UNESPAR

AGNALDO SEXTO JUNIOR

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ
CAMPUS DE PARANAVAÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
FORMAÇÃO DOCENTE INTERDISCIPLINAR - PPIFOR

CRENÇAS E VISÕES DISTORCIDAS EM INSERÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

AGNALDO SEXTO JUNIOR

PARANAVAÍ
2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ
CAMPUS DE PARANAVAÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
FORMAÇÃO DOCENTE INTERDISCIPLINAR – PPIFOR

CRENÇAS E VISÕES DISTORCIDAS EM INSERÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

AGNALDO SEXTO JUNIOR

PARANAVAÍ
2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ
CAMPUS DE PARANAVAÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
FORMAÇÃO DOCENTE INTERDISCIPLINAR - PPIFOR

CRENÇAS E VISÕES DISTORCIDAS EM INSERÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada por AGNALDO SEXTO JUNIOR ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí, como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino: Formação Docente Interdisciplinar.
Área de Concentração: Formação docente interdisciplinar.

Orientador:
Prof. Dr. Fábio Alexandre Borges.
Coorientador:
Prof. Dr, João Henrique Lorin.

PARANAVAÍ
2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sexto Junior, Agnaldo
CRENÇAS E VISÕES DISTORCIDAS EM INSERÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS / Agnaldo Sexto Junior. -- Paranavaí-PR,2023.
100 f.: il.

Orientador: Fábio Alexandre Borges.
Coorientador: João Henrique Lorin.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Ensino: "Formação Docente Interdisciplinar") -- Universidade Estadual do Paraná, 2023.

1. História da matemática. 2. Livro didático. 3. Concepções sobre a história da Matemática. I - Borges, Fábio Alexandre (orient). II - Lorin, João Henrique (coorient). III - Título.

AGNALDO SEXTO JUNIOR

CRENÇAS E VISÕES DISTORCIDAS EM INSERÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Alexandre Borges (Orientador) – UNESPAR - Campo Mourão

Profa. Dra. Simone Luccas UENP/Cornélio Procópio

Prof. Dr. Maria Simone Jacomini Novak UNESPAR/Paranavaí

Data de Aprovação:

___/___/______.

Dedico este trabalho a minha mãe Greice Tatiane Orlando e em memória das minhas avós Maria José Orlando e Benedicta Maria dos Santos Sexto, mulheres essas que sempre me apoiaram e me incentivaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Greice Tatiane Orlando e Agnaldo Sexto, em especial a minha mãe, por sempre terem me apoiado e incentivado a me tornar a pessoa que sou hoje.

Ao meu orientador Fábio Alexandre Borges, por toda sua dedicação e paciência comigo e com os problemas que tive durante a elaboração e conclusão desse trabalho.

Ao meu coorientador João Henrique Lorin, por toda a ajuda e contribuições, que foram essenciais para a elaboração desse trabalho e conclusão desse trabalho.

As professoras Dra. Simone Luccas e Dra. Maria Simone Jacomini, pelo interesse e disponibilidade em fazer parte da banca de qualificação e defesa.

A todos os meus amigos e colegas, os quais não mencionarei nomes para não correr o risco de esquecer de alguém, que compartilharam comigo conhecimentos, bons e maus momentos.

A todos os professores os quais contribuíram para a minha formação durante esse período de mestrado.

A todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para que mais um trabalho se realizasse e por confiarem e acreditarem que eu seria capaz.

Se a História fosse vista como um repositório para algo mais do que anedotas ou cronologias, poderia produzir uma transformação decisiva na imagem de ciência que atualmente nos domina.
Thomas Kuhn

SEXTO, Agnaldo Junior. **Crenças e Visões Distorcidas em Inserções de História da Matemática em Livros Didáticos.** 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Universidade Estadual do Paraná–Campus de Paranavaí. Orientador: Prof. Dr. Fábio Alexandre Borges. Coorientador: Prof. Dr, João Henrique Lorin. Paranavaí, 2023.

RESUMO

A história da matemática tem o potencial de ser um importante recurso didático. Seu uso é recomendado por documentos oficiais, pois, colabora para que os alunos possam compreender melhor a matemática e o seu desenvolvimento ao longo do tempo. Quanto ao livro didático, sabemos que esse é uma importante ferramenta do sistema educacional brasileiro, e que é uma das fontes de história da matemática a serem utilizadas pelos professores em sala de aula. Por essa razão, pretende-se com essa pesquisa entender um pouco mais a respeito da relação entre a história da matemática e o livro didático, isto é, nosso objetivo é discutir possíveis influências de fragmentos de história da Matemática em livros didáticos, utilizados na cidade de Paranavaí, na disseminação de crenças e visões distorcidas acerca da Matemática. Para isso, analisamos pesquisas, trabalhos e teorias já elaborados que tratam de concepções a respeito das ciências, em especial da matemática, como por exemplo slogans sobre a matemática, visões deformadas da ciência e a teoria do desenvolvimento científico não exclusivamente linear. Utilizamos das discussões desses trabalhos para auxiliar as investigações das inserções de história da matemática encontradas nos livros didáticos analisados. Realizamos, na presente pesquisa, a análise das inserções históricas da matemática de uma coleção de livros didáticos. A coleção escolhida se trata de livros didáticos destinados ao Ensino Médio, composta por seis volumes, em que cada livro é autocontido, isto é, contém todo o conteúdo relacionado a uma área de estudo da Matemática, e assim cada livro pode ser utilizado de modo independente nos diferentes anos do Ensino Médio. Quanto à análise propriamente dita, classificamos as inserções selecionadas de acordo com suas características e formas de apresentação e abordagem da história da matemática, usando para isso as teorias dos trabalhos analisados. Como resultados, vimos como algumas crenças e visões distorcidas podem ser reforçadas ou desfeitas nessas inserções, e como conclusões entendemos que certas ideias e visões devem ser levadas em consideração ao abordar a história da matemática dos livros didáticos, para evitarmos concepções equivocadas a respeito da matemática.

Palavras-chave: História da matemática; Livro didático; Concepções sobre a história da Matemática.

SEXTO, Agnaldo Junior. **Beliefs and Distorted Visions in Insertions of History of Mathematics in Textbooks.** 100f. Dissertation (Master of Arts in Teaching) - State University of Paraná. Advisor: Prof. Dr. Fábio Alexandre Borges. Co-supervisor: Prof. Dr. João Henrique Lorin. Paranavaí, 2023.

ABSTRACT

The history of mathematics has the potential to be an important teaching resource. Its use is recommended by official documents, as it helps students to better understand mathematics and its development over time. As for textbooks, we know that they are an important tool in the Brazilian education system, and that they are one of the sources of the history of mathematics used by teachers in the classroom. For this reason, the aim of this research is to understand a little more about the relationship between the history of mathematics and the textbook. In other words, our goal is to discuss the possible influences of fragments of the history of mathematics in textbooks used in the city of Paranavaí in disseminating beliefs and distorted visions about mathematics. To achieve this, we analyzed research, works and theories that have already been developed that deal with conceptions about the sciences, especially mathematics, such as slogans about mathematics, deformed visions of science and the theory of non-exclusively linear scientific development. We used the discussions in these works to help investigate the insertions of the history of mathematics found in the analyzed textbooks. In this study, we analyzed the historical insertions of mathematics in a collection of textbooks. The chosen collection is intended for high school education, comprising six self-contained volumes, each covering the content related to a specific area of mathematical study, so each volume can be used independently in different years of high school. Regarding the analysis itself, we classified the selected insertions according to their characteristics and ways of presenting and approaching the history of mathematics, using the theories of the analyzed works. As a result, we have seen how some distorted beliefs and visions can be reinforced or dismantled in these insertions, and as conclusions we have understood that certain ideas and visions must be taken into account when approaching the history of mathematics in textbooks, in order to avoid misconceptions about mathematics.

Keywords: History of mathematics; Textbooks; Conceptions of the history of mathematics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história da matemática pode ser tomada como um importante recurso didático, uma vez que contribui para o desenvolvimento das aulas, ajudando na compreensão do conteúdo pelos alunos. Seu uso é recomendado por documentos oficiais, pois colabora para que os alunos possam compreender melhor a matemática, entendendo o seu desenvolvimento ao longo do tempo. Quanto ao livro didático, esse é uma importante ferramenta do sistema educacional brasileiro, e seu uso é garantido por alguns motivos. Dentre eles, por seu conteúdo e forma de apresentação serem especialmente elaborados e destinados ao ensino e aprendizagem em sala de aula, como também seu fornecimento de maneira gratuita a todos os alunos da rede pública em território brasileiro. Sabemos que uma das fontes de história da matemática utilizada pelos professores em sala de aula é o livro didático. Por essa razão, pretende-se com essa pesquisa entender um pouco mais a respeito da relação entre a história da matemática e o livro didático, isto é, nosso objetivo é *discutir possíveis influências de fragmentos de história da Matemática em livros didáticos, na disseminação de crenças e visões distorcidas acerca da Matemática*.

Em nossa pesquisa de revisão bibliográfica, percebemos alguns pontos a serem abordados quanto às inserções de história da matemática nos livros didáticos. Por exemplo, a respeito das contribuições da utilização da história da matemática nesses materiais, mas também quanto às formas de apresentação dessas inserções, que às vezes são colocadas à parte do texto e/ou com pouca relação ao conteúdo, o que não facilita o uso de tais inserções como elementos de discussão pelo professor atrelados aos conteúdos que estão sendo ensinados.

Entendemos que nosso trabalho pode ajudar a identificar quais as crenças e visões distorcidas em inserções de história da matemática em livros didáticos e assim contribuir para uma utilização mais assertiva da história da matemática em sala de aula, isto é, permitindo um melhor entendimento sobre a história ali presente, tanto com relação ao seu conteúdo como a sua forma de apresentação. Também esperamos contribuir para a formação docente com relação à abordagem da história da matemática no ensino, para que professores venham a ter um melhor proveito das inserções presentes no livro didático em favor tanto do seu ensino quanto da aprendizagem de seus estudantes.

Como aporte teórico de nossa investigação, analisamos pesquisas como Machado (2011), Gil Pérez *et al.* (2001), Kuhn (1998), e Lorin e Batista (2016), que tratam de concepções a respeito das ciências, em especial da matemática, ou que fazem relação com esta. Como por exemplo algumas falas ou “slogans” que são utilizados para se referir a matemática, ou algumas visões inadequadas ou “deformadas” da ciência ou do desenvolvimento científico. Assim, utilizamos essas interpretações para auxiliar as investigações das inserções de história da matemática encontradas nos livros didáticos analisados.

Quanto à organização deste trabalho, começamos com uma seção teórica para tratar sobre esses conceitos, visões e ideias a respeito da matemática e de sua história. Entendemos que essa seção se faz necessário para entendermos o que já existe a respeito da relação entre história da matemática e do livro didático, pois isso servirá de base para que possamos desenvolver nossas análises no decorrer do trabalho. Iniciamos a primeira seção abordando algumas frases que são veiculadas como de senso comum para se referir a matemática, em que analisamos o significado e as interpretações dessas frases. Damos continuidade, ao analisarmos algumas visões deformadas a respeito do conhecimento científico, dando atenção à matemática. Abordamos também uma forma de entender o desenvolvimento da ciência para além do modo exclusivamente linear e acumulativo.

Já na seção seguinte trazemos no início uma seção sobre o livro didático e sua análise, quando abordamos a origem e algumas das faces desse material. A primeira face que apresentamos é a sua face comercial, pois o mesmo é um produto negociado entre as editoras e o governo. A segunda face é talvez a mais reconhecida, a de “protagonismo” em sala de aula, por ser um material amplamente utilizado pelas(os) professoras(es). Já a terceira face, a que mais utilizamos neste trabalho, a de fonte para pesquisas científicas, sejam pesquisas documentais ou bibliográficas, quando se utiliza o livro didático para esse fim, pois, assim como os demais livros, esse também consegue apresentar particularidades da sociedade em um determinado período, mas especialmente características dos sistemas educacionais, uma vez que este material é demasiadamente utilizado em salas de aula. Nos demais subtítulos desta seção realizamos uma revisão bibliográfica de pesquisas que abordem o nosso tema, isto é, pesquisas que relacionam o livro didático com a história da matemática. Primeiramente realizamos um levantamento dos periódicos, sendo que, dentro desses, procuramos os artigos que abordassem o tema de alguma forma e, após aplicarmos determinados critérios de corte, restringimos nossa atenção para nove trabalhos. Por meio da leitura desses materiais, identificamos três temas comuns aos textos e que serão mais bem explicados na sequência. Nas seções seguintes, abordamos individualmente os temas destacados anteriormente, os quais são: *motivos à presença da história da matemática nos livros didáticos; como é apresentada a história da matemática nos livros didáticos; e a formação dos professores com* *relação à história da matemática*. Por fim, no último subtítulo, apresentamos nossas reflexões a respeito dos temas apresentados.

Na quarta seção apresentamos o processo de seleção dos livros didáticos e nossos critérios metodológicos. Os livros escolhidos fazem parte de uma coleção para o Ensino Médio, a qual possui seis volumes, sendo que cada volume aborda um tema da matemática, e assim todos os volumes podem ser utilizados em todos os anos do Ensino Médio, cabendo ao professor direcionar os alunos para a devida utilização. Esta coleção foi escolhida por se tratar, primeiramente, de uma coleção que, durante a realização desta pesquisa, é utilizada em um colégio da cidade de Paranavaí, cidade onde mora o pesquisador, e pelo fato desta coleção ter uma seção especial que trata da história da matemática, o que chamou nossa atenção para a mesma. Outro fator foi o da editora deste material fornecer, de maneira gratuita em seu site, a versão digital destes materiais, o que facilitou as nossas análises.

Na penúltima seção, o qual consideramos a parte central deste trabalho, fazemos nossas análises, as quais têm como base as inserções de história da matemática nesses livros, isto é, os textos e imagens que de alguma forma abordam o desenvolvimento histórico ou pontos específicos dessa ciência. Quanto aos nossos critérios e pontos de análise para as inserções encontradas, começamos com uma análise quantitativa, com a apresentação de quadros nos quais são apresentadas a quantidade de inserções encontradas em cada livro, sua ordem de apresentação no livro acompanhada da página encontrada. Fizemos na sequência uma análise qualitativa, em que tratamos do conteúdo das inserções encontradas, descrevendo e relacionando as mesmas segundo os slogans de Machado (2011), as visões deformadas de Gil Pérez *et al.* (2001), e a teoria do desenvolvimento científico de Kuhn (1998), levando também em consideração as suas características e formas de apresentação e abordagem da história da matemática.

Por fim, na última seção, apresentamos nossas considerações finais, em que descrevemos de maneira resumida as conclusões e inferências que obtivemos no decorrer desta pesquisa. Desde o levantamento teórico sobre algumas visões, falas e ideias a respeito das ciências, em especial da matemática, e de sua história, e também sobre o livro didático. Passando pelos pontos em comum encontrados nos trabalhos analisados na revisão bibliográfica, até nossas interpretações das análises realizadas sobre inserções encontradas nos livros didáticos selecionados. Por fim, apresentamos também algumas sugestões para uma utilização mais adequada da história da matemática no ensino da disciplina de matemática sob o nosso ponto de vista.

2 SOBRE OS SLOGANS E AS VISÕES DISTORCIDAS DA MATEMÁTICA

No nível do senso comum nos deparamos com algumas noções sobre a Ciência, ou ciências para sermos mais precisos, como falas, ideias e conceitos, enfim concepções sobre as ciências, sendo essas das mais diversas e quase antagônicas. Sobre algumas dessas concepções, autores como Machado (2011), Gil Pérez et al. (2001), e Kuhn (1998), e Batista e Lorin (2016), possuem discussões a respeito e que iremos abordar nesta seção, as quais servirão de base para as análises mais a frente neste trabalho.

Como afirmamos acima veremos o que esses autores discutem em seus trabalhos, porém vamos direcionar tais discussões para uma ciência em especial, a saber, a matemática. Discussões tais como os *slogans* da matemática apresentados por Machado (2011), e as visões deformadas da ciência de Gil Pérez *et. al.* (2001), onde também usaremos o trabalho de Batista e Lorin (2016), pois os autores fazem uma aproximação entre os dois anteriores, e por último, mas não menos importante, a teoria do desenvolvimento científico, bem como algumas falas e críticas, de Kuhn (1998). Acreditamos que tais trabalhos servirão de base para nossas análises para podermos identificar as inserções de história da matemática em livros didáticos e discutir a influência desses fragmentos na disseminação de crenças e visões distorcidas acerca da matemática

A primeira discussão que vamos apresentar é a de Machado (2011). Em seu texto intitulado "A matemática e a língua materna: análise de uma impregnação mútua" o autor apresenta no primeiro capítulo algumas proposições bem conhecidas a respeito da matemática, proposições estas que ele chama de *slogans*, tais como "A Matemática é exata", "A Matemática é abstrata", "A habilidade para à Matemática é inata". Sobre tais *slogans* Machado discute seus significados, bem como as ideias que os mesmos influenciam ou invocam, como por exemplo: "os outros setores do conhecimento não são exatos", "lidar com abstrações é uma característica exclusiva da matemática", "é normal que grande parte das pessoas encontre dificuldades em matemática", ideias essas que demonstram os (des)gostos de parte da população para com a matemática.

Quanto a estes slogans Machado afirma "embora aceitáveis num primeiro momento enquanto símbolos, quando são analisados como asserções diretas, elas podem ser contestáveis" (2011, p.32), indicando que quando tentamos entender o que dizem tais slogans, podemos nos deparar com mensagens ao menos questionáveis.

A primeira frase, ou slogan, que ele discute é "A matemática é exata", frase essa que tem como consequência a classificação da disciplina de matemática, junto a outras como por exemplo física e química, na área do conhecimento chamada de "ciências exatas". Classificação essa que leva em conta o fato de tais componentes curriculares trabalharem com cálculos, e/ou com a lógica clássica. Mas como Machado (2011) apresenta, tal slogan pode ser problematizado.

Começaremos analisando as proposições ou sentenças matemáticas, que são sempre consideradas verdadeiras ou falsas, e nesse sentido chamadas de "exatas". Sabemos que a linguagem formal ou o discurso não é construído apenas com frases desse tipo, pois a linguagem possui por exemplo sentenças interrogativas e imperativas. Porém na matemática, usamos as proposições, e nas palavras de Machado, isto é "menos uma consequência do que uma causa da natureza da matemática" (2011, p.34), pois apenas sentenças dessa natureza são aceitas na lógica formal.

Ao mencionarmos a lógica é comum associarmos as demonstrações, estas que possuem duas noções como Machado (2011) apresenta, a primeira "inteiramente no interior do formalismo, corrente filosófica que identifica a matemática como o estudo dos sistemas formais" (2011, p. 37), na qual demonstrar uma proposição é apresentá-la como uma conclusão de argumentos que se baseiam em axiomas ou outras proposições (MACHADO, 2011, p.38). Já a segunda visão, é considerada em sentido lato, isto é, em sentido amplo, onde demonstrar é evidenciar algo para alguém, por meio de uma mensagem através de evidências elementares (MACHADO, 2011, p.38). Assim temos diferenças entre essas duas noções, no formalismo partimos dos axiomas que são aceitos de modo absoluto, e utilizamos a lógica formal clássica, de onde obtemos longas e complexas cadeias de raciocínio, que causam o (des)interesse em boa parte da população (MACHADO, 2011, p.38). E essa "é incorporada quase de maneira 'natural' como parte própria da epistemologia da Matemática" (LORIN; BATISTA, 2016, p.142) ou seja por considerarmos como absolutas tais premissas que "caímos" na crença de que a matemática é exata.

Já em sentido amplo partimos de afirmações locais que encurtam o encadeamento do raciocínio, e seguimos a lógica da própria linguagem (MACHADO, 2011, p.39). No senso comum, as demonstrações da matemática são entendidas como uma fusão das duas concepções, ao mesmo tempo que tudo é demonstrável na matemática desde que se tenha preparo e paciência, se espera algo psicologicamente convincente (MACHADO, 2011, p.39).

Quanto a fala de que "tudo é demonstrável na matemática", esta já vem sendo discutido desde o começo do século XX, e que com os teoremas de Gödel que afirmam que teorias consistentes, como a própria matemática, existem proposições que não podem ser demonstradas nem como verdadeiras nem como falsas. Assim, embora as ideias de Gödel não tenham sido totalmente aceitas pelos filósofos, no senso comum não levamos em consideração tais limitações do formalismo e acreditamos que tudo pode ser demonstrado na matemática. Portanto, como afirma Machado, “a demonstrabilidade de todas as proposições da matemática não pode, pois, servir de fundamento para a exatidão da matemática, nem em sentido estrito, onde ela é falsa, nem em sentido lato, onde ela é inespecífica” (2011, p.40).

