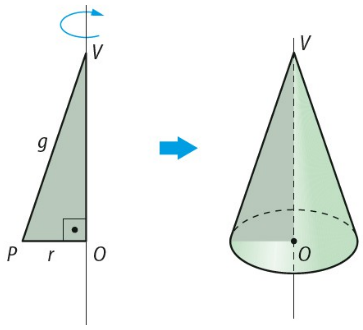
Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 118).

Nesse excerto, o autor apresenta relações com o cotidiano, relacionando o cone com o tronco de cone de trânsito, funis e casquinhas de sorvete. Concomitante a isso, notamos que a imagem busca representar um cone oblíquo, e na sequência do livro, o autor apresenta os elementos do cone. Também, na imagem apresentada dos troncos de cones de trânsito, aparecem um paralelo às bordas do livro e o outro inclinado, podendo essas posições serem exploradas e discutidas em sala. Essa imagem relacionada com o tronco do cone é uma representação de objetos geométricos que atendem características dos objetos geométricos espaciais (Costa, 2020).

Na figura 12, o cone de revolução é apresentado a partir de um triângulo retângulo, sendo mais uma vez recorrente a posição das figuras paralelas às bordas do livro.

Figura 12 - Cone de revolução a partir de um triângulo retângulo

Um cone circular reto também pode ser obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno do eixo de um dos catetos. Assim, o cone reto também é denominado **cone de revolução**.



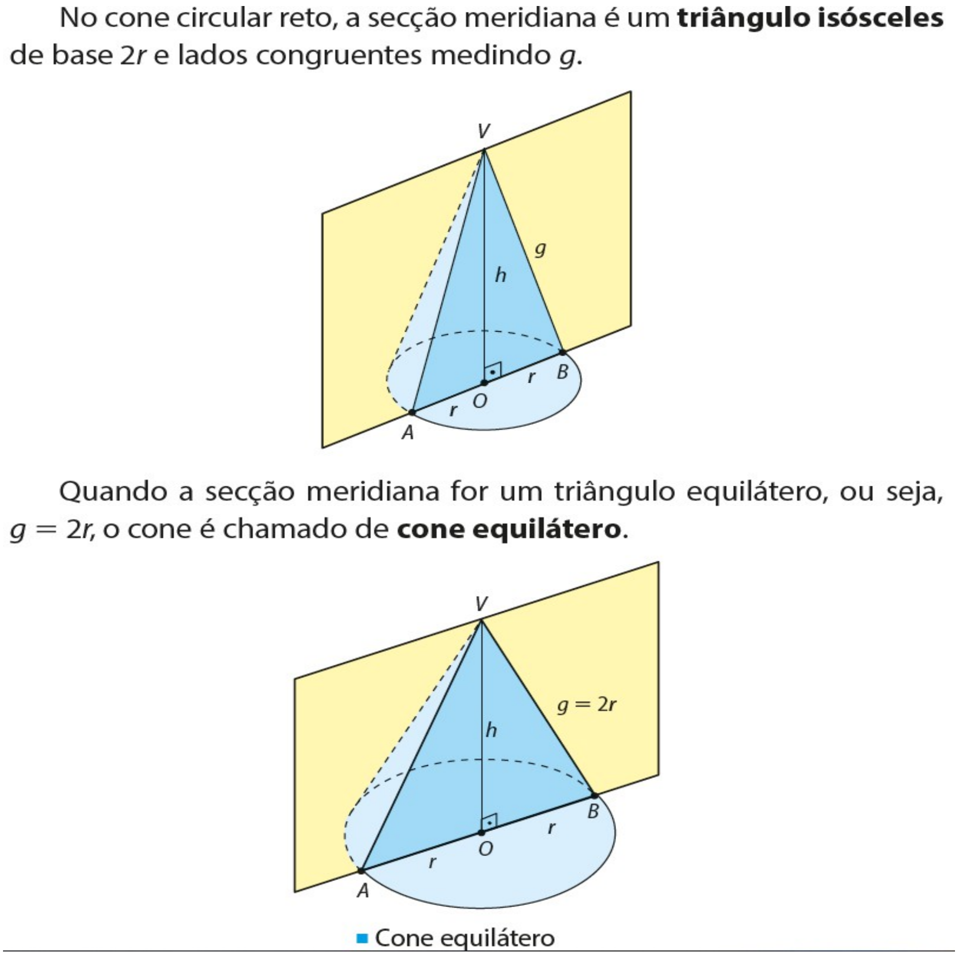
Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 119).

Nesse excerto, é apresentado o cone de revolução a partir da rotação de um triângulo retângulo, criando uma conexão entre as figuras bi e tridimensionais, além das relações com raio, vértice e geratriz. Paralelo a isso e observando o triângulo retângulo, é possível associar os catetos do triângulo: cateto adjacente com a altura, cateto oposto com o raio e a hipotenusa com a geratriz, realizando ligação entre conceitos.

No entanto, o estudante necessita reconstruir, a partir da revolução do triângulo retângulo, um sólido geométrico, o que não se configura em uma tarefa simples, pois necessita imaginar um giro de uma figura plana que não tem espessura, e construir um cilindro. Para ajudar na compreensão, podem ser utilizadas ferramentas auxiliares, como softwares que possibilitam visualizar essa revolução. Para calcular a geratriz do cone é utilizado o Teorema de Pitágoras.

Na figura 13 são apresentadas as secções de um cone a partir de um triângulo isósceles e um equilátero. Com isso, as relações entre as figuras bi e tridimensionais, a partir do que é pontuado no livro, que as secções meridianas de um cone podem criar dois tipos de triângulo: o triângulo isósceles e o equilátero. Quando a base, ou seja, o diâmetro, mede 2r e seus lados são congruentes, medindo g, é criado um cone isósceles, pois tem a base diferente do seu lado g; e quando a base mede 2r e g medem 2r, é construído um cone equilátero, tendo a base e seu lado g iguais.

Figura 13 - Secção de um cone a partir de um triângulo isósceles e equilátero



Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 120).

Notamos que as representações das figuras paralelas às bordas do livro são sempre recorrentes à definição do cone. Nesse trecho, utilizam-se duas e três dimensões, a partir de uma secção meridiana (duas dimensões) e o cone (três dimensões). Na mesma figura apresentada, notamos a ligação entre conceitos, raio, diâmetro, altura, círculo, triângulo, geratriz, todos eles relacionados à construção do cone.

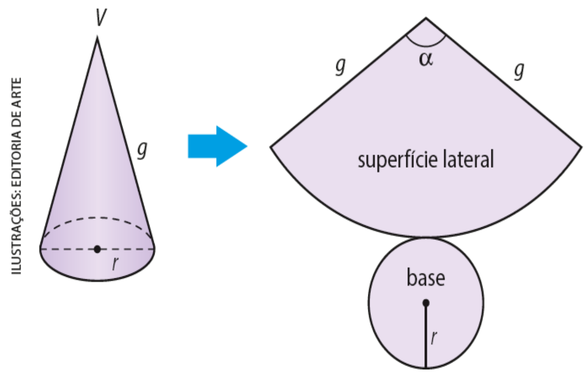
Na figura 14, na página seguinte, é apresentada a área da superfície do cone reto, por meio de sua planificação.