Ainda sobre a “exatidão da matemática”, é comum associarmos essa à ideia de se trabalhar com números. Aqui cabe relembrar a existência do campo da geometria, que não necessariamente trabalha com números, pois podemos desenhar e estudar algumas das propriedades de um quadrado, por exemplo, apenas com um papel, compasso, e uma régua não graduada. Quando falamos em números, temos que estes possuíram várias interpretações ao longo do tempo, mas tais interpretações possuem principalmente duas origens, nas ideias de Platão (428 a.C.- 348 a.C.), que concebia os números como objetos eternos e imutáveis do mundo das ideias, um mundo distinto do nosso mundo sensível; E nas ideias de Aristóteles (384 a.C.- 322 a.C.), que recusa a divisão de Platão entre o mundo das ideias e o das experiências, e para o qual podemos obter as características matemáticas, como os números, a partir da interação com os objetos (MACHADO, 2011, p.41).

A partir dessas ideias surgiram outras, seguindo Aristóteles podemos citar Newton (1643-1727), que compreende “os números originando-se nos processos de contagem ou de medida” (MACHADO, 2011, p.42), e na trilha de Platão podemos citar Frege (1848-1925), para quem “o número não é algo abstraído das coisas, não é algo físico, uma razão entre grandezas [...]. Não é uma representação, mas um objeto especial, regido por leis próprias” (MACHADO, 2011, p.42). Mas hoje em dia temos concepções não tão distintas como as entre Platão e Aristóteles, temos alguns que tomam um caminho intermediário, como para Einstein (1879-1955), “que concede aos objetos matemáticos o fato de terem sido criados, mas credita tal criação ao pensamento humano, desvinculando-os do mundo empírico” (MACHADO, 2011, p.42).

Quanto ao senso comum, a concepção de número parece ser uma mistura dessas ideias, ao mesmo tempo que as pessoas tomam os números como objetos regidos por leis próprias, muito bem estruturadas e enunciadas, ao lidarem com os números no dia a dia eles sempre estão associados às ideias de contagens e medida (MACHADO, 2011, p.43). Como por exemplo a contagem de assentos no transporte público ou de valores ao lidarem com dinheiro, ou ainda nas medidas de tempo ao olharem para o relógio, ou de espaço ao prestarem atenção à distância entre dois pontos.

Mas quando tratamos da "exatidão", esta vai depender de qual interpretação tomamos, pois para uma visão mais próxima da de Platão, as verdades matemáticas seriam essencialmente exatas por terem origem nos números, objetos perfeitos do mundo das ideias, para uma visão mais próxima à de Aristóteles a exatidão da matemática dependerá da adequação desta à representação do mundo real.

Assim de uma forma ou de outra "as representações numéricas são invocadas como argumento para justificar a exatidão das relações entre as grandezas das quais os números seriam meros representantes" (MACHADO, 2011, p.44). Pois quando usamos um número para representar algo, não usamos uma relação de identidade, entre esse algo e o número com todas as suas propriedades, mas sim uma relação de equivalência, onde uma propriedade interessante desse algo é associada a uma propriedade do número. Por exemplo, a sala de número 8, não necessariamente precisa ser maior que a sala 7 e menor que a 9, nem o dobro da 4, mas provavelmente apenas a sua posição próxima às salas 7 e 9 que é interessante.

Para finalizarmos esta parte a respeito da "matemática exata" tomando como base a utilização de números, é importante mencionarmos os números irracionais. Como sabemos os números irracionais, em suas representações decimais, possuem infinitas casas e essas não são periódicas. No nosso dia a dia, quando lidamos com os números usamos poucas casas decimais, principalmente quando trabalhamos com medidas, quando não nos deparamos com dízimas periódicas. Assim quando é apresentado a ideia de um número irracional para alguém no nível do senso comum, isso gera um certo desconforto, desconforto esse já sentido de certa forma pelos antigos gregos que nas palavras de Machado "Negando o estatuto de número às razões entre grandezas que conduziam aos irracionais, foi possível aos gregos viver praticamente ao largo de tais objetos indesejáveis." (2011, p.46). Hoje sabemos que os irracionais constituem uma maioria dentro do campo dos números reais, e isso já coloca em xeque toda essa "certeza da exatidão" atribuída à matemática por meio da utilização das medidas, uma vez que lidamos com poucos números irracionais em nossas vidas.

O próximo slogan, apresentado por Machado (2011) e que vamos tratar, é o de que "A matemática é abstrata". Para entender o que essa fala representa precisamos analisar a relação entre concreto e abstrato. Ao nível do senso comum parece natural conceber tal relação como antonímia, isto é, uma é o oposto da outra, o concreto como o oposto do abstrato e vice-versa. Naturalmente também entendemos o concreto como o material, o palpável ou ainda o sensível aos sentidos, assim o abstrato seria o imaterial, o imaginário ou ainda o concebido.

Neste caminho os objetos e estruturas da matemática desde os mais simples até os mais complexos seriam prontamente classificados como abstratos. Machado (2011) exemplifica, tomemos os números, uma pessoa pode ter 5 dedos na mão, contar 5 laranjas ou 5 dias, mas nunca terá o número 5 em suas mãos, pois os dedos, as laranjas e até mesmo os dias são concretos, mas o número 5 em si é abstrato, "Essas manifestações do número 5 não são o objeto de estudo da matemática; o número 5 enquanto matéria-prima para o trabalho do matemático é uma abstração que transcende todas as possíveis instâncias empíricas" (2011, p.48). Assim em um primeiro momento, não encontramos problemas nem na distinção apresentada entre o concreto e o abstrato, nem com relação às abstrações estarem no centro do trabalho matemático, porém quando nos aprofundamos no que realmente o slogan "A matemática é abstrata" quer dizer, nos deparamos com algumas peculiaridades.

O próprio termo "abstrato" está impregnado "de conotações negativas, como as associadas à dificuldade de compreensão e ao interesse de poucos, ou de sentidos contraditórios" (MACHADO, 2011, p.48). Por exemplo podemos tomar o abstrato como uma purificação do real, eliminando o que é irrelevante e mantendo apenas aquilo que consideramos essencial, porém do mesmo modo, podemos tomar o abstrato como muito distante da realidade e que nada tem a ver com ela, ideias contraditórias, pois ao mesmo tempo o abstrato se encontra perto e longe da realidade.

Além disso, Machado diz que devemos tomar cuidado com a caracterização do termo "concreto", pois esse apresenta uma segunda dimensão para além da dimensão material que "é uma importante componente da noção de concreto, embora não esgote o seu sentido", essa segunda dimensão "igualmente importante, apesar de bem menos ressaltada: trata-se de seu conteúdo de significações" (2011, p.49). Exemplificamos, uma conversa sobre um assunto em discussão, não é concreta pela dimensão palpável em razão da sua natureza verbal, mas possui conteúdo de significados, que evidencia a sua concretude sobre o tema. Um outro exemplo, um material manipulável, como o material dourado, que na ausência de significado para aqueles que o manipulam, perde a concretude que se pretendia enfocar.

Como vimos, o abstrato é entendido como o oposto do concreto, logo Machado diz "é fundamental considerar as duas dimensões do concreto acima referidas" (2011, p.49), e ele destaca que embora existam situações em que uma dimensão se sobreponha a outra para garantir a concretude, esta concretude pode ser prejudicada pela ausência de uma dessas dimensões. Um exemplo apresentado por Machado (2011, p.50), faz uma comparação entre um livro de matemática e um livro de história. Quando consideramos a dimensão concreto-palpável, não existem diferenças essenciais entre os dois, o material presente em ambos é o mesmo, (são feitos de papel), porém quando consideramos a dimensão do conteúdo de significações, apenas um deles é classificado como abstrato, o livro de matemática.

Um outro ponto discutido por Machado sobre o slogan “A matemática é abstrata”, é a respeito da relação entre a abstração e o conhecimento. O autor diz que “A maior parte das conotações negativas associadas ao termo abstrato decorre de uma caracterização inadequada de papel que as abstrações desempenham na construção do conhecimento” (2011, p.53). Ou seja, as ideais negativas a respeito do termo abstrato surgem de uma má interpretação do papel das abstrações no desenvolvimento do conhecimento.

Na tentativa de entender a construção ou o desenvolvimento do conhecimento, podemos partir de duas ideias, a primeira, mais difundida pelo senso comum, de que o conhecimento se desenvolve numa ascensão do concreto para o abstrato. Ou seja, as abstrações são criadas de forma a generalizar ideias encontradas no mundo real e se tornam cada vez mais amplas, e cada vez mais afastadas da realidade, com isso chegando no ponto das abstrações como um objeto em si, e assim perdendo o seu papel de generalizar o real. No sentido oposto, temos a ideia de que o conhecimento se desenvolve numa ascensão do abstrato para o concreto, ideia essa com raízes filosóficas, porém não muito defendida no senso comum, mas é a que predomina nos esquemas que conduzem e orientam as práticas pedagógicas. Nesta rota o conhecimento se desenvolve por meio das abstrações de forma desvinculada da realidade, assim quando a teoria produzida se encontra com uma aplicação prática da realidade, temos uma certa sensação de desconforto, por parecer uma mera coincidência.

Como vimos não é eficaz compreender a construção do conhecimento como uma via unilateral, que parte do concreto ao abstrato ou vice-versa, pois em ambas as rotas chegamos em situações desagradáveis, mas Machado mostra uma terceira rota, a das abstrações como mediações indispensáveis no processo de elaboração do conhecimento. Nesse caminho as abstrações não são nem o início ou o fim e sim o meio do processo, que levam de um ponto de concretude ao outro. Sobre isso Machado afirma que através delas das abstrações, “dá-se o reconhecimento e a estruturação de relações progressivamente mais significativas, que passa a caracterizar um concreto mais complexo, mas que viabilizam a ação sobre ele” (2011, p. 55). Ou seja, a construção do conhecimento não se encerra depois de uma mudança de nível, ele se torna mais complexo e com a ajuda das abstrações, cada nova etapa se torna o novo ponto de partida, no qual as estruturas se tornam mais significativas. Sobre essa forma de pensamento Machado faz a seguinte ressalva, de que em geral “não é linear, onde podem coexistir, em um mesmo nível, diferentes estruturações do concreto organizadas a partir de distintos sistemas de abstrações e que podem dar origem a diversos prosseguimentos" (2011, p.55).

Um último ponto discutido por Machado sobre o slogan "a matemática é abstrata" vem abordar sobre a linguagem. Apresentamos nos parágrafos acima algumas discussões sobre o termo abstrato e exemplos relacionados à matemática, porém as abstrações são encontradas em outras áreas, como a da linguagem. Sobre tal fato Machado afirma, "todos os sistemas linguísticos, dos ideográficos aos alfabéticos, baseiam-se necessariamente em abstrações, ainda que de natureza diversa, em cada caso" (2011, p. 58). Para o autor, as abstrações desenvolvem um papel importante na linguagem;

Nos sistemas ideográficos, os signos usados começam como uma representação de algo real, e pouco a pouco vão se simplificando e se afastando desse real, ao ponto dessas representações serem ideias ou abstrações desses objetos reais; Nos sistemas alfabéticos, as abstrações são ainda mais predominantes, pois o conjuntos dos sons produzidos pelos humanos são separados e classificados e representados por signos, estes que são em quantidade finita, os quais formam palavras e sentenças que representam as ideia e abstrações de uma língua. Este último exemplo, dos sistemas alfabéticos, se assemelha ao que ocorre na matemática, principalmente com os números.

Assim notamos que tanto a linguagem quanto a matemática lidam com abstrações, que são vistas de formas diferentes pela sociedade, no senso comum, onde as abstrações utilizadas pela linguagem são aceitas e até mesmo consideradas naturais no processo de transmissão e troca de ideias, enquanto que as abstrações utilizadas pela matemática são vistas com maus olhos, e até mesmo consideradas difíceis ou estranhas. Sobre essas ideias da matemática difícil, ou fácil, que tratamos no próximo slogan.

O terceiro slogan apresentado por Machado, e o último por nós abordado neste trabalho, diz que "A capacidade para a matemática, é inata". Tal slogan, assim como os demais, apresenta uma certa concepção que a sociedade tem a respeito da matemática, sendo essa a de que a habilidade para lidar com matemática seria para poucos. Sobre isso Machado apresenta a seguinte discussão a respeito da confusão com relação ao termo "inato". Sabemos que a matemática é ensinada nas escolas tal como a linguagem, e ambas recebem o mesmo tratamento, e esta última é também considerada "inata", mas de uma maneira diferente, no sentido de ser acessível para todos os indivíduos. E é sobre essa confusão entre os significados do termo "inato" que Machado aborda em seu texto.

Machado chama esses significados de "inato universal", quando representa características universais dos indivíduos, por exemplo, o instinto de todo recém-nascido de sugar o seio para se alimentar é considerado inato no sentido universal, e o "inato particular", quando representa características particulares de certos indivíduos, por exemplo, a matemática que é considerada pelo senso comum com o sentido particular, como de uma habilidade não compartilhada por todas as pessoas, apenas pelos que "nasceram para isso" (2011, p. 63).

Machado afirma sobre esta confusão entre os significados de "inato" que: "Mesmo em nível filosófico ou epistemológico, onde soem ocorrer densos debates sobre a controversa questão [...], a confusão entre os significados está presente" (2011, p. 64). Como vimos existem ao menos dois sentidos quanto ao uso do termo "inato", e quando levamos tais sentidos em consideração para analisar o slogan "A capacidade para a matemática, é inata" temos dois sentidos muito distintos e com ideias bastantes divergentes, no sentido universal, a capacidade para a matemática seria acessível para todos igualmente, e no sentido particular apenas para alguns "poucos escolhidos". Não cabe a nós, neste texto, escolher um lado desta discussão, mas ressaltar que devemos analisar mais a fundo o que queremos dizer com tal slogan, pois o mesmo influencia o modo de ensinar e/ou aprender. Por exemplo quando se diz que "a matemática é algo para poucos", isso pode resultar na falta de interesse de todos aqueles que não se identificam com esses "poucos", e quando isso ocorre, de acordo com Lorin e Batista, "seja nos livros didáticos, ou no discurso do professor, faz com que, muitas vezes, os alunos se sintam desmotivados para aprender conhecimentos que aparentam ser distantes e impossíveis de serem alcançados" (2016, p. 147).

Portanto, como apresentamos acima, existem certas frases, chamadas por Machado de slogans, amplamente utilizadas pelo senso comum, que colaboram com certas concepções a respeito da matemática. Analisamos tais discussões pois acreditamos que os slogans podem contribuir/influenciar o fenômeno de ensino/aprendizagem.

Vamos agora analisar as discussões de Gil Pérez et al. (2001) no trabalho intitulado "Para Uma Imagem Não Deformada do Trabalho Científico". Neste trabalho os autores tratam sobre o que os mesmos denominaram de "visões deformadas do trabalho científico" que são certas ideias, compreensões e imagens, enfim "visões", simplificadas ou deturpadas do trabalho científico e/ou das ciências. Visões essas que foram relacionadas aos slogans de Machado (2011) por Lorin e Batista (2016), uma vez que ambos os trabalhos analisam a ideias e/ou concepções a respeito da matemática, presentes no senso comum; embora tais visões, como o próprio trabalho de Gil Pérez et al. (2001) discorre, podem ser encontradas nas academias e até mesmo entre professores.

Entendemos que as análises das denominadas "visões deformadas" contribuem para as nossas análises das inserções de história da matemática nos livros didáticos, uma vez que poderemos analisar quais dessas inserções podem contribuir para reforçar as visões distorcidas da matemática, ou pelo contrário, ajudam a desmistificar tais visões.

Antes de apresentar as supracitadas visões, Gil Pérez et al (2001) fazem uma ressalva: “Estamos conscientes da dificuldade de falar em uma ‘imagem correta’ da construção do conhecimento científico, que parece sugerir a existência de um método científico universal, de um modelo único de mudança científica” (2001, pg. 126). Ou seja, os autores alertam que não abordaram as “visões corretas” do conhecimento científico, pois essas são múltiplas e existem várias concepções que podem ser aceitas como corretas sobre as ciências, ou mais especificamente, sobre o método científico. Assim os autores se restringem em abordar “a procura de visões deformadas, susceptíveis de conduzirem a um amplo consenso em torno do que se deve evitar quando pretendemos adotar posturas de tipo científicas” (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 127), com isso tratam daquelas visões das quais existe um consenso de que devem ser evitadas.

Acerca dessas visões Gil Pérez *et al.* (2001) chamam a atenção para o fato de que essas visões não devem ser vistas como “sete pecados capitais” diferentes e isolados, mas pelo contrário, existe uma série de outras visões deformadas e essas constituem uma rede de ligações entre elas (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 134).

A primeira visão deformada apresentada pelos autores é denominada *visão empírico indutivista e ateórica*. Esta visão destaca a observação como neutra, não dando atenção à criação e utilização das hipóteses, sendo essas que orientam todo o processo de investigação científica. Essa concepção, para os autores, parece afetar tanto os cientistas, que nem sempre estão cientes dos métodos que utilizam em suas investigações, como os estudantes, uma vez que a mídia (televisão, notícias e filmes) atribuem a “essência da atividade científica à experimentação, coincide com a de “descoberta” científica (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 129). Assim, essa visão contribui para uma concepção "ingênua" da ciência, de que essa é desenvolvida apenas por experimentação e por descobertas.

Como vimos, essa visão deformada trata da relação entre hipóteses e descobertas dentro da ciência, sendo nesta visão a primeira menosprezada em relação a segunda. Sobre isso exemplificamos, quando trabalhamos com certos materiais, como o material dourado ou um conjunto de peças de sólidos geométricos por exemplo, em sala de aula na tentativa de que os alunos “descubram”, isto é, simplesmente desenvolvam conceitos matemáticos a partir deles. Nas palavras de Lorin e Batista, “Se trabalharmos com esses objetos como portadores de conceitos matemáticos que serão “descobertos” pelos alunos, quando forem manipulados por estes, incorreremos nessa visão distorcida de Matemática” (2016, p.141). Por outro lado, se incentivarmos a investigação por meio de hipóteses e conhecimentos prévios, para o desenvolvimento de novos conceitos matemáticos com os alunos, é possível que evitemos ou ao menos não contribuamos com essa visão deformada.

A segunda visão deformada é denominada pelos autores de *visão rígida ou dogmática*. Esta visão está relacionada com o método científico, e concebe o mesmo como um conjunto de passos ou etapas a serem seguidas “rigidamente”, isto é, de maneira mecânica, ignorando a criatividade, a tentativa e a dúvida e focando apenas no controle rigoroso dos dados e em tratamentos quantitativos por exemplo. Essa concepção parece ser muito difundida entre os professores, pois nas palavras dos autores nas “entrevistas que temos mantido com professores, uma maioria referiu-se ao ‘método científico’ como uma sequência de etapas definidas, destacando o rigor do mesmo e o caráter exato dos resultados obtidos” (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 130).

Esta visão deformada é evidenciada na matemática pelo *slogan* “A Matemática é exata” de Machado (2011), em que vimos que algumas discussões sobre isso, como as próprias demonstrações da matemática, ou o fato dessa ciência trabalhar com números, ideias essas que reforçam a ideia da matemática “exata” ou “rígida”, mas como vimos podem ser problematizadas quanto isso. Ainda sobre essa visão, Lorin e Batista tratam do rigor matemático, que faz parte da axiomatização e da formalização da Matemática, “uma hipótese explicativa possível é que essa característica do conhecimento matemático produza uma visão distorcida e também a crença de que Matemática é exata e infalível” (2016, p.143), porém os autores fazem uma ressalva, de que esse “rigor” depende do seu domínio de abrangência. Por exemplo é amplamente difundido que soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º, porém isto só é verdade no domínio da geometria euclidiana, basta tomarmos um triângulo qualquer sobre a esfera e somarmos seus ângulos internos, para que essa “verdade” ou “exatidão”, seja verificada como falsa.

A próxima visão deformada está ligada à anterior e a própria história da ciência, esta foi chamada de *visão aproblemática e ahistórica*. Esta visão trata a respeito da transmissão dos conhecimentos científicos, por exemplo quando esse processo ocorre sem apresentar os problemas ou perguntas que originaram determinado conhecimento, ou ainda quando não apresenta a "história" desse conhecimento, isto é, sem tratar seu surgimento, sua evolução e/ou as dificuldades encontradas. De acordo com os autores essa concepção é transmitida por omissão, tanto por professores quanto os livros texto, pois ao introduzirem um conteúdo os mesmos “não fazem referência aos problemas que estão na origem da construção de tais conhecimentos” (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 131).

Quanto a esta visão deformada na Matemática Lorin e Batista (2016) sugerem que esta pode ser resultado da crise dos fundamentos da Matemática. Tal crise teve seu ápice no final do século XIX, e se originou da tentativa de matemáticos, lógicos e filósofos de buscar bases mais sólidas para a matemática e livra-la de qualquer influência externa, pois esta teve sua fundamentação teórica abalada por outras formas de compreender o espaço, por meio de outras geometrias. Durante essa crise a matemática passa então por um “desligamento da realidade”, favorecendo o *slogan* da “Matemática é abstrata” de Machado (2011). Como vimos a matemática é facilmente classificada como abstrata, quando levamos em consideração a sua dimensão material, porém tal classificação acaba gerando ideias negativas a respeito dessa ciência, como por exemplo a ideia de não lidar com “problemas reais”, ou de não ter história e somente trabalhar com a “matemática atual”. Assim concordamos com Lorin e Batista de que “a tentativa de desligamento da Matemática de sua epistemologia” gera “essa visão distorcida da matemática” (2016, p. 144).

A quarta visão deformada foi denominada de *visão exclusivamente analítica*, e trata da divisão em parcelas dos estudos em seu caráter limitante e simplificador. Essa visão é transmitida ao não se fazer a unificação ou a construção de corpos de conhecimentos cada vez mais amplos, ou ao não tratar os “problemas-ponte” entre diferentes campos de conhecimento. Essa concepção foi uma das menos mencionada nas pesquisas dos autores, tanto nas entrevistas como nas investigações, e talvez isso “se deva ao fato das propostas de tratamento interdisciplinar e, inclusive, do ensino integrado das ciências, terem sido amplamente difundidas e parecerem gozar de uma boa aceitação (pelo menos verbal) junto dos professores” (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 132).

Essa visão aborda algo bem conhecido entre os professores, o ensino separado por “caixinhas”, como apontam Lorin e Batista (2016). De acordo com esses autores essa visão deformada pode ser vista quando um conteúdo é ensinado de forma separada ou desconectada de outros conteúdos ou outras formas de conhecimento. Por exemplo, na matemática isso ocorre quando o professor trata de apresentar toda uma série de teoremas ou conceitos de matemática de forma isolada e individualizada, sem apresentar as relações entre eles, isto é, sem apresentar as demonstrações ou as conexões entre as proposições que dão origem a esses resultados, ou quando não apresentam aplicações em outras áreas do saber desses mesmos resultados. Assim concordamos com Lorin e Batista, quando afirmam que essa forma de ensino se torna obsoleta “caso não haja preocupação em reorganizar cada um desses conceitos específicos num contexto geral, de modo que possam ser reunificados e interligados, produzindo significados relevantes para o aluno” (2016, p. 145). Com essa “fragmentação” do conhecimento matemático juntamente com concepção ahistórica da visão anterior, se origina a metáfora de que a matemática se assemelha a um muro de tijolos, onde cada novo “tijolo de conhecimento” só pode ser colocado sobre um outro, de forma continua e alinhada. Essa metáfora é problematizada na próxima visão deformada.

A quinta visão deformada denominada *visão acumulativa de crescimento linear*, também foi pouco mencionada nas pesquisas dos autores. Esta visão trata a respeito de como o conhecimento científico se desenvolve, transmitindo a ideia de um crescimento linear, sempre acumulativo e ignorando as crises e reformulações que incorreram sobre o mesmo. Essa visão é semelhante a visão rígida no sentido de serem “simplificações” a respeito da ciência, porém devem ser entendidas como distintas, pois enquanto a visão rígida ou algorítmica trata de como se concebe e se realiza uma investigação científica, a visão acumulativa trata sobre a evolução da ciência (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 132).

Sobre essa visão sobre o desenvolvimento científico sempre contínuo e linear, temos que essa temática já foi discutida na segunda metade do século passado por diversos epistemólogos, como Thomas Kuhn, Inre Lakatos, Karl Popper e Paul Feyerabend (LORIN; BATISTA, 2016, p. 146). Aqui evidenciamos Thomas Kuhn (1998), em seu livro “As estruturas das Revoluções Científicas”, o autor apresenta uma forma de entender o desenvolvimento científico de maneira não exclusivamente linear e acumulativo. Voltaremos a tratar de Kuhn e de sua teoria, bem como algumas de suas afirmações, mais à frente no decorrer dessa seção.

Ainda sobre essa visão concordarmos com a afirmação de Lorin e Batista de que “Quando um professor apresenta outras formas de compreender o processo de construção do conhecimento matemático, que não seja apenas como o descrito pela metáfora de tijolos sobrepostos, vai ao encontro da dinamicidade que se apresenta no dia a dia da sala de aula” (2016, p. 146). Assim evidenciando as diferentes formas de pensar, que não ocorrem somente por acumulação e linearmente, mas acontece por meio de erros e acertos, reformulações e debates entre diferentes pensamentos, e a próxima visão deformada vem justamente tratar sobre este último item.

A penúltima visão denominada de *visão individualista e elitista* é uma das mais mencionadas nas pesquisas e entrevistas realizadas pelos autores. Essa visão transmite a ideia de que o trabalho científico é realizado por gênios isolados ignorando o papel do trabalho cooperativo e de intercâmbio de ideias entre pesquisadores. Nas palavras dos autores essa visão é a que reforça a ideia que “o trabalho científico é um domínio reservado a minorias especialmente dotadas, transmitindo-se assim expectativas negativas à maioria dos alunos, com claras discriminações de natureza social e sexual” (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 133), ou seja, a ciência seria essencialmente algo para homens brancos da Europa.

Quando relacionamos essa visão deformada a matemática, lembramos de frases como “Matemática é coisa de louco” ou “Que sabe matemática, já nasce sabendo”, que exemplificam a caricatura ora “excêntrica” ora “genial” das pessoas que lidam com a matemática (LORIN; BATISTA, 2016, p.147). Essas caricaturas fazem com que os alunos muitas vezes não se identifiquem com os que trabalham com matemática, por julgarem que “não nasceram para isso”. Assim essa visão deformada pode ser exemplificada na matemática pelo *slogan* “A capacidade para a matemática é inata” de Machado (2011), que como vimos pode possuir sentidos distintos a depender da noção atribuída ao termo “inato”. Tal *slogan* acaba por fazer a identificação da matemática com o inato particular, isto é, para poucos, algo que não contribui para o ensino, nas palavras de Lorin e Batista, “A individualização do conhecimento matemático não contribui para uma discussão coletiva de produção de conhecimento e vai à contramão de atividades coletivas, recomendadas para o trabalho em sala de aula” (2016, p.147).

A sétima e última visão deformada apresentada pelos autores se trata da *visão socialmente neutra*. Esta visão ignora as relações entre ciência, tecnologia e sociedade, reforçando a ideia de uma ciência “acima do bem e do mal”, isto é, indiferente do seu papel na sociedade. De acordo com os autores, embora as mídias estão dando cada vez mais atenção para problemas causados por determinados desenvolvimentos científicos, "temos podido constatar que uma elevada percentagem de professores não tem em consideração essa dimensão da atividade científica” (GIL PÉREZ et al., 2001, pg. 133).

Quanto a relação entre essa visão e a matemática Lorin e Batista (2016, p. 148) retomam a crise dos fundamentos da matemática, e afirmam que na tentativa de “limparem” a matemática da qualquer influencia externa, acabaram por eliminar o caráter social dela, tornando-a socialmente neutra. Assim essa visão de ensino descontextualizado e sem relação com a sociedade acaba “servindo como “desculpa” para professores que se negam a estabelecer relações entre os conceitos matemáticos e situações cotidianas” (LORIN; BATISTA, 2016, p.148).

Assim, essas são as sete visões deformadas apresentadas por Gil Pérez et. al., é importante relembrarmos que estas não são as únicas e também não são necessariamente encontradas de forma individualizada, existindo outras visões, bem como, redes de ligações entre elas. Tais visões nos permite analisar as inserções da história da matemática encontradas nos livros didáticos, pois assim como Lorin e Batista acreditamos que a “História e a Filosofia da Ciência, e em específico da Matemática, têm papel fundamental" para "a compreensão da natureza do conhecimento matemático e a sua contribuição na formação de professores" (2016, p. 140), e consequentemente na dos alunos. Assim tais visões acabam servindo de parâmetro tanto para aquilo que se deve evitar, como para aquilo que se deve incentivar, tendo em vista as inserções que concebem ideias contrárias às das visões distorcidas.

Vamos agora apresentar as ideias do epistemólogo Thomas Kuhn (1998), ideias essas, que como já mencionamos, abordam sobre o desenvolvimento científico, bem como, sobre a história das ciências. Tomaremos como base a obra "Estruturas das Revoluções Científicas" (KUHN, 1998), nela Kuhn apresenta a sua teoria a respeito do desenvolvimento científico que se dá por meio daquilo que o autor denota por revoluções científicas. Neste mesmo texto Kuhn discorre a respeito da história das ciências pois para ele, é a partir dessa que as sociedades comum e científica tendem a criar as suas concepções a respeito do desenvolvimento científico. Cabe aqui comentar que a teoria e os trabalhos de Kuhn se destinaram as ciências ditas naturais ou experimentais, ou seja, Kuhn não inclui a matemática em seus trabalhos, porém outros pesquisadores como por exemplo Lorin (2009), já mostraram que a teoria das revoluções científicas de Kuhn pode ser também aplicada a matemática.

Sobre a história das ciências Kuhn (1998, p.19) afirma também que essa deve ser vista como algo para além de "anedotas e cronologias", pois isso pode contribuir para mudar a visão linear e acumulativa comum a respeito do desenvolvimento científico (visão essa classificada como deformada por Gil Pérez et. al. como vimos acima). Quanto ao uso da história das ciências em materiais e obras acadêmicas, como o livro didático, isto deve ser feito com cuidado para não reforçar a concepção do desenvolvimento científico puramente por acumulação.

Com isso Kuhn (1998, p.21) sugere que "talvez a ciência não se desenvolva pela acumulação de descobertas e invenções individuais", e sobre esse pensamento que se desenvolve a teoria de Kuhn. O autor sugere que os primeiros passos da ciência ocorrem por meio de competições entre concepções "científicas", na medida que seguem de alguma forma o método científico, e que se diferenciam por aquilo que Kuhn denota por *incomensurabilidades*, que são em essência "[...] suas maneiras de ver o mundo e nele praticar a ciência" (1998, p. 22).

Como resultado dessa competição a comunidade científica escolhe a concepção que melhor responde a algumas perguntas universais, pois para ele sem respostas para essas perguntas a pesquisa científica dificilmente começa. A próxima fase no desenvolvimento científico é denominada de ciência normal, na qual de acordo com Kuhn, a ciência se desenvolve por acumulação e são definidos os *paradigmas*. Kuhn (1998, p. 30) os caracteriza como sendo as realizações sem precedentes e suficientemente abertas para permitir diversos tipos de problemas para serem resolvidos por essa comunidade.

Tais problemas acabam sendo classificados em dois tipos, os que podem ser resolvidos dentro dos modelos e regras do paradigma, e os que não. Assim, esses problemas do segundo tipo revelam aquilo que Kuhn (1998, p. 24) denomina de *anomalia*. Quando os cientistas se deparam com tais anomalias é quando eles começam a realizar pesquisas extraordinárias, e isso os conduz para uma nova base, regras e modelos, isto é, um novo paradigma (KUHN, 1998, p. 25).

Nessa etapa acontece, o ponto chave da teoria de Kuhn, o que ele denomina de *revoluções científicas* e são durante estas que os cientistas acabam sendo forçados a rejeitar uma teoria anterior, a fim de aceitar uma nova, sendo essas duas incompatíveis (1998, p. 25). Com a adoção de uma nova teoria e de novos paradigmas por mais particulares que sejam acabam por repercutir em trabalhos concluídos anteriormente. “É por isso que uma nova teoria, por mais particular que seja seu âmbito de aplicação, nunca ou quase nunca é um mero incremento ao que já é conhecido” (KUHN, 1998, p. 26), com isso Kuhn mostra que o desenvolvimento científico pode ocorrer de modo não linear e acumulativo.

Kuhn também possui algumas críticas a respeito da forma como as revoluções científicas e a história da ciência aparecem nos manuais científicos, que podemos entender como os livros didáticos de hoje. Para ele, a imagem que os cientistas e leigos possuem da atividade científica vem principalmente de materiais que disfarçam a existência e o significado de tais revoluções (KUHN, 1998, p. 174).

Kuhn (1998, p.175) diz que “É característico dos manuais científicos conterem apenas um pouco de história”, seja na forma de um texto inicial ou final, ou mais frequentemente, “referências dispersas aos grandes heróis de uma época anterior”, assim limitando a imagem que as pessoas têm da história da ciência. E que por meio de seleção e em parte por distorção, os manuais científicos representam os cientistas de épocas anteriores como se tivessem trabalhado com os mesmos problemas fixos da mais recente teoria (KUHN, 1998, p. 176).

Para Kuhn (1998, p. 177), as revoluções científicas e as mudanças de paradigmas que ocorrem na história da ciência são disfarçadas nos livros didáticos, e com isso escondem o processo que está na raiz do desenvolvimento científico, que são as revoluções científicas as tornando invisíveis. Um dos focos dos livros didáticos, é apresentar para o estudante os paradigmas vigentes do período de ciência normal contemporâneo e tendem a fazer isso de maneira rápida. Quanto a isso, Kuhn afirma que “essa técnica de apresentação está acima de qualquer crítica", mas combinando isso com a atmosfera ahistórica desses materiais, os mesmos passam a impressão de que desde "a ciência alcançou seu estado atual através de uma série de descobertas e invenções individuais, as quais, uma vez reunidas, constituem a coleção moderna dos conhecimentos técnicos" sugerindo assim que os cientistas abordam desde de sempre os mesmos problemas.

Portanto, como vimos nas discussões acima, dos *slogans* de Machado (2011), das visões deformadas de Gil Perez et. al. (2001), as aproximações e afirmações de Lorin e Batista (2016) e da teoria de Kuhn (1998), as formas como entendemos as ciências e suas histórias e desenvolvimentos, em especial da matemática, influenciam na nossa concepção sobre elas. Assim se justifica analisarmos as inserções de história da matemática para discutirmos as influências dessas na disseminação dessas, falas, ideias e visões, enfim dessas concepções a respeito da matemática.

Na seção seguinte abordamos um pouco mais sobre o livro didático e motivações para a sua análise, como por exemplo as suas diversas faces. Na mesma seção trazemos uma revisão bibliográfica sobre pesquisas brasileiras que tratam da abordagem da história da matemática nos livros didáticos.

3 A ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

No Brasil, a ideia de se ter um livro didático ocorreu somente em 1938 quando o Decreto-Lei nº 1.006, de 30/12/38 institui a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) estabelecendo a primeira política de livro didático. Em 1966 foi realizado um acordo entre o Ministério da Educação e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID) de forma a criar a Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED) contribuindo para distribuir 51 milhões de livros em 3 anos. (BRASIL, 2023). Essa parceria durou até 1971 quando foi desenvolvido o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental. Cinco anos depois, o governo passou a comprar livros com o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), que durou até 1983 quando foi instituída a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE). Assim, somente em 1985 que foi instituído o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Entre os principais destaques desta política estão a escolha do livro pelo professor, reutilização em outros anos, oferta a todos os alunos do Ensino Fundamental e sua aquisição com recurso federal (FREITAS; RODRIGUES, 2019).

O uso do livro didático por professores e educadores vem transformando o livro em um poderoso material que contribui (ou não) no processo de ensino. Atualmente, ele é indispensável dentro da sala de aula, pois auxilia os professores nos processos de ensino e aprendizagem de todas as disciplinas. Além disso, os livros didáticos são objetos conhecidos da sociedade, uma vez que boa parte da população já tenha entrado em contato com esse material de alguma forma, por exemplo os estudantes que estão em contato direto com esse material ou seus pais e avós que talvez não tenham tido contato com os livros, mas agora têm acesso a esses por meio dos seus filhos e netos. Além disso na realidade brasileira, muitas famílias tem apenas no livro didático sua fonte de material escrito de leitura em casa, sendo este um dos principais acessos à cultura e à informação (SANTOS, 2021). Pois os livros didáticos são "o instrumento adequado para a transformação da mensagem científica em mensagem educativa" (SAVIANI, 2007, p.111), sendo essa uma das suas principais funções, tratar do conhecimento científico de forma educativa.

A partir da compreensão da necessidade e da importância que o livro didático poderia propiciar à educação como um todo, seu uso acabou passando a ser obrigatório em escolas da Educação Básica. Dessa forma, Choppin (2004, p.552) destaca que deve ser considerada "[…] a complexidade do objeto "livro didático", a multiplicidade de suas funções, a coexistência de outros suportes educativos e a diversidade de agentes que ele envolve" (CHOPPIN, 2004, p. 552). Isso porque o livro é um material bastante pertinente e multidisciplinar com a capacidade de mobilizar os rumos que o processo de ensino pode tomar.

Assim, o livro didático tem múltiplas faces que podem ser utilizadas dentro e fora da escola, por alunos e outros interessados. Dentre as possibilidades, chamamos a atenção para a comercialização do livro didático, uma vez que, com a obrigação da sua utilização, o governo reserva uma grande quantia em dinheiro para fazer esse investimento, o que acaba proporcionando uma comercialização entre as editoras. Ou seja, também existe um mercado para a sua distribuição que pode não estar associada somente ao desenvolvimento de um material de qualidade, mas também à aspectos financeiros. Desta forma, ele tem se tornado objeto de estudo de inúmeros pesquisadores que visam a entendê-lo e compreender o seu uso.

Uma outra face é apontada por Salis e Costa (2018, p. 49) que comentam que "[...] o protagonismo do livro na sala de aula, muitas vezes é o único material disponível para o aluno, somado à forma de como o professor se apropria dele para ministrar as aulas, geram, também, uma dependência do aluno com relação a esse material". Nesta linha de pensamento se desenvolve a "tradição do uso do livro didático", na qual o uso dos livros didáticos em sala se torna obrigatório e independem da vontade dos professores. Com isso criamos a imagem do professor sempre segurando ou utilizando um livro, e que o uso desse livro deve sempre seguir o ritmo imposto pelo professor no decorrer do ano letivo, pois esta seria a forma de se aprender com este material.

Quanto à utilização do livro didático como um "manual para as aulas", isso acaba limitando o professor que acaba por virar um repassador de conteúdo do livro didático (frente ao novo cenário no Paraná, por exemplo). Nesse sentido, apesar do livro didático ser importante, é essencial que o professor tenha sua autonomia preservada e possa utilizar o material da melhor forma, inclusive se amparando em outros materiais pedagógicos utilizados em conjunto. Esta reflexão é essencial para uma construção de uma educação mais crítica por todos. A intenção não é ter o livro didático como fim do conteúdo, mas aprendermos a pensar sobre determinado fato, ou conhecimento contido no livro, de forma que possamos compreender melhor sobre aquilo. Assim, compreendemos que o livro didático pode transformar a visão de mundo das pessoas que o utilizam, propiciando um senso mais aguçado e crítico, conforme o material que nele é trabalhado.

A última face do livro didático que vamos abordar com mais atenção é quanto ao seu uso como material base para pesquisas científicas. Aqui, principalmente, destacamos sua utilização em pesquisas do tipo bibliográfica e documental, em que o objeto de estudo em questão é o livro didático (sendo esse o tipo de uso que foi feito pelo pesquisador nesta dissertação). Os livros são materiais riquíssimos que guardam a interpretação da sociedade sobre um determinado tempo, sobre um determinado conteúdo, principalmente quando a pesquisa quer voltar ao passado para compreender como era aquela época.

No entanto, entendemos que é pertinente destacar a diferença entre a pesquisa documental e a pesquisa bibliográfica. Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p. 6) apontam que:

> A pesquisa documental é muito próxima da pesquisa bibliográfica. O elemento diferenciador está na natureza das fontes: a pesquisa bibliográfica remete para as contribuições de diferentes autores sobre o tema, atentando para as fontes secundárias, enquanto a pesquisa documental recorre a materiais que ainda não receberam tratamento analítico, ou seja, as fontes primárias. Essa é a principal diferença entre a pesquisa documental e pesquisa bibliográfica (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009, p. 6).

Desta forma, constatamos que a diferença entre esses dois tipos de pesquisa se dá pelo tipo de fonte. A pesquisa bibliográfica analisa fontes secundárias, isto é, o que diferentes autores dizem sobre um tema, ao passo que a pesquisa documental analisa fontes primárias, ou seja, analisa textos de forma independentes e que não passaram por alguma análise. Assim, é possível compreendermos melhor como vem sendo desenvolvido as pesquisas nestas perspectivas.

Moreira (2012) fez um mapeamento sobre o uso do livro didático como fonte de pesquisa na área de história da educação. A autora destaca que a utilização do livro nas pesquisas tende a ser, em sua maioria, nas disciplinas de história e português. Além disso, também há seu uso nas pesquisas de formação de professores.