No excerto apresentado, há relação entre bidimensional e tridimensional, fazendo conexão com a base do cone pelo círculo, pois faz menção ao raio, ao diâmetro do círculo, e a superfície lateral do cone por um setor circular.

Figura 14 - Área da superfície de um cone

Área da superfície de um cone reto

Vamos planificar a superfície de um cone reto de raio da base *r* e geratriz *g* para determinar sua área.



Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 121).

Para realizar o cálculo da área, são utilizados conceitos e elementos do círculo para calcular a área da base, e para calcular a área da superfície lateral, é utilizada a área correspondente ao setor circular, fazendo ligação entre os conceitos de áreas das figuras planas para resolver a área dos sólidos geométricos.

Pode ser explorado, a partir das planificações, que as figuras planas compõem os lados, bases ou superfícies laterais dos sólidos geométricos e que, portanto, os conceitos não são compreendidos de forma separada ou linearmente.

Diante disso, o estudante tem a tarefa de reconstruir o cone a partir da sua planificação, que é um setor circular e um círculo. Com isso, utiliza as relações entre as figuras planas e espaciais. Paralelo a isso, poderiam ser propostas, no livro, planificações por meio de ferramentas auxiliares, como o uso de software.

Na figura 15, na página seguinte, é apresentado o volume do cone, cuja imagem traz a contextualização de um cone como um doce brasileiro (canudinho de doce de leite), fazendo relação direta com o cotidiano dos estudantes. Nesse exemplo, o autor busca relacionar o volume com a quantidade necessária para preencher cada canudo.

Figura 15 - Volume do cone

Volume de um cone

▪ Cones de sorvete.

Considere a situação a seguir.

Um doce muito famoso e tradicional no Brasil é o canudinho de doce de leite. Ele consiste em uma massa fina frita em formato que lembra um cone que é recheado com doce de leite cremoso. Exatamente por ser muito famoso, o dono de uma confeitaria decidiu produzir e vender esse doce.

Para determinar quanto de doce de leite seria necessário fazer, é preciso responder duas perguntas: quantas unidades de canudinhos ele pretende produzir por dia e qual a quantidade de doce de leite necessária para preencher cada canudo.

Mas como calcular essa quantidade?

Assim como fizemos para determinar o volume de uma pirâmide, no Capítulo anterior, aplicando o princípio de Cavalieri, podemos utilizar o mesmo raciocínio para determinar o volume de um cone.

Considere um cone *C* e uma pirâmide *P* de mesma altura de medidas *h* e bases de mesma área S_b, contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo ao plano α, distante *h'* do vértice e secante aos sólidos *C* e *P* determina duas secções transversais de áreas S_1 e S_2, respectivamente.

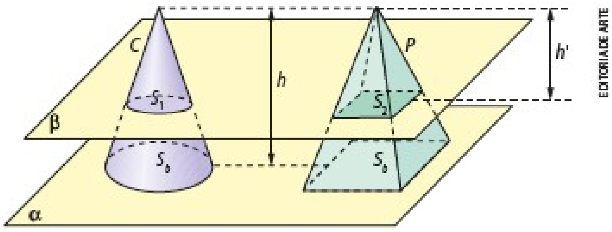
PENSE E RESPONDA

Voltando ao problema do recheio de doce de leite, se o dono da doceria fez 800 mL de doce de leite, aproximadamente quantos canudos com 3 cm de diâmetro por 8 cm de altura ele poderá preencher? Saiba que $1\ cm^3 = 1$ mL.

42 canudos

Sabemos que para pirâmides vale a igualdade $\frac{S_2}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. Prova-se que a relação análoga vale também para cones, ou seja, $\frac{S_1}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Logo, $\frac{S_1}{S_b} = \frac{S_2}{S_b}$ e, portanto, $S_1 = S_2$.



Assim, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que o volume da pirâmide *P* é igual ao volume do cone *C* e podemos escrever:

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 122).

A partir do excerto apresentado, observa-se que relaciona a explicação da pirâmide com princípio de Cavalieri, não se limitando somente à fórmula, mas construindo-a a partir de outras relações.

No trecho, quando apresentada a ilustração do princípio de Cavalieri, notamos que são demonstrados dois planos, e a partir desses cortes dos planos, verifica-se, no cone, um formato circular, e na pirâmide, o formato de um quadrado. Paralelo a isso, a partir do princípio de Cavalieri, foi possível construir o volume da pirâmide e do cone, possibilitando estabelecer conexão entre os conceitos.

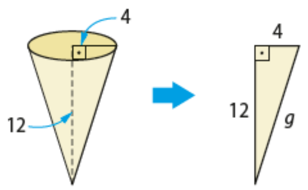
Na figura 16 é apresentada uma atividade resolvida, na qual notamos que o cone aparece rotacionado, diferentemente das imagens que demonstraram as definições. No trecho a relação é feita entre o cone e triângulo retângulo, utilizando geratriz para a hipotenusa, cateto adjacente para altura e cateto oposto para o raio da base, e com isso podemos reproduzir o teorema de Pitágoras.

Figura 16 - Atividade resolvida

4. Um fabricante resolveu fazer a embalagem para um de seus produtos no formato de um cone reto, com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual será a quantidade mínima do material utilizado para cobrir toda a superfície dessa embalagem? Use $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{10} = 3{,}16$.

Resolução

Modelo de embalagem:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$g^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$

$g = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$g = 4\sqrt{10}$ cm

Vamos agora determinar a área da base (S_b):

$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \Rightarrow S_b = 16\pi$ cm²

Cálculo da área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{10} = 16\pi\sqrt{10}$

$\Rightarrow S_\ell = 16\pi\sqrt{10}$ cm²

Cálculo da área total (S_t):

$S_t = S_b + S_\ell = 16\pi + 16\pi\sqrt{10} = 16\pi\left(1+\sqrt{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 16\pi\left(1+\sqrt{10}\right)$ cm²

Como $\sqrt{10} = 3{,}16$, obtemos:

$S_t = 16 \cdot (3{,}14) \cdot (1 + 3{,}16) = 50{,}24 \cdot (4{,}16) \cong 209$

Portanto, a quantidade mínima será de 209 cm² de material.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 123).

O autor utiliza a reprodução de fórmulas e de conceitos do mundo para relacioná-los com o cone. Esse exercício também possibilita que o estudante pense em tipos de produtos que podem ser embalados com esse formato.

Na figura 17 é apresentada a contextualização da esfera, relacionando com objetos que lembram o formato de uma esfera, e estão presentes no cotidiano, como o planeta Terra, com um formato geoide, bola, coberturas de igreja e bolinhas de gude.

Figura 17 - Contextualização de esfera

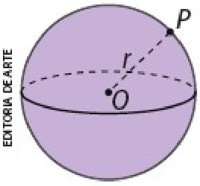
Esfera

SAIBA QUE...

O planeta Terra tem, por definição, a forma de um geoide, que tem a superfície irregular.