Na mesma linha de pensamento, Emmel e Araújo (2012) analisaram de modo quantitativo as pesquisas que foram desenvolvidas com o livro didático no Brasil de 1999 a 2010. Os autores destacaram que no Sudeste se encontra a maioria das universidades polos que enfatizam a discussão sobre o livro didático. Além disso, a preocupação maior está ligada ao Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Os autores também destacam a existência de pesquisas sobre o livro didático em diversas áreas do saber, como por exemplo, matemática, química e geografia.

Freitas e Rodrigues (2008) buscaram estudar a história do livro didático ao longo do tempo, de forma a investigar o papel mediador entre a criança e o conhecimento em relação ao visual didático do livro. Os autores destacam a importância atribuída às imagens presentes nos livros didáticos, com um papel menos “decorativo” e mais “ilustrativo” no sentido de contribuir e/ou complementar o texto, porém ressaltam que a comunicação visual dos livros, como sua apresentação do conteúdo e formas de organização, pode ser mais bem explorada.

A Matemática constitui-se como uma das disciplinas que mais utilizam o livro didático, uma vez que os exercícios que são frequentemente usados pelos professores nesta disciplina estão no referido material disponíveis e elencados com os conteúdos a serem trabalhados, devidamente separados.

Stascovian e Almeida (2018), buscando verificar como o livro didático pode ser utilizado como fonte de pesquisas documentais no campo da Matemática, analisaram um manual pedagógico de 1965. Os autores destacam que o livro analisado “Escola Viva: Metodologia do Ensino Primário” do Professor Afro do Amaral Fontoura do ano de 1965 se constitui como um recurso bastante importante, rico em informações e sugestões metodológicas e que auxiliou a formação de professores da época.

Steindel, Feldman e Silva (2016) fazem um estudo apontando reflexões sobre os desafios que o livro didático tem como fonte de pesquisa, memória e história, em tempos de uso da internet, em uma sociedade da informação. Em específico, os autores falam a respeito dos arquivos didáticos que ficam presentes nas instituições, que são pouco utilizados, e apesar dos livros presentes nas bibliotecas das escolas, as mesmas não possuem mapeamento adequado de seus acervos, o que contribui para uma desvalorização dos livros didáticos como fontes.

Nesse sentido cabe a nós fazermos um bom uso do livro didático, proporcionando assim, um ensino de qualidade. As bibliotecas têm um papel essencial pois detêm um quantitativo significativo de material que pode ser utilizado assim como os livros didáticos. Verifica-se assim, a utilização do livro didático como fonte de informação em pesquisas de fontes históricas. Assim, o livro didático se torna uma fonte histórica com inúmeras possibilidades, uma vez que é um material rico, que constitui uma determinada época apresentando o conhecimento presente naquele tempo.

Com isso, o livro didático se torna uma “caixa do tempo”, uma vez que nele podem ser encontrado quais eram os conhecimentos que se tinham até determinado tempo e quais eram os conhecimentos que eram ensinados e nesse sentido, é possível conhecer melhor a educação de uma determinada época.

Os autores aqui discutidos apontam a importância do uso do livro didático como fonte histórica, trazendo como ocorreu o passado e, assim, informando sobre o conhecimento constituído pelos povos em seu tempo. Essa discussão se torna bastante importante para compreender como se deu o conhecimento em cada período, bem como, qual era o conhecimento pertinente em cada época. É importante lembrarmos que existe uma ampla discussão sobre fontes históricas e que o livro didático não pode ser utilizado como fonte única para a verdade.

Nos subtítulos seguintes trazemos uma revisão bibliográfica de pesquisas brasileiras que tratam da abordagem da história da matemática nos livros didáticos. Desde a seleção dos textos analisados, passando por discussões de pontos em comum desses trabalhos, até a apresentação de algumas reflexões sobre tais pesquisas.

3.1 O QUE DIZEM AS PESQUISAS BRASILEIRAS?[1]

A história da matemática nos últimos anos vem sendo estudada e utilizada para fins educacionais e recomendado por documentos oficiais, razão para a sua presença nos diversos livros didáticos. Os livros didáticos são distribuídos de forma gratuita em escolas públicas brasileiras por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e, por essa razão, torna-se um material de uso comum por muitos docentes e estudantes. Cabe destacar que quaisquer materiais didáticos "[...] não anulam a participação docente ativa nesse processo" (SOUZA; MÜLLER, 2022, p.464), tanto na escolha quanto no uso desses materiais. Nesta seção, voltamos nossa atenção para aspectos que foram enfatizados em pesquisas brasileiras a respeito de abordagens utilizando história da matemática em livros didáticos.

Silva e Aires (2021) apresentam uma análise de livros didáticos, nesse caso de Biologia, para investigar as concepções acerca da natureza da ciência. Dentre os resultados, os autores destacam que, se por um lado há uma melhora no "[...] enfrentamento das visões ingênuas sobre a ciência [...]" (p. 323), por outro, ainda são identificados livros didáticos com informações históricas incorretas e "o predomínio da concepção de ciência neutra" (p. 324).

Em nosso caso, investigamos textos recentes relacionados com a temática dos livros didáticos de Matemática e a presença da história nesses. Nosso objetivo foi de entender a relação entre a história da matemática e os livros didáticos a partir de uma pesquisa bibliográfica. Pretendemos, dessa forma, contribuir com outras pesquisas afetas ao tema ou, ainda, servir de parâmetro para professores e alunos de graduação em suas análises e escolhas de livros didáticos.

---

[1] Essa seção foi submetido na forma de artigo para a revista Insignare Scientia.

A utilização da história da matemática nos processos de ensino e aprendizagem é recomendada em documentos oficiais a nível nacional e estadual. A título de exemplo, está presente nas “Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio”, que indica que a história da matemática permite que os alunos “[...] percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído” e que entendam “[...] a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico” (BRASIL, 2006, p. 69). Ou ainda nas Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) do Paraná, que entendem que a história da matemática “deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática” (PARANÁ, 2008, p. 66).

A respeito da importância da história da matemática, D’Ambrósio (2008) afirma que “não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância” (p. 29), pois permite compreender como as teorias e ideias matemáticas surgiram e se desenvolveram com o passar do tempo (D'AMBROSIO, 2008, p. 30).

Para Radford (2011), uma das maneiras conhecidas do uso da história da Matemática é por meio de anedotas históricas, entretanto, “outra maneira é ver a história da Matemática como um imenso arsenal de problemas ordenados cronologicamente para serem ‘importados’ para a sala de aula e fazer com que os alunos os resolvam” (RADFORD, 2011, p. 73).

A abordagem adequada da história da matemática nos livros didáticos pode contribuir para uma imagem menos deformada dessa ciência. Dizemos isso baseando-nos em Pérez *et al* (2001), que se referem de maneira geral ao trabalho científico e apresentam a importância de se estabelecer um consenso a respeito de uma visão aceitável do trabalho científico. Não é incomum encontrarmos simplificações e deturpações acerca de como alguns conceitos foram desenvolvidos na matemática. Nesse sentido, segundo os mesmos autores, é preciso um esforço conjunto para evitar tais deformações da imagem científica, e em específico, concordamos que é preciso evitar tais deformações acerca da matemática.

Quanto à organização desta seção, na subseção seguinte abordamos nosso percurso metodológico, nossos critérios para o levantamento da bibliografia online, ou seja, artigos científicos publicados em periódicos nacionais em Português, que satisfizeram nosso objetivo de pesquisa. Por meio da leitura desses materiais, identificamos três temas comuns aos textos e que serão melhor explicados na sequência.

Nas subseções seguintes, abordamos individualmente os temas destacados anteriormente: no primeiro tema apresentamos o que os autores destacam como motivos à presença da história da matemática em sala de aula e em especial nos livros didáticos; no tema seguinte abordamos as classificações elaboradas sobre as inserções da história da matemática nos livros didáticos quanto aos seus usos e objetivos, isto é, como a história da matemática é apresentada nestes materiais; e no terceiro tema apresentamos textos que tratam da formação dos professores com relação a história da matemática.

Por fim, no último subtítulo, apresentamos nossas reflexões a respeito dos temas apresentados, quando fazemos uma síntese dos tópicos e nosso exercício de responder ao problema de pesquisa.

3.2 SOBRE A SELEÇÃO DOS ARTIGOS

Esta investigação se deu por meio de um levantamento em periódicos brasileiros por artigos que tratam a respeito da história da matemática nos livros didáticos. Sendo assim, caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica. Tomamos como base Gil (2002), o qual afirma que a pesquisa bibliográfica se baseia em material já elaborado e publicado, como artigos científicos e livros. O autor também afirma que, embora todas as pesquisas precisem de algum estudo nesses materiais para embasar as discussões, as pesquisas do tipo bibliográfica se desenvolvem exclusivamente a partir desses, tendo-os como objeto direto a ser analisado.

Para este trabalho, escolhemos utilizar artigos científicos escritos em Português, publicados em periódicos brasileiros e que retratassem o contexto de nosso país. Para a seleção dos periódicos, consideramos aqueles divulgados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em seu site[2], considerando a representatividade de tal entidade, bem como a diversidade de periódicos divulgados nesse sítio eletrônico. Além disso, em coerência aos objetivos da SBEM, são divulgados periódicos que veiculam textos acerca da Educação Matemática, foco de nosso estudo. Dentre os periódicos divulgados, selecionamos 24, os quais contemplavam os critérios de serem nacionais e publicarem artigos científicos.

A partir desses periódicos, fomos para a fase de pré-seleção dos artigos. Acessamos o *site* de cada periódico e, por meio das ferramentas de busca fornecidas pelos mesmos, pesquisamos pelo termo “história da matemática”. Quanto ao período de publicação, restringimos a nossa seleção aos artigos publicados de 2011 a 2021, por considerarmos adequado aos nossos objetivos, já que os livros didáticos são continuamente avaliados, gerando assim mudanças nas coleções adotadas pelas escolas dentro do período escolhido.

[2] http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/95-periodicos/117-periodicos - acessado em março de 2022.

Para a primeira seleção, escolhemos os textos que, ou possuíam o termo “história da matemática” ou termos referentes à história da matemática no título como, por exemplo, “O teorema de Thales na história”. Por outro lado, não consideramos os textos que tratavam da “história da educação matemática”, ou história de algum curso específico de matemática”. Essa etapa foi feita a partir da leitura individual de cada título, sendo que obtivemos ao todo 61 artigos.

Para a segunda seleção e restrição dos artigos, foi realizada a leitura dos resumos. Nessa etapa, decidimos pela delimitação dos objetivos apresentados nesses resumos, e escolhemos aqueles que, de alguma maneira, estavam aliados ao nosso problema de pesquisa. Assim, selecionamos aqueles textos que tinham alguma relação com os livros didáticos e, com isso, restringindo-nos a 22 textos.

A partir de então, realizamos uma nova seleção dentre esses 22 textos, tomando como critério a análise dos resultados desses artigos apresentados nos seus resumos. Além disso, selecionamos somente os textos em que apresentavam o termo “livro didático”, sendo essa última análise feita com a ajuda da ferramenta “Localizar texto” do programa *Adobe Acrobat Reader*. Em resumo, selecionamos aqueles textos que tratavam a respeito da presença ou utilização da história da matemática nos livros didáticos. Dessa forma obtivemos ao todo nove artigos, a partir dos quais a análise foi realizada como nosso *corpus* de pesquisa.

A seguir, apresentamos os nove artigos no formato de um quadro, constituído pelo código de identificação dos textos (de T1 à T9), os autores acompanhados do ano de publicação, o título dos artigos e os recortes dos resultados apresentados nos resumos.

Quadro 1: Relação dos textos analisados

Cód.	Autores (ano)	Título do artigo	Recorte dos resultados
T1	Marcos Luis Gomes (2011)	As Práticas Culturais De Mobilização De História Da Matemática Em Livros Didáticos Destinados Ao Ensino Médio	[...] uma interpretação personalizada dos padrões semióticos pelos quais se teriam pautado alguns autores de livros textos, quando procuraram estabelecer um diálogo com a história da matemática a fim de fazerem-na participar de seus textos didáticos destinados à educação matemática escolar.
T2	Rosa Lúcia Sverzut Baroni, Marcos Vieira Teixeira, Sergio Roberto Nobre (2011)	História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM	[...] apresenta resultados de pesquisa que apoiam a compreensão a respeito das concepções de professores sobre o uso da História da Matemática em sala de aula; do material sobre História de Matemática acessível ao professor; da presença da História da Matemática em livros didáticos; das propostas da introdução dos números reais via medição; e da disciplina de Análise em cursos de formação de professores.

T3	Iran Abreu Mendes (2013)	História No Ensino Da Matemática: Trajetórias De Uma Epistemologia Didática	[...] organizar e encaminhar uma proposta prática de relações entre História e Educação Matemática que priorize a investigação histórica como um princípio de ensino, de aprendizagem e de socialização do conhecimento matemático.
T4	Ana Carolina Costa Pereira, Daniele Esteves Pereira (2015)	Ensaio Sobre O Uso De Fontes Históricas No Ensino De Matemática	[...] algumas discussões sobre o uso de fontes históricas no ensino de matemática perfazendo alguns conceitos e aplicações voltados para a sala de aula.
T5	Ana Carolina Costa Pereira (2016)	O Teorema De Thales Ao Longo Da História: Percepções Encontradas Em Alguns Livros Didáticos Do Século XX	[...] percebeu-se que a maioria dos livros didáticos selecionados na pesquisa apresentou o teorema de Thales remetendo a demonstração para o caso em que os segmentos eram comensuráveis.
T6	Elisângela Miranda Pereira Carlini, Mariana Feiteiro Cavalari (2017)	As Funções Didáticas Desempenhadas Pela História Da Matemática Nos Livros Didáticos De Matemática Do Ensino Médio	[...] podemos afirmar que a HM, de modo geral, ainda não está inserida nos livros didáticos da forma que os pesquisadores de História da Matemática e/ou Educação Matemática apresentam como mais profícua. Entretanto, destaca-se que, em comparação com estudos anteriores, podemos afirmar que já há um indicativo nos livros didáticos de maior adequação desta utilização com relação ao apontado pela referida literatura.
T7	Jaqueline Zdebski da Silva Cruz, Dulcyene Maria Ribeiro (2018)	História Da Matemática Na Construção De Concepções Equivocadas Em Sala De Aula: Reflexões Acerca Das Pseudo-Histórias	[...] as reflexões sobre o uso da História da Matemática e evidencia-se a importância de que o professor reconheça suas visões sobre o trabalho científico e o conhecimento matemático, para que tenha uma postura mais crítica sobre os conhecimentos a serem ensinados.
T8	Wilza Maria Adão Lopes Teixeira, Aline Caetano da Silva Bernades (2021)	História Da Matemática Em Livros Didáticos De Matemática Dos Anos Finais Do Ensino Fundamental	[...] visando classificar as inserções de acordo com os tipos de narrativa histórica e as funções didáticas das inserções. Foram encontradas 219 inserções nas 3 coleções analisadas. Entre os resultados iniciais, destacamos a menção de 137 diferentes personagens, dentre os quais, apenas 2 mulheres foram citadas.
T9	Cleber Haubrich, Marcello Amadeo (2021)	História Da Matemática Nas Coleções Do PNLD 2018	[...] traz um relato dos dados coletadas num estudo preliminar envolvendo três livros, algumas tendências nas respostas obtidas, dificuldades observadas na tarefa da coleta e reflexões levantadas após a conclusão do estudo preliminar.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Realizada a seleção dos textos, especificamente em relação aos resultados das pesquisas destacados nos resumos desses, passamos para a definição de temas com os quais pudéssemos discutir tais resultados, evitando assim um olhar somente descritivo em detrimento de outro, mais representativo da coletividade dos textos. Para isso, agrupamos os textos em torno de temas que foram comuns a pelo menos 5 (cinco) dos 9 (nove) textos, sendo esse o nosso critério adotado.

Os temas pelos quais seguiremos as discussões nos próximos subtítulos, e que dão nome a esses, são: m*otivos à presença da história da matemática nos livros didáticos* (contemplado em: T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9); c*omo é apresentada a história da matemática nos livros didáticos* (contemplado em: T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9); e *a formação dos professores com relação a história da matemática* (contemplado em: T1, T2, T3, T4, T7).

Nos subtítulos seguintes, vamos apresentar e discutir os temas, utilizando citações dos próprios textos analisados, bem como outros materiais que contribuem com as leituras, interpretações e discussões.

3.3 MOTIVOS À PRESENÇA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste item, vamos abordar o tema que emergiu como um dos primeiros de todos os textos analisados, que trata dos motivos para utilizar a história da matemática em sala de aula, em especial nos livros didáticos. Esse tema se torna essencial para nós, na medida em que entendemos que é difícil falar da relação entre a história da matemática e livros didáticos, sem tratar a respeito da presença (ou ausência) da primeira no segundo.

Com a leitura dos textos, percebemos uma concordância entre todos a respeito de que a presença ou inclusão da história da matemática nos livros didáticos é um aspecto positivo, uma vez que todos apresentam um discurso favorável a isso. E é a respeito desses discursos e os argumentos usados sobre os quais vamos discorrer aqui.

Quando falamos em história da matemática, existem diversas concepções a respeito, mas concordamos com a concepção apresentada pelas autoras Pereira e Pereira no texto T4, que compreendem a história da matemática como uma “aproximação entre a Matemática do passado e a compreensão dessas com os conceitos matemáticos desenvolvidos em diversas civilizações, fazendo comparações entre os métodos e a relação de como atualmente é estudado pelo aluno” (2015, p. 66). Com essa ideia, as autoras, apresentam uma das principais vantagens acerca do uso da história da matemática, a de podermos fazer relações e comparações entre as matemáticas do passado e da atualidade, pensando no ensino e na aprendizagem.

Temos (como apresentado por Gomes no texto T1 e por Carlini e Cavalari no texto T6) que elementos relacionados com a história da matemática são indicados para o ensino da matemática por documentos oficiais como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, entre outros. Os autores Cruz e Ribeiro do texto T7 sugerem que essas indicações seguem dos diversos estudos, pesquisas e trabalhos apresentados em eventos, que tratam a respeito das vantagens da utilização da história da matemática (2018, p. 135). Mas, embora esses trabalhos e estudos sejam em números expressivos, os autores afirmam que os que tratam a respeito de atividades a serem utilizadas em sala de aula que envolvam a história da matemática são ainda minoria.

A respeito das vantagens da utilização da história da matemática, esse foi um dos primeiros e principais pontos apresentados pelos autores. Baroni, Teixeira e Nobre do texto T2 e Pereira e Pereira do texto T4 apresentam uma lista de motivos pedagógicos para a utilização da história da matemática no ensino e, a partir de alguns desses motivos comuns a ambos, podemos fazer relações com os argumentos utilizados pelos outros textos. Nesse sentido que D'Ambrósio (2008) reafirma a importância, sobretudo pelo caráter motivador, em relação ao uso da história da matemática como facilitador do ensino e da aprendizagem em matemática.

Um dos motivos que podemos mencionar é a capacidade de *motivar os alunos* que a história da matemática possui, pois essa apresenta de forma mais cultural e contextualizada a matemática. Afirmamos isso em razão dela apresentar informações como, em quais períodos e/ou em quais regiões, determinado conhecimento se desenvolveu e quais pessoas ou povos contribuíram para tal. Tudo isso mostra para os alunos um caráter mais cultural e/ou social da matemática. Em concordância com os autores Haubrich e Amadeo do texto T9, essas "são discussões fundamentais se quisermos reconstruir a imagem de que a matemática é uma ciência humana como qualquer outra, sujeita a erros e acertos, não tão diferente das demais como se quer acreditar" (HAUBRICH; AMADEO, 2021, p. 200). E isso pode contribuir para que os alunos tenham uma imagem mais humana da matemática e possa motiva-los a fazer matemática, dentro ou fora de sala.

Outro ponto que também contribui com esse primeiro motivo é o da curiosidade/criatividade. Como apresentado por Mendes no texto T3, é possível abordar a história de forma a "dar aos estudantes uma oportunidade de se desafiarem a estabelecer um processo de criatividade matemática na sua aprendizagem diária durante o processo educativo mediado pelo professor" (2013, p. 67). Afinal de contas, entendemos que a curiosidade e criatividade são fatores essenciais para se envolver com a sua própria aprendizagem em Matemática.

Um segundo motivo que mencionamos aqui é o de *ajudar na compreensão do conteúdo pelos alunos,* pois, sabemos que a história pode contribuir para responder alguns dos "Por quês?" e "Para quês?", como é afirmado pelos autores Carlini e Cavalari no texto T6, Teixeira e Bernades no texto T8 e por Haubrich e Amadeo no texto T9. Com a história da matemática, podemos entender um pouco mais e melhor as relações que existem entre os diversos conteúdos ensinados na disciplina de matemática, e isso pode contribuir para que os alunos compreendam essa de maneira melhor, a depender da abordagem do professor.

Cruz e Ribeiro, no texto T7, comentam que "a história pode mostrar que a matemática não se restringe a um sistema fixo de regras e de verdades absolutas, além de mostrar que um resultado relativamente simples segue de uma evolução árdua, gradual e muitas vezes não linear" (CRUZ; RIBEIRO, 2018, p. 134). Isso pode contribuir para que os alunos tenham uma melhor compreensão a respeito da evolução dessa disciplina, e assim, em concordância com as autoras Carlini e Cavalari do texto T6, entenderem "que a Matemática está em constante desenvolvimento e que dúvidas, erros, controvérsias e incertezas são partes integrantes da atividade matemática" (CARLINI; CAVALARI, 2017, p.74). Tal aspecto contribui para desfazer a crença de que a matemática é uma ciência pronta e acabada.

Outro aspecto acerca do motivo de a história da Matemática *ajudar na compreensão* do estudante é apontado por Mendes no texto T3. Nas palavras do autor, "uma abordagem didática investigatória nas aulas de Matemática, apoiada nas informações históricas, pode contribuir na concretização de um ensino e aprendizagem da Matemática com significado" (MENDES, 2018, p. 67). O autor discute a aprendizagem com significado, que pode ser trabalhada com os problemas históricos, que reimaginam a situação problemática dos quais alguns conteúdos surgiram e, com isso, contribuir para a compreensão da matemática pelos estudantes. E isso valoriza a participação da história nos processos de produção de significados, "associados às formas de apropriação de cultura matemática por parte dos estudantes" (GOMES, 2011, p. 438). E com isso vamos em direção ao nosso próximo e último motivo.

Um último motivo que vamos apresentar aqui a respeito da história da matemática diz respeito a sua capacidade de *motivar a interdisciplinaridade*. Como o próprio nome já sugere, relacionamos duas componentes curriculares, sendo elas a história e a matemática, e como Teixeira e Bernades abordam no texto T8, relacioná-las não é tarefa fácil, uma vez que cada uma possui aspectos e objetos de investigação próprios. Além disso, para além dessas duas disciplinas, a maneira como a história da matemática é apresentada pode favorecer a exploração de outras componentes curriculares, como geografia, arte, filosofia, sociologia etc.

Como abordado pela autora Pereira no texto T5, ao usarmos a história para analisarmos um conceito da matemática ao longo do tempo, podemos "revelar mudanças significativas", no que diz respeito a abordagem desse [conceito]" (PEREIRA, 2016, p. 62) articulando com as questões econômicas e sociais do período. E com isso, "contribuir de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nos diversos níveis de ensino" (CARLINI; CAVALARI, 2017, p. 72), uma vez que podemos estudar as diferentes formas pelas quais esse conceito foi abordado ao longo do tempo.

Vamos terminar essa seção apresentando uma questão levantada por Gomes no texto T1 e tangenciada por outros, a respeito da *dificuldade de implementação* do uso da história da matemática nas aulas. Como vimos, a história da matemática é indicada para uso no ensino em documentos oficiais, por diversos motivos, alguns dos quais vimos nos parágrafos anteriores, mas, como apontam Baroni, Teixeira e Nobre no texto T2, os professores encontram dificuldades em aplicá-la em sala de aula.

Existem alguns fatores que contribuem para isso, como por exemplo: o próprio interesse dos alunos, que muitas vezes se torna um obstáculo à parte no trabalho do professor; a falta de materiais adequados, como textos que seguem uma estratégia de ensino, e não apenas transmitem uma informação ou curiosidade cultural, como uma data, um local ou um nome; e também a própria formação dos professores, a qual pode não prepará-los para utilizar a história da matemática de maneira mais adequada a fim de contribuir com sua tomada de decisão em sala de aula em momentos de uso da história, entre outros motivos. Mas vamos abordar um pouco mais a respeito desses dois últimos fatores, dos materiais e da formação dos professores, nos próximos subtítulos.

3.4 COMO É APRESENTADA A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

No tema anterior abordamos alguns motivos para a utilização da história da matemática em sala de aula, e neste vamos abordar a respeito da maneira com que a história da matemática é apresentada ou encontrada no livro didático. Tal material é distribuído de forma gratuita no Brasil aos alunos pelas escolas públicas por meio do Programa Nacional do

Livro e do Material Didático (PNLD). Esse programa foi criado em 1937 com o nome de Instituto Nacional do Livro, e visa a entrega de materiais para as instituições públicas, atendendo desde a Educação Infantil ao Ensino Médio.

Com a leitura dos textos selecionados, identificamos dois grupos. Os do primeiro grupo são os textos que abordam a história da matemática discorrendo sobre a sua utilização em sala de aula e em especial nos livros didáticos, dos quais podemos mencionar os autores Gomes do texto T1, Baroni, Teixeira e Nobre do texto T2, Mendes do texto T3, Pereira e Pereira do texto T5 e Cruz e Ribeiro do texto T7. Os do segundo grupo são os que abordam explicitamente as inserções de história da matemática nos livros didáticos, examinando e classificando essas, sendo que podemos classificar os autores Carlini e Cavalari do texto T6, Teixeira e Bernades do texto T8 e Haubrich e Amadeo do texto T9 neste segundo grupo.

Para iniciar as discussões dos textos, começamos com uma citação de Gomes no texto T1, que afirma que, embora vivamos na era da informação e de acesso à tecnologia computacional, “[...] um dos principais suportes de transmissão e mobilização da informação dita científica ou idônea é ainda o livro”, e que no sistema escolar “o livro didático assumiu e continua assumindo papel central nesse sentido” (GOMES, 2011, p. 434). Concordamos com tal afirmação, pois representa um dos motivos que nos levaram a realizar esta pesquisa, o de o livro didático ter um papel central na discussão do conhecimento científico nas escolas.

O livro didático parece servir como uma boa "base", isto é, uma boa fonte para as pesquisas que buscam discutir sobre qual material o processo de ensino e aprendizagem ocorre em salas de aula. É válido mencionar que este não é o único material didático (e nem deveria ser) que pode ser utilizado pelos professores, mas esse é sem dúvidas um dos mais difundidos.

As autoras Cruz e Ribeiro, do texto T7, alertam que é preciso tomar cuidado com a maneira como a história vem sendo incorporada aos livros didáticos, pois essa pode ocorrer “pelo uso acrítico de informações, anedotas ou mitos relacionados aos conteúdos e aos matemáticos, assim como no “batismo” de algumas teorias pela atribuição equivocada de nomes de determinados matemáticos” (CRUZ; RIBEIRO, 2018 p. 134). Além disso, a abordagem histórica utilizada nos livros pode ser “distorcida, simplificada, ou desconsiderar aspectos sociais, políticos ou econômicos envolvidos” (CRUZ; RIBEIRO, 2018, p. 137). As autoras ainda comentam sobre o uso de histórias carregadas de "deformações sobre a matemática”, e sobre o problema de que o repasse dessas histórias como “estão tradicionalmente nos livros didáticos pode causar nos alunos e professores concepções equivocadas a respeito do conhecimento matemático” (CRUZ; RIBEIRO, 2018, p. 148).

Assim, vemos que é preciso ter cuidado com relação à maneira com que a história é trabalhada nos livros didáticos, pois, sem o devido entendimento ou de reflexões sobre a história da matemática, podemos contribuir com aquilo que Gil Perez denomina de *visões deformadas* da ciência (PÉREZ *et. al.*, 2001). Tais *visões* são concepções sobre as quais existem um certo consenso de que deveriam ser evitadas, como por exemplo: a *visão a-histórica*, que trata a respeito da transmissão dos conhecimentos científicos sem apresentar os problemas ou perguntas que originaram determinado conhecimento, ou ainda quando não apresenta a "história" desse conhecimento, isto é, sem tratar o seu surgimento, sua evolução e/ou as dificuldades encontradas; a *visão cumulativa ou linear*, que trata a respeito de como o conhecimento científico se desenvolve, transmitindo a ideia de um crescimento linear, sempre acumulativo e ignorando as crises e reformulações que incorreram sobre o mesmo; ou ainda a *visão individualista ou elitista*, que transmite a ideia de que o trabalho científico é realizado por gênios isolados ignorando o papel do trabalho cooperativo e de intercâmbio de ideias entre pesquisadores, para citarmos apenas algumas (PÉREZ *et. al.*, 2001).

Na tentativa de discutir o que as pesquisas apresentam acerca das inserções de história da matemática em livros didáticos, apresentamos o que os autores dos textos selecionados trataram, em especial os textos que classificamos como sendo do segundo grupo (Pereira do texto T5, Carlini e Cavalari do texto T6, Teixeira e Bernades do texto T8 e Haubrich e Amadeo do texto T9), pois seus autores focaram em abordar as inserções, examinando-as e classificando-as.

Cabe explicitar o que estamos denominando por “inserções” da história da matemática nos livros didáticos. Nos textos analisados, foram utilizados termos como “inserções”, “menções”, “citações”, “trechos” entre outros. Utilizamos aqui inserções por ser o termo mais recorrente nos textos, e por concordarmos com o sentido adotado pelos autores Haubrich e Amadeo no texto T9, que entendem por inserção quaisquer informações presentes no livro que "remete ao passado, a qual pode abordar momentos do desenvolvimento histórico dos conceitos, informações biográficas de matemáticos, livros ou outra publicação importante, datas de acontecimentos, dentre outras informações” (HAUBRICH; AMADEO, 2021, p. 201).

Ao analisar as inserções da história da matemática nos livros didáticos, Carlini e Cavalari (2017) propõem uma categorização para tal análise. Vamos apresentar aqui as três categorias dessas autoras correlacionando com os trabalhos do segundo grupo.

A primeira categoria, *História da matemática e formação cultural geral*, é a que aborda sobre informações históricas gerais, como por exemplo datas, nomes e fatos das vidas de estudiosos da matemática e localizações importantes. Assim como exposto pelas autoras Carlini e Cavalari no texto T6, nesta categoria são classificadas as inserções que “apresentam informações históricas sucintas que podem apenas propiciar uma formação cultural com relação à Matemática, ou seja, não contribuem diretamente para a aprendizagem de Matemática e nem sobre a Matemática” (CARLINI; CAVALARI, 2017, p.78).

Essa foi a categoria que conteve a maior quantidade de inserções nas pesquisas analisadas, o que indica que a história vem sendo abordada nos livros didáticos com um caráter mais informativo do que pedagógico. Quanto a isso, Mendes, no texto T3, argumenta que essas informações são “menos importantes embora não descartáveis" e que seria muito mais pertinente saber sobre os “modelos de pensamento que fizeram com que essa matemática fosse produzida e porque essa matemática foi produzida, para atender qual necessidade, qual interesse e qual modelo de conhecimento e tecnologia de determinada época e local” (MENDES, 2013, p.72).

A segunda categoria, *História da matemática elucidando os porquês e do para quê,* trata de possíveis respostas para essas perguntas enunciadas, de forma a contribuir com a melhor compreensão dos estudantes sobre os motivos e razões para se fazer matemática. Nesta categoria, como afirmam as autoras Carlini e Cavalari no texto T6, são classificadas as inserções que atribuem “sentido ao conteúdo a ser aprendido pelo estudante, na medida em que apresenta a Matemática como ciência em desenvolvimento, às vezes vinculado às questões utilitárias, e às vezes vinculado às questões intrínsecas à própria ciência Matemática” (CARLINI; CAVALARI, 2017, p. 82). Essa categoria indica um papel mais auxiliar da história da matemática na medida em que essa é usada apenas para ajudar os alunos a entenderem um motivo ou razão para determinados conceitos. Quanto à essa categoria, as autoras Teixeira e Bernades no texto T8 defendem que “haja mais inserções desempenhando” essa função, pois as inserções dessa categoria “auxiliam ao estudante a perceber que a matemática não é uma ciência pronta e acabada e que ainda está em desenvolvimento, além de entender sua utilidade e aplicações” (TEIXEIRA; BERNARDES, 2021, p. 263). Concordamos com esse argumento, pois as inserções desse tipo podem contribuir para proporcionar um primeiro contato do aluno com, ao menos, alguns “momentos” da história da matemática.

A terceira e última categoria que vamos apresentar, das que foram utilizadas pelos textos, é a *História da matemática e estratégica didática.* Essa categoria trata de mesclar a história da matemática com o conteúdo a ser ensinado, focando na compreensão do assunto pelo aluno. Nesta categoria, nas palavras das autoras Carlini e Cavalari no texto T6, estão as inserções que possibilitam “ao estudante o desenvolvimento de algum raciocínio matemático e, assim, contribuem para a compreensão do conteúdo a ser estudado” (CARLINI; CAVALARI, 2017, p. 77). Esta categoria é uma das que apresentam menos inserções em todos os textos analisados, o que indica um papel menos didático da história da matemática. O autor Gomes, no texto T1, afirma que essa categoria deveria estar mais presente nos livros didáticos, pois, inserções desse tipo, além de contribuir para um melhor entendimento do conteúdo desenvolvido no livro didático, podem “encorajar o estudante a pensar a respeito do conteúdo discutido” (GOMES, 2011, p. 445). Sobre a quantidade reduzida de menções desse tipo, tal fator nos chama a atenção, assim como a dos autores Haubrich e Amadeo no texto T9, uma vez que “o objetivo central dos livros didáticos é ensinar e existe um movimento significativo nas pesquisas em educação matemática defendendo” o uso da história da matemática como recurso “para se ensinar matemática” (HAUBRICH; AMADEO, 2021, p. 210), e não apenas abordagens históricas desvinculadas de possibilidades docentes para a abordagem em sala de aula.

Como vimos, as inserções da história da matemática nos livros didáticos podem ser de ao menos três tipos, e cada tipo utiliza a história com algum objetivo. Temos que a quantidade de inserções de história da matemática nos livros didáticos vem aumentando, como afirmam os autores Baroni, Teixeira e Nobre no texto T2 e Teixeira e Bernades no texto T8, em razão de vários motivos, como por exemplo mais pesquisas sobre o uso da história atrelado ao ensino, e documentos oficiais que requerem a utilização da história da matemática em sala de aula. Mas como utilizar essas inserções?

Quanto a isso, o autor Mendes no texto T3 sugere localizar as inserções que emergem “das diversas situações históricas da matemática” para então realizar uma investigação histórica a respeito dessas e utilizá-las com criatividade (MENDES, 2011, p.78). Ele ainda aponta que não precisamos “romper com as propostas” dos livros didáticos, mas podemos reorganizar as informações contidas nestes livros, tomando como “referência os aspectos históricos implícitos”, a fim de uma melhor utilização das inserções (MENDES, 2011, p.82). Outra possibilidade é apresentada pelas autoras Pereira e Pereira no texto T4, que sugerem que, ao utilizar as inserções da história da matemática, primeiramente é necessário apresentar seu “contexto histórico”, bem como, é importante conhecer “informações como: os aspectos sociais, políticos, econômicos e culturais relacionados” à essas inserções, para então se analisar a matemática ali discutida (PEREIRA; PEREIRA, 2015, p.71). Ainda sobre a utilização das inserções, as autoras afirmam que “não pode se dar de modo descontextualizado”, algo muito comum entre os professores que utilizam os livros didáticos e fontes históricas apenas como “áreas de garimpo” para extração de informações não contextuadas com a história da matemática (PEREIRA; PEREIRA, 2015, p.67).

Vale lembrar que quem vai direcionar o uso do livro didático, bem como, das informações contidas neste será o professor, e a maneira com que esse vai utilizar as inserções vai depender, dentre outros fatores, da sua formação, e é sobre essa formação e sua relação com a história da matemática que vamos abordar no próximo tema.

3.5 A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES COM RELAÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O nosso terceiro e último tema foi o menos abordado pelos autores dos textos analisados, mas, de maneira indireta, foi tangenciado em todos os textos, e trata da formação do professor de matemática com relação à história da matemática. Vimos com o último tema que as inserções da história da matemática nos livros didáticos podem ser de ao menos três formas distintas, mas a forma de trabalhar ou lidar com essas inserções vai depender, em grande medida, da formação do professor, seja inicial ou continuada.

As tendências metodológicas de educação matemática presentes nos livros didáticos possuem grande influência em sala de aula, pois, como aponta o autor Gomes no texto T1, essas tendências “exercem grande influência na formação geral dos alunos e na formação dos professores” (GOMES, 2011, p.435). Concordamos com tal afirmação, pois os alunos são os principais leitores aos quais se dedicam os livros didáticos, e os professores são formados (ou ao menos deveriam ser) para a utilização desses livros. Nas palavras do autor, sem uma formação adequada o professor é visto “unicamente como um consumidor das práticas produzidas” e presentes nos livros didáticos (GOMES, 2011, p. 447).

Identificamos em nossa busca a presença de pesquisas a respeito da história da matemática nos livros didáticos, bem como, que os materiais disponíveis em sala de aula sobre a história da matemática se restringem a algumas inserções nos livros didáticos. Tal aspecto levou os autores Baroni, Teixeira e Nobre do texto T2 a afirmarem que “em geral, o professor não dispõe de material sobre história da matemática adequado ou suficiente para realizar algum tipo de trabalho com os alunos” (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2011, p. 163). Nesse sentido, carecemos de discussões acerca de possibilidades didáticas de como fazer.

Um outro aspecto é argumentado pelas autoras Cruz e Ribeiro no texto T7, para quem "muitos professores não tiveram uma formação que contemplasse estes aspectos de uma postura crítica" quanto ao uso da história da matemática (CRUZ; RIBEIRO, 2018, p.148). Essa fala é mencionada e reforçada por Baroni, Teixeira e Nobre do texto T2 que afirmam: "De modo geral, os professores consideram que sua formação não forneceu subsídios que permitam usar a história da matemática com segurança" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2011, p. 162).

Ainda a respeito da formação (inicial e continuada) dos professores, é importante que esses tenham uma abordagem acerca da história da matemática ou ao menos que tenham acesso à literatura e pesquisas sobre o assunto. Para além de disciplinas específicas para tratar da história da matemática, há também a possibilidade de os cursos de formação trazerem aspectos históricos de maneira transversalizada, em outras componentes das matrizes curriculares. Ao utilizar a história da matemática em aula, não significa que o professor deva apenas "contar histórias" para os alunos, é necessário que o professor busque "na História não somente o relato do acontecimento, mas informações relevantes que contribuam para uma abordagem do conteúdo que consiga transmitir o significado daquilo que se pretende ensinar" (CARLINI; CAVALARI, 2017, p. 76).

Para isso, é necessário que, durante a formação do professor, seja potencializada uma visão crítica a respeito da história para que esse não contribua com as visões deformadas a respeito não apenas da matemática como das demais ciências. Dessa maneira, de acordo com o autor Mendes no texto T3, os professores poderão implementar a história da matemática em sala de aula "como um princípio unificador dos aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática" (MENDES, 2013, p. 82), isso é, utilizando da história para trabalhar de maneira conjunta as diferentes visões da matemática.

Mas se, como afirmam as autoras Cruz e Ribeiro no texto T7, os professores "salvo alguns poucos casos, mesmo quem tinha a intenção de usar a história, não a fazia por indicar não saber como fazer" (CRUZ; RIBEIRO, 2018, p. 136), o que pode ser feito? Quanto a isso, os autores Baroni, Teixeira e Nobre do texto T2 sugerem dois encaminhamentos quanto à história da matemática na formação do professor: "um que indique uma formação específica para o enriquecimento da cultura pessoal do professor, outro que auxilie o professor em sua atuação como educador" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2011, p. 162), ou seja, formações focadas em abordar a história da matemática com os professores e/ou como os professores podem abordar a história da matemática em suas aulas.

Considerando então que, para que o professor tenha maior sucesso quanto ao uso da história da matemática em suas aulas, não só o material seria importante como também a sua formação, já que o segundo servirá de base para a utilização do primeiro, os autores fazem alguns apontamentos e sugestões, que vamos apresentar aqui resumidamente.

Começamos com o comentário das autoras Pereira e Pereira no texto T4, que lembram que o uso da história em sala de aula "requer uma participação efetiva do professor, envolvendo-o na escolha, na organização, no planejamento e na execução das atividades designadas a partir das fontes" (PEREIRA; PEREIRA, 2015, p.76), seja essa fonte as inserções dos livros didáticos ou fontes externas. E por falar em fontes, as autoras Cruz e Ribeiro do texto T7 sugerem o uso de fontes externas aos livros didáticos, pois, como vimos, a abordagem histórica ali presente muitas vezes se caracteriza como "distorcida, simplificada, ou desconsidera aspectos sociais, políticos ou econômicos envolvidos" (CRUZ; RIBEIRO, 2018, p. 137). Por fim, mais uma sugestão é apresentada tanto por Mendes (2013, p. 67) quanto pelas autoras Cruz e Ribeiro (2018, p. 149). Ambos sugerem que não só o professor desconfie da veracidade das informações, mas que busque sustentações e revalidações dos fatos, isto é, que busquem em outras fontes que tratam da mesma informação para que confrontem os pontos de vista, e que também incentivem os seus alunos a fazerem o mesmo.