Muitos objetos e construções que vemos em nosso cotidiano possuem formatos que lembram esferas ou partes de uma esfera. Apesar de não constituírem rigorosamente esferas, possuem um formato muito próximo ao delas e, por isso, para alguns cálculos, pode-se tratar esses objetos como esferas e é isso, inclusive, que faremos aqui.

Uma bola de futebol é um exemplo de um objeto com formato muito próximo ao de uma esfera, mas que não constitui rigorosamente uma esfera. A própria Terra, como sabemos, é muito parecida com uma esfera quando observada à distância, mas por vários motivos, como o fato de ser achatada nos polos, não possui o formato de uma esfera.



Vamos considerar um ponto *O* e um número real *r* positivo como indicado na figura.

O conjunto de todos os pontos *P* do espaço, cuja distância ao ponto *O* é igual a *r*, é denominado **superfície esférica** de centro *O* e raio *r*.

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se **esfera**. Dessa maneira, a esfera de centro *O* e raio *r* é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto *O* é menor ou igual a *r*.

De modo bastante simples, podemos dizer que a superfície esférica é a "casca", enquanto a esfera é a reunião da "casca" com o "miolo".

As denominações **centro** e **raio** são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou à esfera por ela limitada.

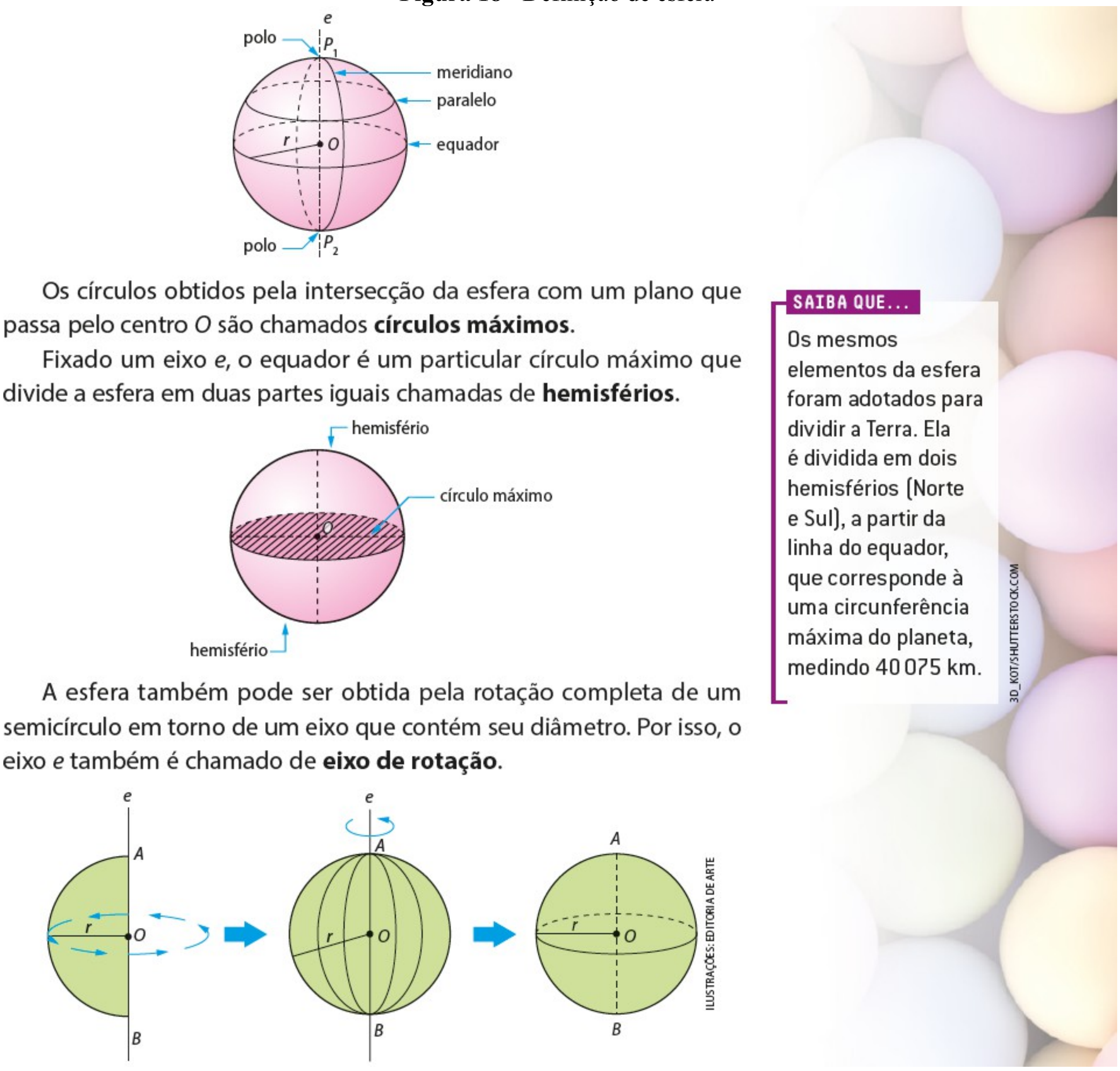
Domo da Rocha, parte do Santuário Nobre, ou Monte do Templo (nome dado por muçulmanos e judeus, respectivamente), onde também está localizada a Mesquita de Al Aqsa, em Jerusalém. Fotografia de 2020.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 128).

Esse excerto mostra a relação dos elementos raio e centro, que estão relacionados à geometria Plana e aos sólidos geométricos, em especial à esfera. O formato da figura apresentada está na posição vertical, paralela às bordas do livro, como as demais.

Na figura 18 é apresentada a definição da esfera, mostrando seus elementos e fazendo relações com os mesmos elementos que foram utilizadas para dividir o Planeta Terra, que é dividido em dois hemisférios (Norte e Sul), a partir da linha do equador.

Figura 18 - Definição de esfera



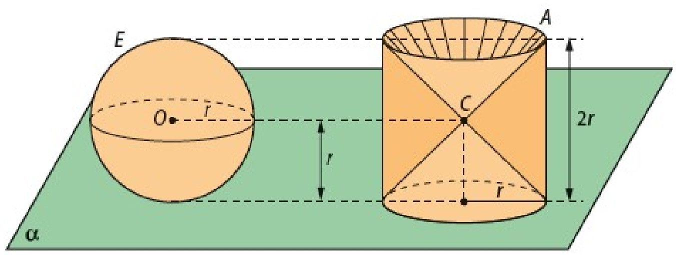
Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 129).

Nesse excerto, há relação dos elementos da esfera, os polos, os meridianos, as linhas e os hemisférios, que são elementos presentes, mas que não conseguimos ver, não têm espessura (Fonseca *et al.*, 2011). Esses elementos são algo sem dimensão, que não podemos tocar, que não existem na realidade, e só é possível concebê-los por meio de abstração. O exercício também apresenta relações entre o bidimensional, utilizando o raio, diâmetro e semicírculo, e a partir da rotação completa de um semicírculo é possível construir uma esfera, relacionando com o tridimensional. Mediante a isso, o estudante necessita realizar a tarefa de reconstruir mentalmente um sólido geométrico a partir da rotação de uma figura plana, o que pode exigir um esforço por parte dos estudantes, o que não garante que todos consigam realizar.

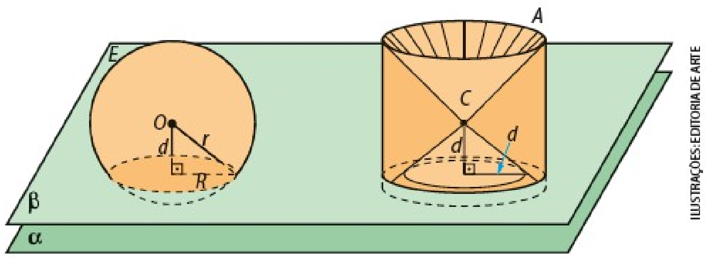
Na figura 19 é apresentado o volume da esfera. A definição apresentada relaciona com o bidimensional, por meio do raio e do círculo, também utiliza o triângulo retângulo.

Figura 19 - Volume da esfera

Agora, vamos considerar uma esfera *E* de raio *r* e o sólido *A*, apoiados em um mesmo plano α, conforme mostra a figura a seguir.



Considere também um plano β paralelo a α que secciona a esfera *E* e o sólido *A* a uma distância *d* do centro da esfera *O*, como mostra a figura a seguir.



O plano β determina um círculo na esfera *E*, cujo raio indicaremos por *R*. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = R^2 + d^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - d^2$$

Assim, a área S_1 do círculo é dada por:

$$S_1 = \pi R^2 = \pi(r^2 - d^2) \quad \text{I}$$

A secção determinada pelo plano β no sólido *A* é uma coroa circular de raios *r* e *d* e sua área S_2 é dada por:

$$S_2 = \pi(r^2 - d^2) \quad \text{II}$$

Assim, comparando I e II, verificamos que a área da secção plana da esfera *E* (círculo) é igual à área da secção plana do sólido *A* (coroa circular).

Pelo princípio de Cavalieri, a esfera *E* tem o mesmo volume que o sólido *A* e, portanto, o volume *V* da esfera é dado por: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 131).

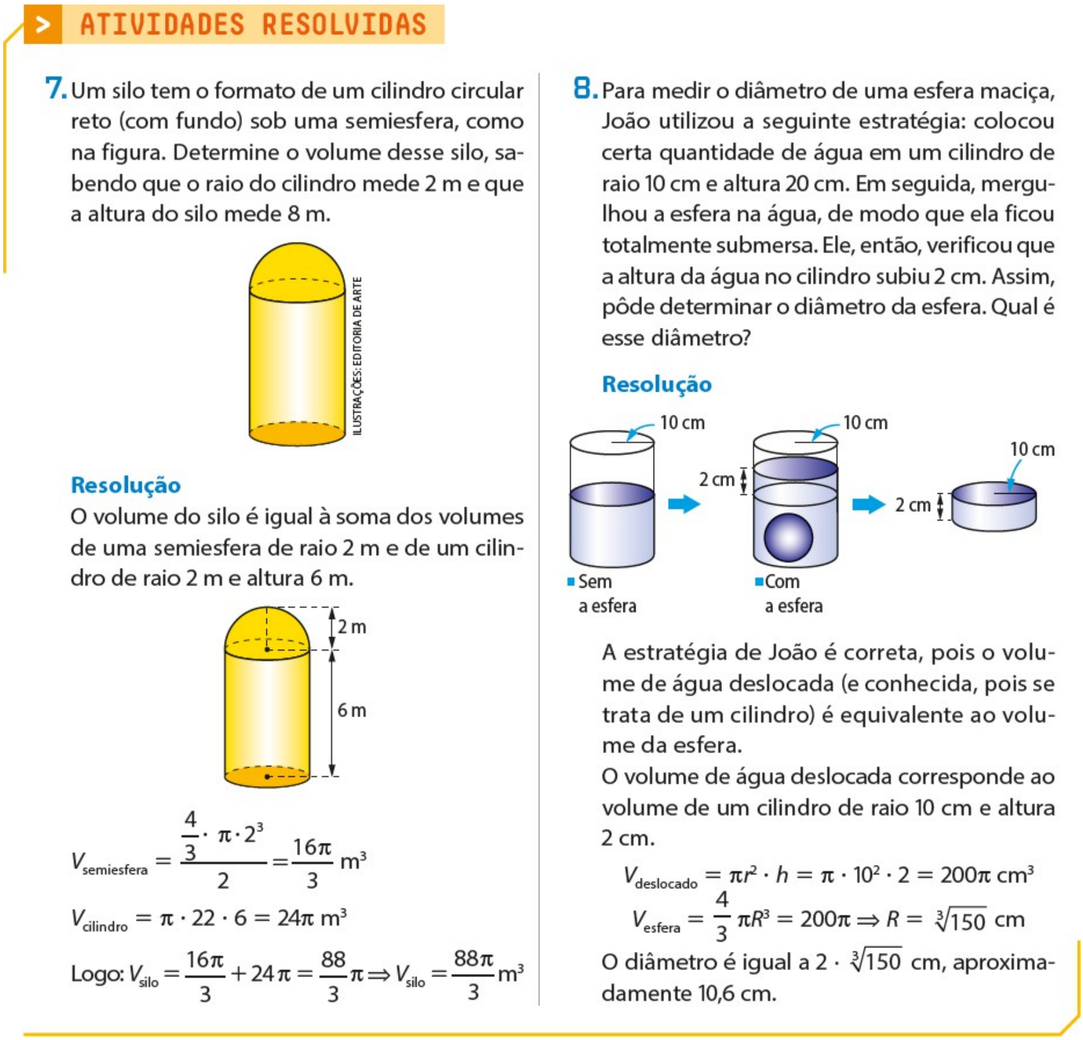
Nesse excerto, a definição descrita do volume da esfera não se limita apenas à fórmula, trazendo com ela uma demonstração por meio de dois planos, relacionado com o princípio de

Cavalieri e o Teorema de Pitágoras, para então construir o cálculo do volume. Nesse trecho, o autor utiliza dois planos paralelos, uma esfera e um sólido (dois cones inscritos a um cilindro). Um desses planos secciona a esfera, e com isso, a área da secção plana da esfera é um círculo; e do sólido, é uma coroa circular. Essas duas secções utilizam o Teorema de Pitágoras e do Princípio de Cavalieri para construir o volume da esfera.

As posições que são apresentados nesses dois planos estão no formato vertical e paralelo às bordas do livro didático.

Na figura 20, são apresentados dois exercícios da esfera, os quais estão relacionados ao cotidiano, mencionando a aplicabilidade de conceitos matemáticos ao dia a dia, também utilizam cálculos de fórmulas.

Figura 20 - Exercício resolvido da esfera



ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Um silo tem o formato de um cilindro circular reto (com fundo) sob uma semiesfera, como na figura. Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

O volume do silo é igual à soma dos volumes de uma semiesfera de raio 2 m e de um cilindro de raio 2 m e altura 6 m.