3.6 ALGUMAS REFLEXÕES ACERCA DAS PESQUISAS

Nesta seção, apresentamos uma pesquisa de cunho bibliográfico que teve como base artigos publicados em periódicos nacionais divulgados pela SBEM, artigos esses que tratam a respeito da história da matemática em livros didáticos, dos quais foram selecionados nove que constituíram o corpus desta pesquisa. A partir desses textos, identificamos três temas, a saber: motivos à presença da história da matemática nos livros didáticos; como se apresenta a história da matemática nos livros didáticos; a formação dos professores com relação a história da matemática. Com base nesses temas se constituiu e se delimitou as nossas descrições e análises.

Sobre o primeiro tema, abordamos o que os autores dos textos selecionados apresentaram como motivos para se trabalhar com a história da matemática em sala de aula, em especial nos livros didáticos, discutimos sobre três motivos os quais consideramos como principais, sendo esses os de: motivar os alunos; ajudar na compreensão do conteúdo pelos alunos; motivar a interdisciplinaridade. Também abordamos a questão tangenciada pelos autores sobre a dificuldade de implementação, em que identificamos alguns dos fatores para isso.

Sobre o segundo tema, tratamos a respeito dos livros didáticos e das inserções de história da matemática que podemos encontrar nesses e como essas podem ser classificadas. Acompanhando as classificações utilizadas por alguns dos autores de acordo com seus conteúdos e usos, apresentamos as categorias mais utilizadas, bem como, alguns comentários dos autores sobre elas, sendo: História da matemática e formação cultural geral; História da matemática elucidando os porquês e do para quê? e História da matemática e estratégica didática. Ainda ao final deste subtítulo, apresentamos alguns apontamentos dos autores sobre como utilizar tais inserções.

Para o terceiro e último tema, tratamos da relação da formação do professor de matemática com a história da matemática, tema que, embora menos abordado pelos autores, esteve de certa forma presente em todos os textos. Por fim, neste subtítulo apresentamos apontamentos sobre: a influência que os livros têm nas formações tanto dos alunos como dos professores, a insegurança dos professores para trabalhar com a história da matemática, encaminhamentos quanto a história da matemática na formação do professor, e algumas sugestões para se trabalhar com a história da matemática em sala de aula.

Portanto, vimos que existem alguns motivos para se utilizar a história da matemática em sala de aula, os quais justificam a presença da história nos livros didáticos, pois esses são um dos materiais mais difundidos nas escolas públicas brasileiras. E quanto às diferentes classes de inserções da história da matemática que podemos encontrar nos livros didáticos, essas dependem do uso e direcionamentos dos professores, os quais têm como base suas formações.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, abordaremos o nosso percurso metodológico para produção e análise dos dados deste trabalho. Para isso, apresentamos nossa caracterização da pesquisa, bem como, descrevemos o processo desde a escolha dos livros didáticos de matemática abordados até a seleção das inserções de história da matemática neles contidos, as quais serão analisadas na seção seguinte.

Trata-se, do nosso ponto de vista, de uma abordagem de pesquisa qualitativa. Sobre tal abordagem Flick afirma que as características essenciais da pesquisa qualitativa são a “escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos” (2009, p.23). Assim, acreditamos que nossa pesquisa se enquadra nessa perspectiva, pois queremos discutir possíveis influências de fragmentos de história da Matemática em livros didáticos na disseminação de crenças e visões distorcidas acerca da Matemática, e para isso escolhemos as teorias já elencadas e faremos nossas análises e classificações com base nestas e em nossas reflexões.

Para isso, analisamos as inserções de história da matemática nos livros didáticos de matemática. Dessa maneira, classificamos nossa pesquisa como do tipo documental, pois esse tipo de pesquisa se desenvolve pela utilização de documentos, no nosso caso os livros didáticos, com o objetivo de obter informações para responder a um determinado problema de pesquisa (SÁ SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009).

Os livros didáticos escolhidos para a nossa pesquisa foram os seis volumes da coleção para o Ensino Médio Prisma – Matemática, 2021, 1. ed, da editora FTD, escrito por José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Camara de Sousa (ver figura 1). A escolha dessa coleção em específico se deu por alguns motivos. Dentre eles, destacamos: por ter sido uma coleção aprovada no PNLD de 2021, o que também garante a escolha de uma coleção atual pensando no momento de sua análise por nós, e que já está de acordo com as normas e diretrizes da BNCC; além disso, pelo fato de que, em sua resenha disponível no guia do PNLD 2021, é apontado que “a obra se destaca também pela constante relação do conhecimento matemático com a sua história, uma vez que a seção “História da Matemática” aborda episódios e personagens que contribuíram para construção dos conceitos estudados” (BRASIL, 2020, p.84). Um outro fator que contribui para essa escolha foi o de que essa coleção está sendo utilizada em um Colégio Estadual de Paranavaí, que é um dos maiores e mais importantes da cidade, e de o autor desta pesquisa possuir familiaridade com o colégio, o que facilitou seu diálogo com os gestores e solicitação de exemplares quando necessário. Um último fator da escolha é o fato de a editora fornecer gratuitamente em seu site o arquivo em PDF dos livros, o que facilitou o processo de leitura e análise dos mesmos.

Figura 1: Capas dos volumes da coleção analisada

Fonte: site da editora FTD: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/. Acesso em: 10 de agosto de 2023.

Sobre a coleção, esta consiste de 6 livros destinados para o Ensino Médio, sendo que cada livro aborda uma área da matemática, sendo eles: Conjuntos e Funções, Estatística, Funções e Progressões, Geometria, Sistemas e Grandezas e Trigonometria. Os livros devem ser utilizados em conjunto em todos os anos do Ensino Médio, não havendo separação seriada. Quanto à estrutura de cada livro, esses são “autocontidos”, ou seja, todos os conteúdos, fórmulas e conhecimentos necessários para a compreensão do material e realização dos exercícios está presente no livro ou se pressupõe o conhecimento prévio dos alunos, o que permite que cada volume possa ser utilizado nos diferentes anos do Ensino Médio. Os livros são separados por capítulos e cada capítulo é dividido em algumas seções, bem como em “seções especiais”, isto é, seções dedicadas a uma abordagem diferente à exposição de conteúdo. Apresentaremos a seguir tais seções especiais e faremos uma breve apresentação das mesmas com base nos textos de introdução e apresentação encontrados no início dos livros da coleção.

- ✓ *Abertura de Capítulo*, sempre apresentada no começo do capítulo, é composta de duas folhas que se completam. São apresentados textos e imagens relacionados ao conteúdo que será abordado. Também é proposto um momento de reflexão sobre o contexto apresentado por meio de algumas perguntas abertas. Nesta seção também são apresentadas na margem esquerda da página as competências gerais e específicas, bem como as habilidades da BNCC que se pretendem trabalhar e desenvolver naquele capítulo.
- ✓ *Atividades Resolvidas e Atividades*, sempre apresentadas ao final de cada seção, de quantidade de atividades variável e que correspondem proporcionalmente à extensão e conteúdos daquela seção. São apresentadas a resolução de alguns exercícios que servem de base para as demais atividades propostas, as quais podem oportunizar a interação com os colegas e o professor.
- ✓ *Fórum*, apresentado no decorrer da seção, possui em geral meia página, é destinado à troca e compartilhamento de ideias entre os alunos e professor sobre temas contemporâneos.
- ✓ *História da Matemática*, seção apresentada ao final de alguns capítulos, em geral ocupando uma página, apresentando um texto sempre acompanhado de uma imagem. É exposto um texto sobre a história da matemática, relacionado a algum conteúdo ou figura histórica apresentado no capítulo.
- ✓ *Explorando a tecnologia*, seção apresentada ao final de alguns capítulos, de tamanho variado a depender da atividade proposta. É sugerida uma atividade em que os alunos utilizam de algum software ou tecnologia com o intuito de desenvolver o pensamento computacional.
- ✓ *Conexões*, semelhante ao *Fórum*, porém sempre apresentado ao final do capítulo, ocupando em geral duas páginas. Destina-se a relacionar o conteúdo visto com outras áreas do conhecimento, visando desenvolver a cidadania e o senso crítico, utilizando de atividades investigativas e pesquisas.

- ✓ *Atividades complementares,* sempre apresentadas ao final do capítulo, de tamanho variável. São apresentadas questões de exames oficiais, como por exemplo o ENEM e de vestibulares relacionadas ao conteúdo estudado.
- ✓ *Para refletir,* sempre apresentado no final do capítulo como o último item e ocupando em geral meia página. É apresentado um pequeno resumo dos conteúdos vistos naquele capítulo, bem como algumas perguntas que servem para reflexão e autoavaliação dos alunos.

Como notamos pela descrição destas seções e por nossa investigação, nesta coleção os autores Bonjorno, Giovanni Jr. e Câmara deram bastante ênfase em relacionar a matemática com as tecnologias e com as outras áreas do saber, além de disponibilizarem seções destinadas à discussão e a troca de informações entre os alunos e professores. De antemão, chama-nos a atenção a existência da seção *história da matemática,* na qual algumas páginas dos livros didáticos são especialmente separadas para a abordagem desse tema.

As inserções de história da matemática a serem analisadas foram coletadas nos livros didáticos apresentados acima. Tendo em vista a existência da seção de história da matemática, sabíamos que de alguma forma os livros escolhidos abordariam a nossa temática. Optamos por não nos restringirmos apenas às inserções encontradas na seção especialmente destinada, uma vez que entendemos que a história da matemática precisa ser trabalhada juntamente ao conteúdo, e não de forma isolada, para que a mesma possa contribuir para a compreensão do conteúdo pelos estudantes. E, com isso, esse também passou a ser um aspecto a ser por nós analisado, se as inserções serão sempre bem demarcadas em seção isolada, ou em algum momento apareceriam articuladas no meio de outras seções.

Dito isso, a seleção das inserções se deu por meio da leitura cuidadosa de todos os livros em análise, a fim de encontrar todas as menções à história da matemática, sejam elas imersas ou trabalhadas junto ao conteúdo, em notas laterais ao conteúdo ou em textos e seções destinadas à abordagem do tema.

É importante mencionar que a leitura dos livros didáticos ocorreu de modo digital, utilizando os arquivos em formato PDF distribuídos gratuitamente no site da editora FDT[3], e o software Adobe Acrobat para visualização dos arquivos. Durante a leitura, ao nos depararmos com as inserções, as mesmas eram marcadas no arquivo usando a ferramenta "realçar texto" disponibilizada no software. A ferramenta, além de destacar o texto, cria uma marcação na aba de comentários, onde ficam anotadas a página da inserção, bem como a data na qual a

---

[3]https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/

ferramenta foi utilizada. Utilizamos a marcação criada para nomear e enumerar as inserções a fim de obtermos melhor organização das mesmas. Feita essa etapa de “procura” das inserções, passamos para a análise e classificação das mesmas. Para isso, não usamos somente o conteúdo da inserção em si, mas também os de seus arredores, para entendermos seu contexto.

Quanto aos nossos critérios e pontos de análise para as inserções encontradas, fizemos a princípio uma análise quantitativa, com a apresentação de tabelas nas quais são apresentadas a quantidade de inserções encontradas em cada livro, sua ordem de apresentação no livro acompanhada da página encontrada. Na sequência, fizemos uma análise qualitativa, onde tratamos do conteúdo das inserções encontradas, descrevendo e relacionando as mesmas, segundo os slogans de Machado, as visões deformadas de Gil Perez et. al, e a teoria do desenvolvimento científico de Kuhn.

5 ANÁLISES E DESCRIÇÕES DAS INSERÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Nesta seção, faremos uma descrição geral das inserções encontradas em cada livro da coleção Prisma Matemática, já apresentada na seção anterior. Após tal descrição faremos as análises das inserções, apresentando as mesmas e as classificando conforme a teoria já elencada neste trabalho.

Quanto às inserções, foram encontradas ao todo 35, em todos os livros da coleção, sendo que o livro sobre "conjuntos e funções" é o que mais contém inserções, com 12, e o livro sobre "estatística" o que menos contém, com apenas uma. Os demais livros da coleção variam em quantidade de inserções, como pode ser visto no quadro a seguir, o qual apresenta o nome do volume, a quantidade de inserções, e o código de identificação de cada inserção, constituído pela sigla do volume e um número, e o número da página onde se encontra tal inserção:

Quadro 2: Código para identificação das inserções.

Volume	Quantidade de Inserções	Código de identificação da inserção - número da página em que se encontra[4]
Geometria	8	G1-pg. 14, G2-pg. 22, G3-pg. 48, G4-pg. 80, G5-pg. 81, G6-pg. 85, G7-pg. 89, G8-pg 137
Conjunto e Funções	12	C1-pg. 12, C2-pg. 25, C3-pg. 28, C4-pg. 34, C5-pg. 36, C6-pg. 36, C7-pg. 37, C8-pg. 47, C9-pg. 48, C10-pg. 49, C11-pg. 106, C12-pg,148
Estatística	1	E1-pg. 122
Função e progressão	6	F1-pg. 40, F2-pg. 66, F3-pg. 98, F4-pg. 117, F5-pg. 118, F6-pg. 146,
Trigonometria	5	TR1-pg. 14, TR2-pg. 27, TR3-pg 33, TR4-pg. 54, TR5-pg.118
Sistema e grandezas	3	S1-pg. 55, S2-pg. 100, S3-pg. 144

Fonte: Elaborado pelos autores.

Quanto às inserções, essas foram encontradas em três formas de apresentações sendo estas: como nota ao lado do texto com o nome de "saiba que...", ferramenta utilizada pelos autores para fornecer uma informação extra ao texto principal; como seção especial, denominada "história da matemática", sempre ao final dos capítulos com um texto sobre algum tema ou personagem apresentado naquele capítulo; e como parte do texto principal do capítulo, sendo esta encontrada em diferentes partes dos mesmos.

[4] A compilação de todas as inserções encontradas, já devidamente identificadas e separadas por livro, se encontro no Apêndice.

Quanto a essas formas de apresentação das inserções de história da matemática, a primeira, como nota lateral, pode contribuir com a visão deformada aproblemática ou ahistórica. Isso porque as inserções apresentadas dessa forma não têm como principal função contribuir com a compreensão do conteúdo pelo leitor, mas vem apresentar uma informação “extra”, que contribui apenas para a formação cultural geral do mesmo, assim desconsiderando, ou quase que literalmente “pondo de lado”, a história ali presente.

Porém isso não impede o professor de fazer um uso mais adequado dessas notas laterais, podendo este usa-las para contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. Como sugestão o professor pode propor atividades que expandam a história ou o conhecimento presentes nessas notas, por meio de uma atividade de pesquisa por exemplo, ou ainda trazendo outros materiais, como textos, vídeos ou *podcasts* que tratam da temática.

Com relação à segunda forma de apresentação, as seções de história da matemática, vemos a existência destas seções de forma positiva, uma vez que representam um esforço dos autores em incluir a história da matemática em sua obra, (sendo esse um dos motivos para escolhermos tal coleção). Porém, essa forma de apresentação poderia ter sido mais explorada pelos autores, pois, nessas seções o texto apresentado vem ou ampliar um conhecimento já abordado ou apresentar um personagem histórico que foi mencionado no decorrer do capítulo que precede a seção. Assim, tal seção pode ser criticada nas palavras de Kuhn (1998, p.175), quando o autor aponta que é característico dos livros textos “conterem apenas um pouco de história”, na forma de um texto inicial ou final, e com “referências dispersas aos grandes heróis de uma época anterior”. Por fim, entendemos que essa forma de apresentação da história da matemática contribui com a visão acumulativa, por apresentar apenas determinados momentos da história da matemática desconsiderado ou ignorando as crises e reformulações enfrentadas na matemática; e com a visão individualista e elitista, quando trata sobre personagens da história da matemática como gênios isolados.

Aqui ressaltamos que embora as inserções que foram apresentadas dessa forma não tiveram todo seu potencial explorado pelos autores da coleção, tal potencial pode ser explorado pelo professor. Pois lembremos que, embora o livro didático tenha um face de protagonismo em sala de aula, quem possui autonomia quanto ao uso desse material em sala é o professor, cabendo a este organizar e planejar suas aulas com relação aos materiais didáticos, em especial o livro didático (desde de que tenha condições de trabalho para isso). Assim podemos sugerir, por exemplo, que o professor pode complementar essas inserções, com fontes externas, isto é, selecionando e trazendo outros textos que complemente a inserção, contribuindo tanto para a compreensão do conteúdo, quanto para ajudar a combater visões deformadas da ciência.

A terceira forma de apresentação, quando a inserção de história da matemática aparece entremeada ao texto, acreditamos que seja uma das formas mais adequadas de inserção, pois permite que o leitor se aproprie do conhecimento ali exposto, juntamente à história da matemática ali presente. Essa forma de apresentação também permite que a história seja utilizada para contribuir para a compreensão do conteúdo, ao elucidar questionamentos, tais como de “Por que?” ou “Para que?” sobre a origem e utilidade do conteúdo e fórmulas ali apresentadas. Assim, essa forma de apresentação contribui para uma melhor utilização da história, como estratégica didática, ao mostrar a história e os problemas que originaram determinados conteúdos, e, com isso podendo contribuir parar desfazer a visão aproblemática ou ahistórica, ou até mesmo apresentado as crises enfrentadas no desenvolvimento de um determinado conhecimento e assim também podendo contribuir parar desfazer a visão acumulativa. Ou até mesmo a visão socialmente neutra, ao mostrar que alguns conteúdos se desenvolveram para resolver problemas das sociedades, dada a tecnologia da época.

Tendo em vista as visões deformadas apresentadas por Gil Perez (2001), temos que, na maioria das inserções analisadas, pode ser identificado algum tipo de relação com essas visões, porém tais inserções possuem relações distintas com as visões, algumas que como veremos podem vir a contribuir para desfazer essas mesmas visões, e outras que pelo contrário, podem vir contribuir ou a reforçar as concepções equivocas das visões. Isso então demonstra um certo descuido dos autores, que ao incluir a história da matemática nos volumes da coleção, cometeram certos equívocos que podem acabar por reforçar certas deformações.

Quanto às inserções em si, podemos classificá-las quanto a sua relação com as visões deformadas por meio do seguinte quadro, no qual são apresentados os nomes das visões deformadas e o código de identificação das inserções relacionadas às visões:

Quadro 3: Relação das inserções com as visões distorcidas

Visões Deformadas	Inserções relacionadas[5]
Visão empírico indutivista e ateórica	C8
Visão rígida ou dogmática	
Visão aproblemática e ahistórica	G2, G6, C4, C5, C6, C8, C9, E1, TR4, TR5
Visão exclusivamente analítica	C6, C7, C11, F5
Visão acumulativa de crescimento linear	C4, C8
Visão individualista e elitista	G2, G6, G8, C7, C8 C12, F6, TR2, S1, S2
Visão socialmente neutra	G2, F3, S3

Fonte: Elaborado pelos autores.

[5] No quadro anterior as páginas das inserções já foram identificadas, por isso não serão repetidas aqui.

Como podemos notar, as visões aproblemática e ahistórica, e a visão individualista e elitista são as visões deformadas com mais inserções relacionadas, com 10 inserções cada, e a visão rígida ou dogmática a com menos, não tendo nenhuma inserção relacionada a ela. Ressaltamos que existem inserções que não podemos relacionar à nenhuma visão, bem como a existência de inserções nas quais encontramos relação com mais de uma visão.

Nas próximas seções, vamos apresentar de forma geral como as inserções dos livros didáticos analisados se relacionam com as visões deformadas da ciência, mostrando exemplos e discorrendo sobre tais relações, e em quais sentidos elas ocorrem, isto é, se podem contribuir para desfazer ou reforçar tais visões.

5.1 VISÃO EMPÍRICO INDUTIVISTA E ATEÓRICA

Quanto a primeira visão deformada, a visão empírico indutivista e ateórica, conseguimos relacionar a esta apenas uma única inserção de história da matemática da coleção, a inserção C8, que se se trata de uma seção especial de história da matemática, do volume de conjuntos e funções, sobre incomensurabilidade e os números irracionais. Embora a mesma inserção pode ser relacionada a outras visões, um fragmento da mesma (Figura 2) chama a atenção por mostrar exatamente o oposto dessa visão.

Figura 2: C8 – Sobre a incomensurabilidade e os números irracionais

Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi--los ao mesmo tempo, com a mesma unidade *EF*. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos *AB* e *CD* sem unidade comum *EF*, os chamados segmentos *incomensuráveis*. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

Foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, [...] demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

[...]

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - A, p.47).

Tal fragmento (além de mencionar uma "crise no desenvolvimento da matemática" que abordaremos mais a frente ao tratarmos da quinta visão deformada) apresenta o fato da "descoberta" dos irracionais pelos pitagóricos, mencionando que tal descoberta se fez, por meio de um “argumento geométrico”. É evidente a atenção dada a esta descoberta, o que reforça a ideia ingênua de que o desenvolvimento das ciências, aqui em especial da matemática, ocorre somente por meio destas. Como vimos, isso é justamente a concepção da primeira visão deformada, a visão empírico indutivista e ateórica da ciência, logo essa inserção pode vir a contribuir com essa visão. Assim sugerimos que para uma melhor utilização, ou aprimoramento, dessa inserção, seja melhor explicado como ocorreu essa descoberta, isto é, apresentando as ideias ou hipóteses levantadas que contribuíram para isso.

5.2 VISÃO RÍGIDA OU DOGMÁTICA

À segunda visão deformada, a visão rígida ou dogmática, não conseguimos relacionar nenhumas das inserções encontradas na coleção. Essa visão está relacionada ao método científico, e da atenção ao ato de seguir passos e etapas de forma “rígida”, isto é, de modo mecânico, focando no controle dos dados e tratamento quantitativos desses na ciência. Embora essas características, tais como a “rigidez” e um controle mais quantitativo ou “numérico” dos dados, sejam bastantes relacionadas à matemática, como vimos no slogan “A Matemática é exata” de Machado (2011), essas mesmas características não nos parecem ser relacionadas a história. Pois essa disciplina tem como características um controle mais qualitativo dos dados, bem como uma maior “reflexibilidade” ao interpretar os fatos. Logo, como as inserções por nós analisadas se tratam da história da matemática, nos parece fazer sentido fato de nenhuma delas estar relacionadas a esta visão, tendo em vista que tais inserções não recorrem, por exemplo, a uma análise quantitativa dos dados, ou a explicitar “o método cientifico”.

5.3 VISÃO APROBLEMÁTICA E AHISTÓRICA

A terceira visão deformada, a visão aproblemática e ahistórica, foi uma das visões que mais teve inserções relacionadas, fato esse que nos parece evidente, uma vez que estamos justamente analisando as inserções da história da matemática, logo tais inserções vão estar de alguma forma relacionadas a visão deformada que trata a respeito da história. É importante ressaltarmos que não relacionamos todas as 35 inserções analisadas com essa visão, e apenas 10, em razão de que, embora todas as inserções encontradas fossem de história da matemática, nem todas tratavam propriamente da história ou desenvolvimento dessa ciência, ou dos problemas e perguntas que foram enfrentados no desenvolvimento dela. Além disso, mesmo as inserções que tratavam da história tinham algumas características que nos fizeram não relaciona-las a esta visão deformada, como por exemplo: não ser o foco daquela parte do texto abordar a história em si e logo apenas faziam alguma menção a mesma; tratar sobre a história de um personagem importante da matemática, mas com foco em sua biografia; ou ainda ser um pequeno trecho, como uma nota lateral de "Saiba que..", que pouco tratava ou contribuía para a compreensão da história ali presente, tratando-se mais de um flash histórico[6], isto é, uma menção histórica, do que uma inserção de história. Assim, todas as inserções que classificamos com relação a esta visão tratam de alguma forma do desenvolvimento histórico da matemática, seja de modo acumulativo ou não, e/ou os problemas que contribuíram para a sua evolução. Um fato interessante é o de que a maioria das sessões especiais de história da matemática da coleção foram relacionadas a esta visão, sendo as exceções aquelas que tratavam das "biografias" de figuras históricas.

A seguir, apresentamos duas das inserções relacionadas a esta visão deformada, com o intuito de exemplificar o que mencionamos acima, sendo a primeira (Figura 3) a respeito de alguns problemas que motivaram o desenvolvimento da matemática, e a segunda (Figura 4) sobre a história e evolução de um número irracional muito conhecido da matemática, a saber, o número π.

A inserção G6 (figura 3) é um exemplo da visão aproblemática, pois a forma como os autores apresentam os três problemas célebres, que nas palavras deles "desafiaram os matemáticos por mais de dois milênios", pode vir a reforçar essa visão. Pois ao tratar desses problemas que estão relacionados a origem de alguns conhecimentos, como por exemplo os irracionais, os autores não fazem uma reconstrução histórica dos mesmos ou tratam de suas origens, contribuindo com a caricatura de "difíceis" desses problemas. Por exemplo tomemos o primeiro problema, da duplicação do cubo, também conhecido por problema de Delos, uma das possíveis origens desse problema é atribuída a tentativa da população ateniense em duplicar o altar do deus Apolo, o qual tinha formato de um cubo, por sugestão de um oráculo, como forma de combater uma doença que assolava a população na época. Tal origem, nem qualquer outra origem, foi mencionada pelos autores, que apenas apresentaram o problema, e o fazem já com notação atual, isto é, tratando a incógnita como x, e usando a notação de raiz cúbica por exemplo, o que constitui um anacronismo, e pode acabar contribuindo para a intepretação equivocada de que as pessoas da época de Platão já eram familiarizadas com a

[6] Termo utilizado por Bianchi (2006, p. 49), para classificar as inserções que aparecem de forma sútil, se tratando de pequenas citações, sobre uma data ou a menção sobre matemáticos por exemplo.

notação algébrica moderna. Além disso, na mesma inserção, é tratado sobre dois importantes personagens da história da matemática, Platão e Pitágoras, sendo o primeiro evidenciado no título e com uma imagem de sua estátua, constituindo uma referência aos “gênios do passado”, abordaremos mais sobre tal referência ao tratar da sexta visão deformada.

Figura 3: G6 – Sobre a academia de Platão e os problemas célebres

A Academia de Platão

[...] Perto do ano de 377 a.C., Platão fundou em Atenas uma escola, a *Academia*, que durante um século dominaria a vida filosófica da cidade. A Academia era um espaço destinado ao estudo, pesquisa e ensino da filosofia e da ciência, e talvez tenha sido o primeiro exemplo de instituição de ensino e pesquisa de alto nível. [...] Platão herdou de Pitágoras a ideia de que a matemática estruturava o universo. Tinha, no entanto, uma concepção geométrica, contrastando com a concepção aritmética pitagórica.

[...]

No tempo de Platão, três célebres problemas receberam a atenção dos matemáticos [...]. Os três problemas são enunciados a seguir:

Duplicação do cubo. Encontrar o lado x de um cubo que tem como volume duas vezes o volume de um cubo de lado a. [...] O problema equivale, portanto, a encontrar o valor $\sqrt[3]{2}$ usando régua e compasso.

Trisseção do ângulo. Dado um ângulo θ, encontrar, usando a régua e o compasso, o ângulo $\theta/3$.

Quadratura do círculo. Encontrar o lado x de um quadrado que tenha a mesma área de um círculo de raio r [...], o que equivale a determinar o valor de π usando régua e compasso.

Esses problemas viriam a desafiar os matemáticos por mais de dois milênios, a ponto de a expressão “quadratura do círculo” ter se tornado sinônimo de problema impossível de ser resolvido. Demonstrações para a impossibilidade de resolver esses problemas seriam produzidas apenas no século XIX.

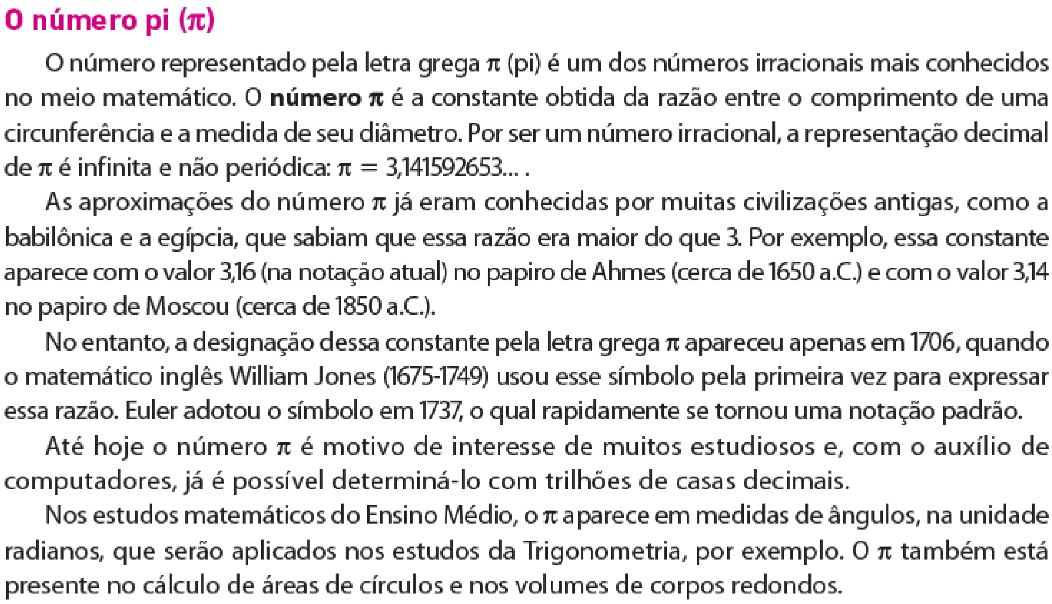
MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 37-38. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 30 jul. 2020.

Estátua de Platão presente na Academia de Atenas, Grécia. Fotografia de 2019.

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - D, p.85).

A inserção C5 (figura 4), embora se trate de um resumo da história do número π, abordando a evolução do conhecimento a respeito desse número e da relação que ele representa (entre uma circunferência e seu diâmetro), não parece ajudar a desfazer a visão ahistórica, por não tratar de forma correta a sua história, evolução e/ou as dificuldades encontradas. Por exemplo, no segundo parágrafo, é dito que “as aproximações do número π já eram conhecidas por muitas civilizações antigas”, o que se trata de um equívoco, tais civilizações não conheciam aproximações que denotamos atualmente pelo símbolo π, mas sim aproximações para a relação entre uma circunferência e o seu diâmetro. Além disso, no penúltimo parágrafo, é mencionado que “já é possível determiná-lo com trilhões de casas decimais”, fato esse que consideramos descontextualizado, pois para um estudante do ensino médio pode ser um “exagero desnecessário”, ou em outras palavras, distante da realidade lidar com tantas casas decimais. Por fim, esse fragmento da história da matemática, trata da evolução do número π, por meio de “saltos” temporais e tecnológicos, que não abordam, nem mencionam, as dificuldades encontradas, como por exemplo os cálculos ou algoritmos para se obter suas casas decimas.

Figura 4: C5 – Sobre o número pi (π)



O número pi (π)

O número representado pela letra grega π (pi) é um dos números irracionais mais conhecidos no meio matemático. O **número π** é a constante obtida da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Por ser um número irracional, a representação decimal de π é infinita e não periódica: $\pi = 3{,}141592653...$.

As aproximações do número π já eram conhecidas por muitas civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, que sabiam que essa razão era maior do que 3. Por exemplo, essa constante aparece com o valor 3,16 (na notação atual) no papiro de Ahmes (cerca de 1650 a.C.) e com o valor 3,14 no papiro de Moscou (cerca de 1850 a.C.).

No entanto, a designação dessa constante pela letra grega π apareceu apenas em 1706, quando o matemático inglês William Jones (1675-1749) usou esse símbolo pela primeira vez para expressar essa razão. Euler adotou o símbolo em 1737, o qual rapidamente se tornou uma notação padrão.

Até hoje o número π é motivo de interesse de muitos estudiosos e, com o auxílio de computadores, já é possível determiná-lo com trilhões de casas decimais.

Nos estudos matemáticos do Ensino Médio, o π aparece em medidas de ângulos, na unidade radianos, que serão aplicados nos estudos da Trigonometria, por exemplo. O π também está presente no cálculo de áreas de círculos e nos volumes de corpos redondos.

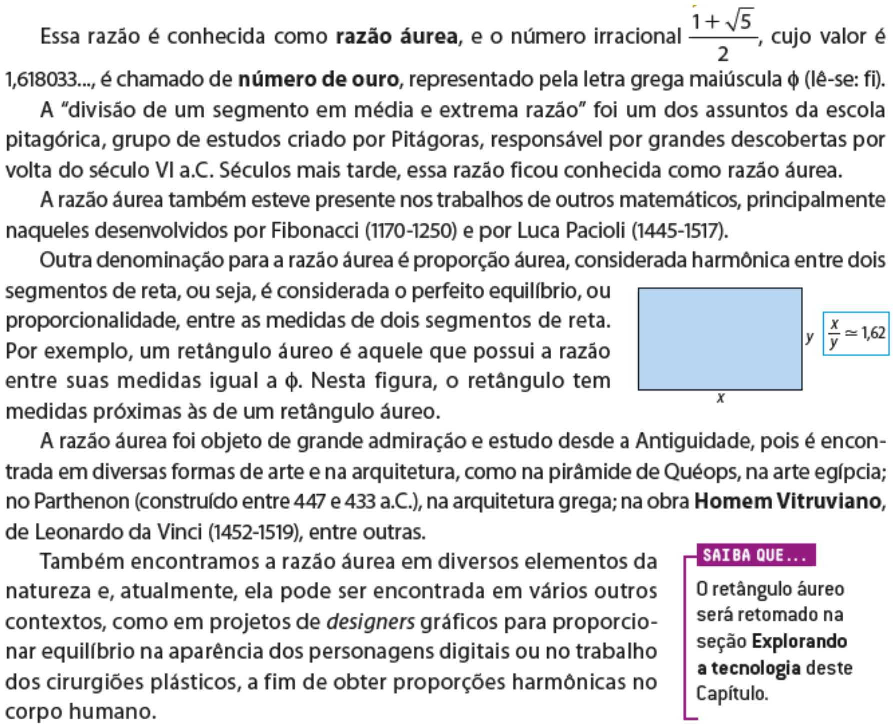
Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - A, p.36).

Um outro ponto que podemos identificar nesta inserção tem relação com os slogans “A matemática é exata” e “A matemática é abstrata” de Machado (2011). Temos que esta inserção trata de uma constante irracional, isto é, um número que sabemos que possui infinitas casas decimais é essas são não periódicas, não se repetem, algo que, como já vimos ao tratar do primeiro slogan, “A matemática é exata”, contrapõe a exatidão atribuída à matemática, pois por mais que tentemos, até ultrapassando os trilhões de casas decimais, nunca obteremos o valor “exato” de π. Quanto ao segundo slogan, “A matemática é abstrata”, embora se trate de um número, logo algo abstrato levando em consideração a sua dimensão material, a razão que ele representa, entre a circunferência e seu diâmetro, na dimensão do conteúdo e significado, se trata de algo bastante concreto.

5.4 VISÃO EXCLUSIVAMENTE ANALÍTICA

Sobre a quarta visão deformada, a exclusivamente analítica, que representa a ideia da divisão do conhecimento em parcelas, relacionamos à esta, quatro inserções. As inserções analisadas relacionam o conteúdo abordado sobre a história da matemática com outras áreas do conhecimento como arte, música, engenharia e biologia, por exemplo, podendo contribuir a desfazer esta visão deformada, embora isso seja feito de modo simplório, ao apenas mencionar exemplos destas relações entre diferentes campos do conhecimento. Ressaltamos que, mesmo que de modo modesto nestas inserções de história da matemática, a intenção dos autores da coleção em relacionar a matemática a outras campos do conhecimento parece bem presente em todos os volumes da coleção, tendo em vista a existência de seções especiais destinadas a isto, como por exemplo as seções "Fórum" e "Conexões". Um ponto que nos chamou a atenção foi o fato de que, das quatro inserções sinalizadas como relacionadas a esta visão, duas delas serem sobre a razão áurea, ou o número de ouro, sendo uma delas a que trazemos como exemplo a seguir (Figura 5).

Figura 5: C7 – Sobre a razão áurea número pi (π)



Essa razão é conhecida como **razão áurea**, e o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor é 1,618033..., é chamado de **número de ouro**, representado pela letra grega maiúscula ϕ (lê-se: fi).

A "divisão de um segmento em média e extrema razão" foi um dos assuntos da escola pitagórica, grupo de estudos criado por Pitágoras, responsável por grandes descobertas por volta do século VI a.C. Séculos mais tarde, essa razão ficou conhecida como razão áurea.

A razão áurea também esteve presente nos trabalhos de outros matemáticos, principalmente naqueles desenvolvidos por Fibonacci (1170-1250) e por Luca Pacioli (1445-1517).

Outra denominação para a razão áurea é proporção áurea, considerada harmônica entre dois segmentos de reta, ou seja, é considerada o perfeito equilíbrio, ou proporcionalidade, entre as medidas de dois segmentos de reta. Por exemplo, um retângulo áureo é aquele que possui a razão entre suas medidas igual a ϕ. Nesta figura, o retângulo tem medidas próximas às de um retângulo áureo.

A razão áurea foi objeto de grande admiração e estudo desde a Antiguidade, pois é encontrada em diversas formas de arte e na arquitetura, como na pirâmide de Quéops, na arte egípcia; no Parthenon (construído entre 447 e 433 a.C.), na arquitetura grega; na obra **Homem Vitruviano**, de Leonardo da Vinci (1452-1519), entre outras.

Também encontramos a razão áurea em diversos elementos da natureza e, atualmente, ela pode ser encontrada em vários outros contextos, como em projetos de *designers* gráficos para proporcionar equilíbrio na aparência dos personagens digitais ou no trabalho dos cirurgiões plásticos, a fim de obter proporções harmônicas no corpo humano.

SAIBA QUE...
O retângulo áureo será retomado na seção **Explorando a tecnologia** deste Capítulo.

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - A, p.37).

Tal inserção vem logo após a apresentação dos cálculos para se obter o número que representa a razão áurea, trazendo informações sobre a história da mesma. Além de apresentar nos primeiros parágrafos algumas das várias pessoas que lidaram com essa razão em diferentes épocas, já abordando a história dessa razão, a inserção traz nos últimos parágrafos onde podemos encontrar a razão áurea e a respeito da utilização da mesma nas mais diversas áreas do conhecimento. Tal menção sobre a razão áurea pode contribuir para desfazer a visão deformada em questão, tendo em vista que foi apresentado pontos que servem de conexão entre esse conteúdo da matemática com outras áreas do saber, como por exemplo o fato dessa razão proporcionar "equilíbrio da aparência" em projetos de design, e "proporções harmônicas" ao representar o corpo humano, como apontado pelos autores, exemplificando para o leitor algumas das aplicações dessa.

5.5 VISÃO ACUMULATIVA DE CRESCIMENTO LINEAR

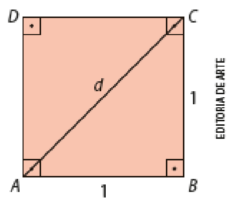
Com relação à quinta visão deformada, a acumulativa de crescimento linear, temos apenas duas inserções. Sobre estas inserções nos chama atenção o fato de as duas tratarem sobre um mesmo momento de crise da matemática, a saber a crise dos irracionais[7]. Ressaltamos que são apenas duas inserções, que tratam sobre a mesma crise, e ambas se encontram no mesmo livro, sobre conjuntos e funções. Das duas inserções, já apresentamos a C8 (ver figura 2), e então usaremos como exemplo a inserção C4 (Figura 6) que, embora se trate de uma inserção mais longa, por abordar a ideia aritmética dos irracionais de sua forma decimal ser infinita e não periódica, isto é, sem repetição, apresentamos um fragmento da mesma que está relacionado a esta visão.

Figura 6: C4 – Sobre o conjunto dos números irracionais

Conjunto dos números irracionais

Como comentamos anteriormente, o conjunto dos números racionais parecia ser ideal para todas as situações que envolviam operações aritméticas. E, de fato, durante algum tempo acreditou-se que os números racionais resolveriam todos os problemas que envolviam medições. No entanto, já na época de Pitágoras e seus discípulos, cerca de VI a.C., alguns problemas desafiavam essa teoria, como o apresentado a seguir.

Qual é a medida da diagonal d do quadrado $ABCD$ cujo lado mede 1 unidade de comprimento?



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Para determinar o valor de d, devemos responder à seguinte questão: qual é o número cujo quadrado é igual a 2? Inicialmente, vamos tentar calcular o valor de d usando aproximações por números racionais.

$1^2 = 1$ $\qquad$ $2^2 = 4$

Logo, d é um valor que está entre 1 e 2 ($1 < d < 2$).

Em seguida, com o auxílio de uma calculadora, vamos determinar a primeira casa decimal de d.

$(1,1)^2 = 1,21$ $\qquad$ $(1,3)^2 = 1,69$ $\qquad$ $(1,5)^2 = 2,25$

$(1,2)^2 = 1,44$ $\qquad$ $(1,4)^2 = 1,96$

Logo, d está entre 1,4 e 1,5, ou seja, $1,4 < d < 1,5$.