2 m

6 m

$$V_{semiesfera} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3}{2} = \frac{16\pi}{3}\ m^3$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot 22 \cdot 6 = 24\pi\ m^3$$

$$\text{Logo: } V_{silo} = \frac{16\pi}{3} + 24\pi = \frac{88}{3}\pi \Rightarrow V_{silo} = \frac{88\pi}{3}\ m^3$$

8. Para medir o diâmetro de uma esfera maciça, João utilizou a seguinte estratégia: colocou certa quantidade de água em um cilindro de raio 10 cm e altura 20 cm. Em seguida, mergulhou a esfera na água, de modo que ela ficou totalmente submersa. Ele, então, verificou que a altura da água no cilindro subiu 2 cm. Assim, pôde determinar o diâmetro da esfera. Qual é esse diâmetro?

Resolução

A estratégia de João é correta, pois o volume de água deslocada (e conhecida, pois se trata de um cilindro) é equivalente ao volume da esfera.

O volume de água deslocada corresponde ao volume de um cilindro de raio 10 cm e altura 2 cm.

$$V_{deslocado} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 200\pi\ cm^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 200\pi \Rightarrow R = \sqrt[3]{150}\ cm$$

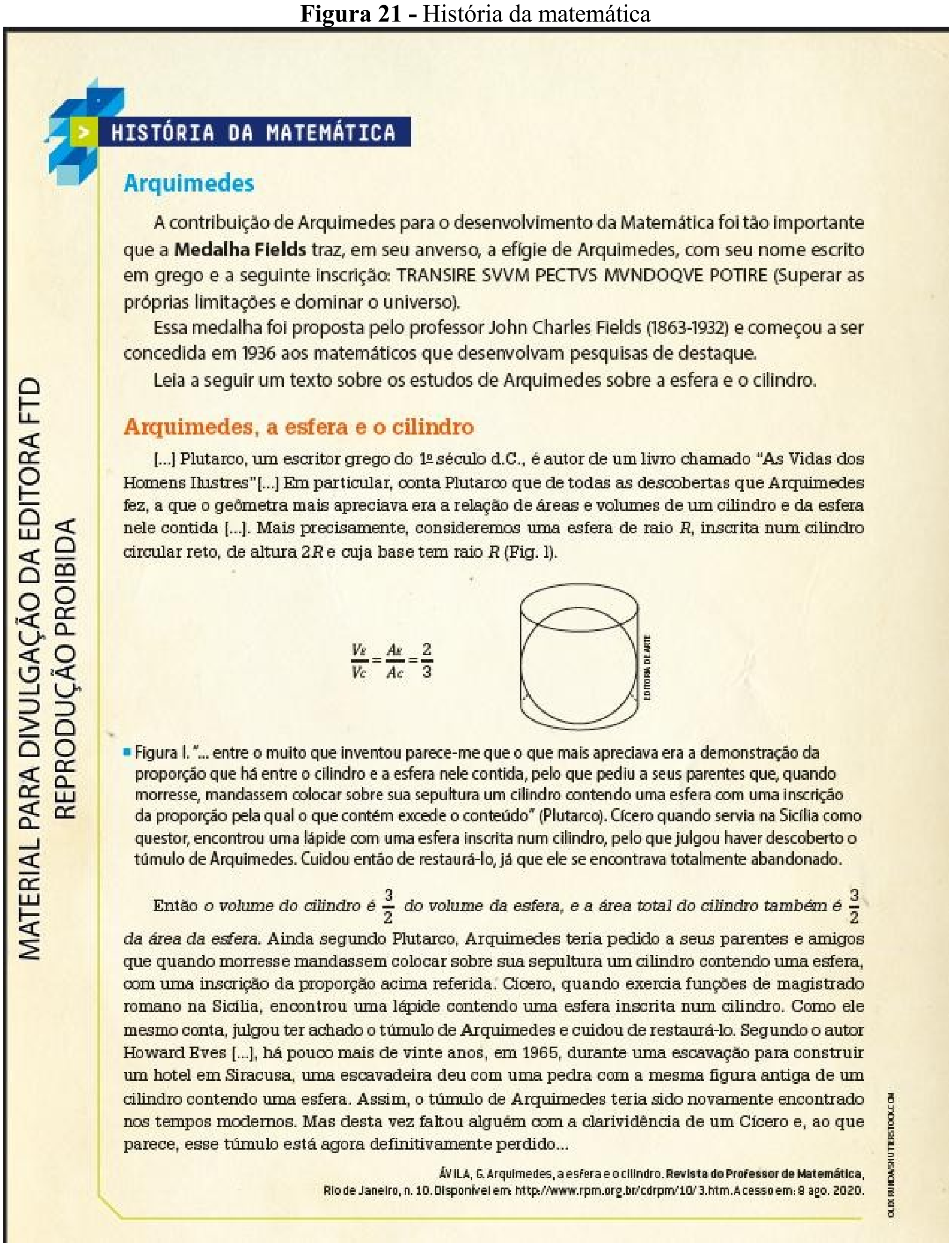
O diâmetro é igual a $2 \cdot \sqrt[3]{150}$ cm, aproximadamente 10,6 cm.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 132).

O exercício sete apresentado estabelece conexão entre figuras bidimensionais círculo e raio, e relaciona com as tridimensionais, cilindro e esfera. No exercício oito, é relacionado raio, altura, cilindro, esfera, volume da esfera e volume do cilindro. Esse exercício apresenta um formato de experimento. Aliado a isso, propõe-se de maneira física, aos estudantes, que realizar esses tipos de experimento poderia ser uma alternativa. As imagens são apresentadas na forma vertical, comum em toda a obra, e igual nas definições.

A figura 21 apresenta um texto com uma contribuição da história de Arquimedes. Nessa história, Arquimedes pede que, ao falecer, seus familiares colocassem um cilindro sobre seu túmulo e uma esfera dentro dele. Esse trecho apresentado no livro faz parte da história da Matemática, trazendo uma conexão com os sólidos geométricos, o volume do cilindro e da esfera.

Figura 21 - História da matemática



MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Arquimedes

A contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento da Matemática foi tão importante que a **Medalha Fields** traz, em seu anverso, a efígie de Arquimedes, com seu nome escrito em grego e a seguinte inscrição: TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRE (Superar as próprias limitações e dominar o universo).

Essa medalha foi proposta pelo professor John Charles Fields (1863-1932) e começou a ser concedida em 1936 aos matemáticos que desenvolvam pesquisas de destaque.

Leia a seguir um texto sobre os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro.

Arquimedes, a esfera e o cilindro

[...] Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres"[...] Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida [...]. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio R, inscrita num cilindro circular reto, de altura $2R$ e cuja base tem raio R (Fig. 1).

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

EDITORIA DE ARTE

Figura I. "... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Então *o volume do cilindro é* $\frac{3}{2}$ *do volume da esfera, e a área total do cilindro também é* $\frac{3}{2}$ *da área da esfera*. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves [...], há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido...

ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 10. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm. Acesso em: 8 ago. 2020.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 132).

Na seção 4.2, realizamos uma síntese dos trechos selecionados do livro didático e analisados nesta seção.

4.2 Síntese interpretativa dos trechos selecionado do livro didático

A partir da análise dos dezesseis trechos selecionados do capítulo quatro do livro de geometria proporcionam estabelecer relações entre as figuras bidimensionais e tridimensionais, bem como realiza algumas ligações entre diferentes conceitos.

Com relação às posições das figuras, verificou-se que, nos trechos selecionados, as imagens são apresentadas de forma vertical, paralelas às bordas dos livros. Para a questão das contextualizações com objetos reais, nas Figura 9, 11, 15, 16, 17 e 20 são apresentadas algumas comparações com objetos reais do mundo. As relações com duas e três dimensões aparecem com mais frequência nos trechos 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16 e 18, e a história da matemática é referida somente na figura 21, citando de forma breve a vida de Arquimedes.

Embora nas análises anteriores não tenham sido destacados indícios de potenciais nexos conceituais internos, reconhecemos que podem ser explorados pelo professor e pelos estudantes, a partir desses excertos do livro.

Na figura 5, por exemplo, não aparece de forma explícita a relação entre o bi e tridimensional, mas pode ser inferida por meio das bases do cilindro, constituídas por duas bases circulares. Com essa representação, é possível relacionar raio e geratriz à perpendicularidade e não perpendicularidade, o que pode manifestar indícios de potenciais nexos conceituais, exigindo que o estudante e o professor construam e estabeleçam relações entre o bi e tridimensional (Moura; Araújo; Cedro*,* 2018).

A partir das figuras 5, 6, 7, 8 e 12 podem ser feitas contextualizações dessas imagens com objetos usuais do cotidiano, como vaso ou lata, discutindo que, a partir da rotação de qualquer tamanho de retângulo, é possível construir um cilindro. De acordo com Koftun (2023, p. 39), algumas formas geométricas espaciais podem ser relacionadas com o cotidiano, permitindo estabelecer comparações "entre os objetos físicos e geométricos como comparar uma lata de refrigerante a um cilindro, e uma esfera com uma bola de futebol". Essas figuras são caracterizadas por possuírem três dimensões: altura, comprimento e largura. Embora esses objetos presentes sejam tridimensionais, algumas de suas representações não são regulares, apresentam as características altura, comprimento e largura, mas com as medidas alteradas, não sendo regulares (Costa, 2022).

Nos trechos 6, 7, 13 e 18, são utilizadas figuras planas com duas dimensões (retângulo, quadrado, triângulo isósceles e semicírculo). Fazendo a rotação dessas figuras, é possível construir os sólidos geométricos (cilindro, cone e esfera). As figuras 6 e 7 utilizam a largura do retângulo como sendo o raio da base do cilindro, enquanto o comprimento do retângulo faz referência à altura do cilindro. Na figura 13, relacionam-se as secções meridianas utilizando um semicírculo para realizar a rotação e construir a esfera, e triângulos isósceles e do equilátero para formar um cone. Essas representações são idealizações, já que as figuras planas não possuem espessura (Fonseca *et al.*, 2011).

As figuras 7, 13 e 18 apresentam as secções meridianas como linhas imaginárias, ou seja, sem dimensão, que não existem na realidade (Fischbein, 1993). Pensar nas secções meridianas remete às secções meridianas do Planeta Terra, que também não são visíveis, mas são denotadas como imaginárias, ou seja, essas contextualizações estão relacionadas às relações conceituais.

As figuras 8 e 14 apresentam as planificações do cilindro e do cone, as quais estão relacionadas com o bi e tridimensional. Para a planificação do cilindro, o livro utiliza um retângulo e duas bases circulares, e para o cone, um setor circular e uma base circular.

As figuras 9, 10, 16 e 20 foram os trechos selecionados que compunham alguns exercícios resolvidos. Nos trechos 9 e 16 foi utilizada uma relação com os objetos reais do mundo, como o cálculo da quantidade de papel necessária para cobrir a lateral de uma lata. Para isso, foi necessário calcular a área curva e a área da base do cilindro. Na figura 16 foi proposto construir uma embalagem para um produto. A figura 10 apresenta um exercício para calcular a área de dois cilindros, um maior e outro menor. No trecho 20 são dois exercícios: um propõe o cálculo do volume utilizando um cilindro e uma semiesfera, e o outro demonstra um experimento utilizando novamente um cilindro e uma esfera. Esses trechos evidenciam as relações entre os corpos redondos e com as figuras planas para calcular a área de cada corpo redondo.

As Figuras 15 e 19 tratam do volume do cone e da esfera. O volume do cone é construído por meio de uma relação com o Princípio de Cavalieri, não se limitando somente à fórmula, mas demonstrando por meio, de dois planos paralelos. No mesmo trecho, o autor relaciona o volume do cone com a quantidade de doce de leite necessária para preencher um canudinho de doce de leite (tronco de um cone): essa prática pode ser relacionada com o que os estudantes encontram no dia a dia. Na figura 19, trata-se do volume da esfera, relacionado com o Princípio de Cavalieri e com o Teorema de Pitágoras.

Na figura 21 está presente uma relação com a história matemática. É uma parte destinada a apresentar contribuições de Arquimedes, fazendo uma relação com o cilindro e a esfera, cuja passagem remete ao pedido de Arquimedes a seus familiares para que, quando morresse, levassem em cima de seu túmulo um cilindro e uma esfera dentro.

Nos trechos selecionados, notamos que todos os critérios que foram estabelecidos revelam potenciais nexos conceituais.

A partir da síntese dos trechos selecionados, observa-se que o material apresenta os nexos conceituais externos explicitamente, as fórmulas, definições, exercícios e relações com o cotidiano. Já os nexos conceituais internos têm potenciais para serem desenvolvidos, mas salientamos que essas relações só serão estabelecidas se o professor explorá-las na sala de aula, criando possibilidades para que os estudantes estabeleçam essas conexões. Nesse sentido, a pesquisa evidencia uma lacuna relacionada aos nexos conceituais internos, que não são explicitamente identificados nem explorados pelo material analisado. Com isso, os trechos selecionados possibilitam estabelecer relações e discussões que possam facilitar e compreender conceitos de geometria. Entretanto, esse potencial não é suficiente, pois esses nexos conceituais internos só podem ser desenvolvidos se o professor os explorá-los. Assim, o material analisado denuncia essa falta de relações explícitas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo discutir potenciais nexos conceituais relacionados à geometria em um livro didático do Ensino Médio. Com isso, realizamos os seguintes passos: i) construção de um quadro teórico que abordasse aspectos da história da geometria relacionando com a literatura em Educação Matemática, com foco na perspectiva adotada acerca do ensino e da aprendizagem em geometria relacionada à perspectiva lógico-histórica e os nexos conceituais; ii) seleção do livro didático a ser analisado, em que foi escolhido o livro da coleção *Prisma,* por ser o adotado no estado do Paraná para o Ensino Médio; iii) construção dos critérios de análise a partir do quadro teórico; iv) seleção das imagens do livro didático selecionado; v) análises dos excertos selecionados; e vi) síntese integradora a partir das análises realizadas.

Nas análises, foram identificados os trechos que estabelecem relação entre as figuras no plano e no espaço, a forma em que aparece a história, a relação da geometria com o cotidiano e em outros conceitos. Essas relações geralmente aparecem implícitas, precisando que o professor e o estudante explorem esses conceitos. Ao discutir as possibilidades dos nexos conceituais e o campo da geometria, notamos que elas podem se manifestar nos trechos do livro didático, mas que não são exploradas diretamente.

Essas possibilidades referem-se às relações entre os conceitos, como por exemplo, correlacionar que propriedades do bidimensional podem ser articuladas e discutidas com o tridimensional, como por exemplo a base dos sólidos e as partes curvas dos sólidos, que são compostas por figuras bidimensionais, e a rotação de uma figura plana (quadrado, retângulo, triângulo e semicírculo) para construir um sólido. Propor articulação entre a perspectiva lógico-histórica pode construir, com o aluno, uma compreensão sobre como ocorreram o surgimento e o desenvolvimento desses conceitos. Novas explorações proporcionam diferentes modos de ensino, possibilitando meios e estratégias que complementam o que é proposto no livro didático, como o auxílio de *softwares*, materiais concretos e recursos digitais que auxiliam na visualização e compreensão dos sólidos geométricos e das figuras planas. Em geral, o livro apresenta fórmulas, definições e exercícios, trazendo em seus trechos imagens de figuras planas a partir das quais é possível construir sólidos geométricos.

Embora o livro didático seja um material de pesquisa, tanto para estudantes quanto para professores, a partir dele é possível construir caminhos para realizar uma aula, desde que o conteúdo seja explorado e aprofundado. Portanto, o capítulo do livro didático analisado contribui com caminhos que podem auxiliar o professor, mas ainda percebemos lacunas, como não apresentar aspectos lógico-históricos, não propor ferramentas auxiliares, e trazer poucas relações com a história da Matemática. Também se defende que ele não deve ser a única ferramenta de ensino e aprendizagem.

Para alcançar o objetivo deste trabalho, que foi discutir potenciais nexos conceituais relacionados a geometria em um livro didático do Ensino Médio, foram analisados trechos do livro a partir das categorias presentes nos Quadros 4 e 5, as quais orientaram a discussão sobre as relações presentes nos trechos selecionados do livro didático. No primeiro critério, buscou-se identificar qual a posição que geralmente aparecem as figuras dos trechos selecionados. Em geral foi identificado, nos trechos selecionados, que as imagens presentes aparecem na posição vertical, paralela às bordas do livro didático, sem considerar variações, como rotacionar a imagem em diferentes posições e dialogar com a possibilidade em utilizar recursos, como por exemplo, materiais físicos ou softwares que poderiam auxiliar nessas diferentes formas de ver o sólido geométrico e as figuras planas.

No critério relações entre figuras bidimensionais e tridimensionais, foi constatado que há indícios dessas relações em dez trechos, os quais buscam conceitos bidimensionais para construir os tridimensionais. Entretanto, em alguns trechos não aparecem explicitamente quais relações podem ser estabelecidas, as quais são apresentadas, mas não relacionadas. Por exemplo, na figura 8, é utilizada a planificação de um cilindro, podendo relacionar as bases do cilindro (círculo) e a parte curva (retângulo) ao cálculo da área total desse cilindro, a partir do cálculo da área do círculo e do retângulo. Essa relação não é explorada no livro didático, mas pode ser explorada pelo professor.

Quanto à relação com outros conceitos, entende-se que há possibilidades de realizar essas ligações, por exemplo, a planificação do cone com o semicírculo e a base do cone com o círculo. Além disso, associa o cone a objetos presentes no mundo, como troncos de cone que representam os cones de trânsito e embalagens. De acordo com Sousa (2014, 2018, 2023), Freitas (2022) e Fabri (2022), os nexos conceituais representam essas ligações entre conceitos históricos, que são construídos e reconstruídos ao longo do tempo. Muitas vezes, essas ligações estão implícitas no conceito, ficando a cargo do professor relacioná-las.

Em seis trechos foram apresentadas contextualizações com objetos reais, como cone de trânsito, latas, casquinha de sorvete, embalagens, telhado de igreja, experimentos com esfera e construções. Essas relações com o cotidiano permitem que o estudante busque relacionar alguns conceitos da geometria com objetos do mundo, mesmo que sejam as representações desses objetos geométricos a partir de objetos físicos que atendem características dos objetos geométricos espaciais (Costa, 2020).

Com relação à história da Matemática, apenas um trecho faz referência, de forma breve, sobre a vida de Arquimedes. Embora os aspectos lógico-históricos sejam importantes para a construção dos conceitos, ainda são pouco explorados no livro didático.

Nesses trechos selecionados no livro didático, notamos que há relações conceituais, e que há possibilidades de manifestação dos nexos conceituais internos a partir delas. Essas relações podem ser ainda mais exploradas e presentes no livro didático. No entanto, notou-se que essa abordagem ainda é pouco evidente, pois nesta pesquisa, verificou-se que tanto na BNCC quanto no RCEM-PR não foram identificadas habilidades que manifestassem trabalhar de forma unificada o bi e tridimensional no Ensino Médio. Logo, os autores do livro didático estão seguindo o que é proposto nos documentos norteadores.

Com a realização desta pesquisa, evidenciou-se a importância de estudar de forma unificada a bidimensionalidade e tridimensionalidade, pois isso proporciona construir relações entre conceitos, podendo ser um facilitador de aprendizagem, já que promove conexões diretamente entre os conceitos. Estudar os conteúdos de forma unificada pode ser uma boa estratégia, pois possibilita promover uma aproximação entre conteúdos e, assim, evitar fragmentações.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, encontramos algumas limitações para realizá-la, especialmente na escassez de referências na literatura em Educação Matemática que aborda, de maneira integrada, o bi e tridimensional e sobre os corpos redondos. Essa lacuna, inclusive é observada até mesmo nos documentos norteadores, que explicitam o que se espera ou que se planeja a partir da geometria. Em relação aos nexos conceituais da geometria, também foram encontradas poucas referências, dificultando um estudo mais aprofundado sobre eles. Isso reforça a necessidade de estudos que explorem essas relações.

Com relação a pesquisas futuras, sugere-se investigar se os demais livros da coleção proporcionam potenciais de nexos conceituais, podendo aprofundar a literatura e buscar identificar quais nexos conceituais estão presentes nessas relações e de qual maneira podem contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria, e igualmente da matemática.

REFERÊNCIAS

BARROS, R. C. P. **Entre o plano e o espaço**: as relações entre figuras planas e espaciais em uma coleção de livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2021.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR., J. R.; CÂMARA de Souza, P. R. **Matemática.** Ensino Médio. Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas. Livro do Professor. São Paulo: FTD, 2020.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Histórico**. 28 out. 2010. Disponível em: Histórico — Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Acesso em: 25 jun. 2025.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Histórico**. 26 abr. 2017. Disponível em: Guia PNLD 2018 — Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Acesso em: 25 jun. 2025.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Histórico**. 1 ago. 2015. Disponível em: Guia PNLD 2015 - Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação . Acesso em: 25 jun. 2025.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Histórico**. 2021. Disponível em: Guia pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias. Acesso em: 25 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista**. São Paulo: Alfa-Omega, 1982.

COSTA, A. P. Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 152-179, 2020.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de Matemática: análise de professor as polivalentes em relação ao ensino de Geometria. **Vidya**, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010 - Santa Maria, 2010.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F. Análise do ensino de geometria espacial. **X Encontro Gaúcho de Educação Matemática.** Comunicação Científica, v. 2, p. 127-140, 2009.

DAVYDOV, Vasili V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Ciudad de La Habana: Pueblo y educación, 1982.

DIAS, M. S.; SAITO, F. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2009, Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2009. p. G05.

DUMONT, A. H.; BAIRRAL, M. A. Um estudo com professoras ensinando poliedros e corpos redondos em sua turma de 4ª série. **Acta Scientiae**, v. 10, n. 1, p. 68-83, 2008.

FABRI, G. J. C. **Nexos conceituais da estatística manifestados por professores em formação na Oficina Pedagógica de Matemática**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2022.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational studies in mathematics**, v. 24, n. 2, p. 139-162, 1993.

FONSECA, M. C. F. R.; LOPES, M. P.; BARBOSA, M. G. G.; GOMES, M. L. M.; DAYRELL, M. M. M. S. S. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed. Autêntica Editora. Belo Horizonte, 2011.

FRAGA, M. A. **Significações de nexos conceituais em uma atividade de ensino de medida de tempo**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo - USP, 2023. DOI https://doi.org/10.11606/T.48.2023.tde-15042024-105350

FREITAS, J. R. G. **Os nexos conceituais, a ludicidade e as ações coletivas no processo de aprendizagem de Geometria no Clube de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal de Goiás: Goiânia, 2022.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. **Anais**... VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov. 1996.

KALEFF, A. M. M. R. **Novas Tecnologias no ensino da matemática**: tópicos em ensino de geometria. 2ª ed. CEAD / UFF, 2016.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino de geometria em nossas mãos. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, n. 2, p. 19-25, 1994.

KOFTUN, C. M. **Movimentos associados a habilidades espaciais em construções de cenários animados no GeoGebra para a diferenciação de objetos da geometria plana e espacial.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade estadual do Paraná: Paraná, 2023.

KOPNIN, P. V. **A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento**. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1978.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em aberto**. V. 16, n. 69, 1996. DOI: https://doi.org/10.24109/2176-6673.emaberto.16i69.2061

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista-SBEM. **Geometria.** Blumenau, n. 04, 1995.

MACHADO, E. BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. **Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets**. 1 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 2018. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf. Acesso em: 01 dez. 2021.

MONTEIRO, I. A. **O desenvolvimento histórico do ensino de Geometria no Brasil**. Monografia de Graduação. Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual paulista "Júlio de Mesquita Filho" Instituto de Biociências exatas. Unesp–SP, 2015. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/o-desenvolvimento-historico--ivan-alves-monteiro.pdf. Acesso em: 01 dez. 2021.

MORAN, M.; POLIZELI, R.; RHEA, V. C.; CASSOLI. C. B. A. O ensino da Geometria: entrevista com a professora Regina Maria Pavanello. **SBEM**, Brasília, v. 28, n. 79, p. 01-11, abr./jun. 2023.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra. **Anais**... VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2004.

MOURA, M. D.; Lopes, A. R. L. V.; ARAÚJO, E. S.; CEDRO, W. L. Atividades para o ensino de Matemática nos anos iniciais da Educação Básica. **Volume IV: Geometria.** São Paulo: FFCLRP/USP, 2018.

NOBRE, S. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. **Ciência & Educação**, v. 10, n. 03, p. 531-543, 2004.

PANOSSIAN, Maria Lúcia. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2014.

PIÉRON, H. **Vocabulaire de la Psychologie**. Paris: PUF, 1987.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Projeto Folhas e Livro Didático Público são destaque no Congresso Nacional**. 8 jul. 2010. Disponível em: Projeto Folhas e Livro Didático Público são destaque no Congresso Nacional | Secretaria da Educação Acesso em: 25 jun. 2025.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (RCEM-PR).** Curitiba: SEED-PR, 2021.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Secretaria da Educação lança segunda edição do Livro Didático Público**. 29 abr. 2008. Disponível em: Secretaria da Educação lança segunda edição do Livro Didático Público | Secretaria da Educação. Acesso em: 25 jun. 2025.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Professores da rede estadual aprovam nova ferramenta de planejamento*. Agência Estadual de Notícias, 30 mar. 2022. Disponível em: RCO+Aulas | Escola Digital - Professor. Acesso em: 17 abr. 2025.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké**, v. 1, n., p. 7-17, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822.

PAVANELLO, R. M. Por que Ensinar/Aprender Geometria? Trabalho apresentado no VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo. **Anais...** Universidade Estadual de Maringá, 2004.

RANZAN, A. L. **Uma nova abordagem para o ensino da geometria**: do tridimensional para o plano. Trabalho de Conclusão de Curso. Especialização em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, 2010. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31578/000782481.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 02 dez. 2021.

REZENDE, J. P..; ANDRADE, J. A. A. Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino. Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Salvador. **Anais.....**Salvador: SBEM, 2010. Disponível em: https://www.enem.com.br/anais2010/trabalhos/GT01/GT01_2833.pdf. Acesso em: 22 maio 2025.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA FILHO, G. B. **Geometria espacial no Ensino Médio: Uma abordagem concreta**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

SILVESTRE, B. S.; ESTEVAM, E. J. G. conceitos relacionados à estatística no movimento lógico-histórico: nexos e subsídios para organização do ensino. **Revista Paidéi@-Revista Científica de Educação a Distância**, v. 16, n. 30, 2024.

SOARES, F. R.; SANTANA, J. R.; SANTOS, M. J. C. A realidade aumentada na aprendizagem de Geometria Espacial e as contribuições da Sequência Fedathi. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1–25, 2022. DOI: 10.26843/rencima.v13n4a11. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/3537. Acesso em: 7 ago. 2024.

SOUSA, M. C. Movimento lógico-histórico na formação de professores de Matemática. **Anais....**Conferência Interamericana de Educación Matemática. XVI CIAEM-IACME, Lima, Perú, 2023.

SOUSA, M. C. O Ensino de Matemática da Educação Básica na Perspectiva Lógico-Histórica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, nº 13. UFMS, Mato Grosso do Sul. 2014. Disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/490. Acesso em: 7 ago. 2024.

SOUSA, M. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie**: Revista de didática e psicologia pedagógica. (Uberlândia: MG). v. 2, nº 1, p. 40-68, jan/abr. 2018.

SOUSA; M. C.; MOURA, M. O. O movimento lógico-histórico em atividades de ensino de Matemática: unidade dialética entre ensino e aprendizagem. **Anais...** Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

SOUZA, D. S; MATTOS, F. R. P. A importância da visualização no ensino de geometria. **e-Mosaicos**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 31, 2024. DOI: 10.12957/e-mosaicos.2024.74262. Disponível em: https://www.e-publicacoes.uerj.br/e-mosaicos/article/view/74262. Acesso em: 7 ago. 2024.

VASCONCELLOS, Mônica. A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **Zetetiké**, v. 16, n. 2, 2008.