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - A, p.34).

[7] Tal crise tem seu início com a "descoberta" dos números irracionais, pelos pitagóricos, em torno de 500 a. C. produzindo uma crise nos fundamentos da matemática grega e na escola pitagórica, pois sua filosofia era baseada somente nos inteiros positivos.

Como já apontamos, ambas as inserções da história da matemática (C4 e C8) que podem ser relacionadas a visão acumulativa de crescimento linear, abordam a mesma crise na matemática. A crise que foi evidenciada pela anomalia dos irracionais, isto é, a característica desses números não poderem ser expressos como razão de inteiros, levou os pesquisadores e cientistas da época à uma mudança de paradigma[8], ou, nas palavras da teoria de Kuhn (1998), à uma revolução científica. Ainda sobre as inserções, nos chama a atenção algumas falas dos autores, como “alguns problemas desafiavam essa teoria” na inserção C4, ou “representou um momento de crise no desenvolvimento da matemática” na inserção C8, que são bastantes incisivas em evidenciar a crise e reformulações em evidência nas inserções, assim ao menos mencionando uma crise no desenvolvimento cientifico (da matemática), mostrando que este não ocorre de modo exclusivamente linear, como destaca Kuhn (1998).

Porém tal inserção C4 não contribui para desfazer a visão deformada em análise, tendo em vista que na mesma existem equívocos conceituais, que podem vir a reforçar tal visão. Ao mencionar os números racionais, dizendo que estes “resolveriam todos os problemas que envolviam medições” e que “já na época de Pitágoras e de deus discípulos, cerca de VI a.C., alguns problemas desafiavam essa teoria”, pode levar o leitor a acreditar que os pitagóricos lidavam com os racionais, o que se trata de um anacronismo. Embora essa inserção siga uma “sequência didática”, apresentando os racionais para depois apresentar os irracionais, a mesma não segue a “sequência histórica”, pois sabemos que os pitagóricos lidavam apenas com os números inteiros positivos e suas proporções. Assim, embora os autores do livro mencionem uma crise na matemática, eles fazem isso de tal modo que a crise, pode vir a evidenciar uma ideia de desenvolvimento acumulativo e de crescimento linear na matemática.

5.6 VISÃO INDIVIDUALISTA E ELITISTA

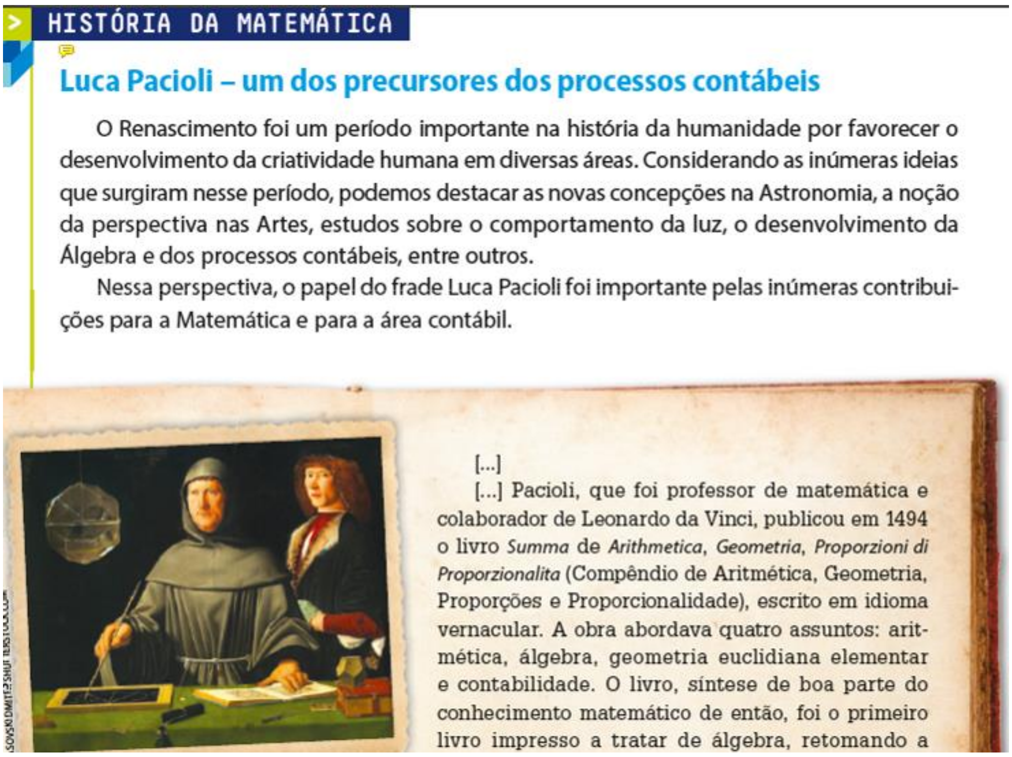
Com relação à sexta e penúltima visão deformada, a visão individualista e elitista, tivemos 10 inserções, sendo esta uma das visões com mais inserções relacionadas, e esse número poderia ser maior se considerássemos as menções, ou flashes, históricos que citam algum matemático, ou cientista. Relembramos que selecionamos todas as inserções de história da matemática que encontramos na coleção em análise, porém, relacionamos às visões deformadas somente aquelas que tivessem conteúdo suficiente para tal correspondência, isto é, que fossem mais que uma simples menção a um nome ou data históricos. Quanto às

[8] Para uma referência que aborda especialmente essa mudança de paradigmas, citamos Lorin e Nogueira (2015).

inserções, nos chama a atenção o fato de quase todas fortalecerem as ideias da visão deformada em questão, isto é, sendo bem explícitas em mencionar e dar atenção a personagens históricos da matemática, ajudando a transmitir a ideia de que esta ciência só se desenvolveu graças a esses “gênios isolados”. Das inserções relacionadas a esta visão ressaltamos duas, G6 (ver figura 3) e C7 (ver figura 5), que, embora ainda tratem de personagens importantes da história (não só da matemática), Platão na inserção C6 e Pitágoras na inserção C7, também mencionam seus grupos, sendo eles a academia de Platão e a escola pitagórica respectivamente. Tal menção transmite a ideia de cooperação e de intercâmbio de ideias apenas entre os participantes dessas comunidades, assim podendo contribuir para reforçar a visão deformada de que o trabalho científico é unicamente realizado por alguns poucos indivíduos.

A seguir, apresentamos dois exemplos de inserções que usaremos para demonstrar como a visão individualista e elitista foi reforçada nas inserções pelos autores. Ambas as inserções são seções de história da matemática, sendo que a primeira inserção, S2 (Figura 7), é sobre um matemático, a saber Luca Pacioli, enquanto que a segunda, G2 (figura 8), trata a respeito do estudo de geometria pelos gregos e dos “Elementos” de Euclides, porém trazemos um fragmento da mesma que aborda uma fala de Einstein.

Figura 7: S2 – Sobre Luca Pacioli



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Luca Pacioli – um dos precursores dos processos contábeis

O Renascimento foi um período importante na história da humanidade por favorecer o desenvolvimento da criatividade humana em diversas áreas. Considerando as inúmeras ideias que surgiram nesse período, podemos destacar as novas concepções na Astronomia, a noção da perspectiva nas Artes, estudos sobre o comportamento da luz, o desenvolvimento da Álgebra e dos processos contábeis, entre outros.

Nessa perspectiva, o papel do frade Luca Pacioli foi importante pelas inúmeras contribuições para a Matemática e para a área contábil.

[...]

[...] Pacioli, que foi professor de matemática e colaborador de Leonardo da Vinci, publicou em 1494 o livro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni di Proporzionalita* (Compêndio de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade), escrito em idioma vernacular. A obra abordava quatro assuntos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar e contabilidade. O livro, síntese de boa parte do conhecimento matemático de então, foi o primeiro livro impresso a tratar de álgebra, retomando a

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - F, p.100).

Na inserção S2, é evidente a atenção dada pelos autores a uma pessoa em específico, o nome de Luca Pacioli é exaltado como um “precursor” e “importante”, temos uma pintura sua e toda a seção de história da matemática em análise foi destinada a ele e suas contribuições. Não queremos com tais apontamentos diminuir, ou até mesmo menosprezar os trabalhos ou o próprio frade, mas chamar a atenção para a referência a um “grande herói” do passado, nas palavras de Kuhn (1998, p. 175). Ressaltamos que isso pode enfocar a visão deformada no leitor de que o trabalho cientifico não é realizado por pessoas comuns, e que fazem parte da maior parte da população.

Figura 8: G2 – Sobre a geometria e os Elementos de Euclides

Os gregos realmente dispuseram-se a organizar a Geometria como uma ciência e trataram de ordenar os fatos geométricos procurando demonstrar certas proposições a partir de outras mais simples; culminaram nos anos 300 antes de Cristo com a publicação dos “Elementos” de Euclides.

Trata-se da primeira exposição dedutiva da Geometria Elementar de que se tem notícia, partindo de certos postulados ou axiomas que eram proposições simples representando uma certa evidência natural. Sobre os “Elementos”, disse Einstein, numa certa ocasião: “Quem não soube entusiasmar-se por este livro em sua juventude, não nasceu para pesquisador teórico.” Apesar das demonstrações de Euclides estarem cheias de apelos à intuição, utilizando postulados admitidos tacitamente, não se pode negar que seu trabalho constituiu-se, durante muitos séculos, em um modelo de apresentação matemática, com forte influência na cultura do ocidente.

[...]

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - D, p.22).

Já na inserção G2, embora seja sobre a geometria como ciência e a obra Elementos, cujo nome de seu criador, Euclides, é apenas citado, nos chamou a atenção a frase creditada a Einstein (1879-1955), escolhida para se referir aos Elementos de Euclides, pois a mesma exemplifica bem visão individualista e elitista. A frase possui um caráter limitador, no sentido de apresentar uma característica que definiria as pessoas aptas a se tornarem pesquisadores, o que não só fortalece a imagem deformada de que o trabalho científico é destinado a determinadas minorias, como também gera expectativas negativas nos leitores, que podem se auto discriminar por não se identificarem com o “entusiasmo” mencionado na frase. Além disso, tal inserção parece condizer com o terceiro slogan de Machado, sobre “A capacidade para a matemática é inata”, ao reforçar que tal “entusiasmo” deva ainda acontecer na “juventude”, caso contrário, a pessoa “não nasceu” para ser pesquisador. Assim, com tal fragmento nesta inserção, fica evidente o descuido dos autores ao inseri-la em sua obra, pois a mesma apenas reforça estereótipos negativos, como já apontamos acima.

Ainda sobre as inserções relacionadas à visão individualista e elitista, ressaltamos que todas seguem o mesmo padrão, de reforçarem alguns estereótipos associados às pessoas que fazem ciência. Todas as inserções retratam personagens masculinos, brancos e europeus, não existindo qualquer esforço dos autores da coleção em incluir algum tipo de diversidade, seja de gênero, etnia ou nacionalidade. Com isso, acreditamos que seria ao menos interessante a apresentação de diferentes e diversos personagens em obras como essa, para que exista uma identificação por parte do leitor, isto é, os alunos, com tais personagens, o que com certeza contribuiria para desfazer tal visão deformada a respeito das pessoas que trabalham com ciências, em especial com matemática.

5.7 VISÃO SOCIALMENTE NEUTRA

A sétima e última visão deformada, a visão socialmente neutra, que trata sobre a relação entre ciência, tecnologia e sociedade, possui poucas inserções relacionada a ela, com apenas três. Porém, todas essas inserções de alguma forma contribuem para desfazer tal visão, ao apontarem relações entre o avanço científico e as necessidades da sociedade da época, como também entre a ciência e o avanço tecnológico. Assim, tais inserções reforçam o cuidado dos autores da coleção em relacionar a matemática a questões sociais e à tecnologia, que, para além dessas inserções, possuem seções especiais destinadas a esses temas como “Explorando a tecnologia” e “Conexões”, pondo em evidência que a ciência não possui um papel indiferente na sociedade. Como exemplo dessas inserções, trazemos a inserção S3, (ver Figura 9), que se trata de um fragmento da seção especial “Conexões” sobre a construção de mapas, e aborda a relação entre a matemática e a arte da cartografia.

Figura 9: S3 – Sobre a matemática e a Cartografia

A Matemática e a Cartografia

Cartografia, que é a arte de fazer mapas, tem uma história antiga, que remonta a milênios antes de Cristo. Nos tempos modernos, ou seja, a partir da segunda metade do século XV, a elaboração de mapas tornou-se uma atividade de interesse crescente, principalmente devido às grandes navegações, que exigiam mapas cada vez mais confiáveis. E, por serem mapas de grandes regiões, se não de todo o globo terrestre, os cartógrafos procuravam descobrir a maneira de fazer um tal mapa de forma a reproduzir as diferentes localidades do globo preservando, com exatidão, na mesma escala, as várias distâncias entre elas. Isso perdurou até que, em meados do século XVIII, o grande matemático Leonardo Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse intento. [...]

Um outro momento importante da Cartografia do século XVI foi a construção de um mapa com características especiais, muito apropriadas às navegações, o chamado mapa de Mercator.

[...]

Fonte: (BONJORNO; GIOVANNI JR; CÂMARA, 2020 - F, p.144).

Nesta inserção, conseguimos identificar como a história, não se restringindo apenas a da matemática, é trabalhada junto com o conteúdo em foco, a saber a construção de mapas e o uso de escalas, passando por questões a respeito da história moderna, como as citadas “grandes navegações”, deixando em evidência a relação entre ciência, sociedade, e com isso podendo contribuir para desfazer a visão deformada de que a ciência ignora ou é indiferente as questões sociais, ou até mesmo a própria sociedade. Porém entendemos que para uma inserção de história da matemática contribuir de fato para desfazer a visão deformada em análise, é necessário que a mesma trate de forma mais “profunda” a relação entre a matemática e sociedade. Como por exemplo abordando a visão ou ideias que determinada sociedade possui(a) com relação à ciência, ou em quais questões a ciência contribui(u) para o desenvolvimento da sociedade ou vice versa. Ressaltamos que na mesma inserção é citado o nome do matemático Euler, sendo atribuído a ele a cunha de “o grande”, e mencionado a respeito de um de seus feitos, sobre mostrar a impossibilidade de se obter uma planificação da esfera sem distorções, porém sobre tal menção já abordamos na visão deformada anterior, quando tratamos da atenção dada a esses “grandes gênios” pelos autores da coleção. Ainda sobre esta inserção, chamamos a atenção para um último ponto, a sua localização no livro, sendo encontrada nas últimas páginas do mesmo, a inserção se encontra na página 144 e o livro contém 160 páginas, o que evidencia a crítica de Kuhn de ser característico desse tipo de material, os livros textos, conterem apenas um pouco de história, seja um texto inicial ou final (1998, p.175).

5.8 FEITAS AS ANÁLISES

Vimos nos últimos subtítulos como podemos relacionar algumas das inserções encontradas em todos os seis livros da coleção, com a teoria apresentada e elencada nas seções anteriores. Evidenciamos a relação entre as inserções e as chamadas visões deformadas de Gil-Perez (2001), podem contribuir tanto para reforçar quanto para desfazer as mesmas. Mostramos também que os slogans de Machado (2011) podem ser identificados nesses textos, o que nos permite afirmar que tais falas se encontram presentes na sociedade e ainda conseguimos exemplificar como a teoria das revoluções cientificas de Kuhn (1998) pode contribuir para desfazer algumas visões deformadas, bem como, fizemos uso de algumas críticas e exemplos do mesmo, evidenciando que, embora seus trabalhos sejam de mais de meio século atrás, as mesmas podem ser utilizadas ainda em 2023, para apontamentos em trabalhos recentes.

Portanto, feitas tais análises, podemos fazer alguns apontamentos gerais. Notamos a falta de inserções que usassem a história da matemática como estratégia didática, mesmo essa sendo apontada pela bibliografia como sendo mais vantajosa, no sentido de utilizar a história da matemática junto ao conteúdo para ajudar o aluno a desenvolver o pensamento matemático com o intuito de melhorar sua compreensão. Isso considerando que todas as inserções encontradas serviram apenas para fornecer uma informação geral, ou para responder algum tipo de questionamento, formas essas do uso da história da matemática que já foram apontadas como pouco eficientes para o processo de ensino e aprendizagem, pela bibliografia levantada. Sendo assim, acreditamos que algumas dessas inserções poderiam ter sido mais bem exploradas pelos autores, que poderiam propor atividades que relacionassem o conteúdo à história da matemática, por exemplo, mostrando a história de alguns dos problemas que deram origem a determinados conhecimentos. Por fim, ressaltamos que a inclusão de uma seção destinada à história da matemática é vista como um ponto positivo, tendo em vista a permanência e valorização desse assunto para as aulas de matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, foram identificados vários pontos da relação entre a história da matemática e os livros didáticos, tendo em vista identificar as inserções de história da matemática em livros didáticos, utilizados na cidade de Paranavaí, e discutir a influência desses fragmentos na disseminação de crenças e visões distorcidas acerca da matemática. Assim, começamos com um levantamento teórico sobre algumas visões, falas e ideias a respeito das ciências, em especial da matemática, e de sua história. Vimos algumas falas, chamadas por Machado de slogans, e entendemos que é necessário termos mais cuidado ao utilizar termos como, por exemplo, "exato", "abstrato" ou "inato", ao lidarmos com a matemática. Como também as visões deformadas da ciência de Gil-Perez, que demonstram algumas ideias e concepções consideradas erradas a respeito do trabalho científico. E ainda abordamos a teoria das Revoluções Científicas de Kuhn sobre o desenvolvimento científico, bem como algumas de suas falas e críticas sobre a presença da história nos materiais didáticos.

Também abordamos sobre o livro didático e vimos que esse é um material que possui várias "faces", como mercadoria do comércio entre governo e editoras, como material com certo protagonismo em salas de aulas, e como fonte para diversas pesquisas. Ademais, o livro didático se apresenta como um material em potencial que acaba se tornando uma fonte de informações que permite compreender como se deu o conhecimento em cada período, bem como, qual era o conhecimento pertinente em cada época.

Com a intenção de analisar o que pesquisas brasileiras trazem a respeito da relação entre a história da matemática e os livros didáticos, realizamos um levantamento bibliográfico em artigos que tratassem dessa temática, e com isso encontramos alguns temas comuns que emergiram destes materiais: *Motivos à presença da história da matemática nos livros didáticos*, como motivar os alunos, ajudar na compreensão do conteúdo pelos mesmos e incentivar a interdisciplinaridade; *Como se apresenta a história da matemática nos livros didáticos*, onde vimos algumas categorias para as classificações das inserções conforme suas formas de apresentação e uso; e *A formação dos professores com relação a história da matemática*, onde vimos algumas dificuldades dos professores, tanto como a falta de formação ou de materiais adequados para uma maior segurança e melhor aproveitamento do uso da história da matemática em sala de aula.

Com base no levantamento teórico e nas informações obtidas pela revisão bibliográfica, também realizamos as análises das inserções de história da matemática encontradas em uma coleção de livros didáticos. Tal análise contribuiu para discutimos a respeito das influências desses fragmentos de história da matemática na disseminação de algumas crenças e visões distorcidas a respeito da matemática.

Assim, primeiramente abordamos os motivos para a nossa escolha da coleção de livros didáticos analisada, dos quais citamos possuir seções especiais destinadas à abordagem da história da matemática, como também se tratar de uma coleção que é destinada ao Ensino Médio e que está de acordo com as orientações da BNCC. Por fim, explicitamos os nossos processos e metodologias para leitura e seleção das inserções de história da matemática encontradas nos volumes da coleção.

Com as nossas análises das inserções, conseguimos relacionar as inserções à teoria apresentada e elencada nas primeiras seções. Evidenciamos a intenção dos autores da coleção em abordar a história da matemática em seus livros didáticos, mesmo que a apresentação dessa tenha sido feita de maneira fragmentada em todos os seis volumes que constituem a coleção. Vimos que as inserções encontradas podem ser relacionadas às chamadas visões deformadas de Gil-Perez (2001), tendo pontos que podem contribuir tanto para desfazer essas visões como para reforçá-las. Mostramos como os slogans de Machado (2011) podem ser identificados nesses textos, e como esses estão ligados às já mencionadas visões deformadas da ciência. Ainda, durante as análises das inserções, fizemos alguns apontamentos com base na teoria das Revoluções Cientificas de Kuhn (1998) e em algumas de suas críticas e exemplos, evidenciando que tais afirmações, embora tenham mais de meio século, ainda podem ser utilizadas em 2023, para apontamentos em trabalhos recentes.

Para alguns apontamentos gerais, notamos a falta de inserções que usassem a história da matemática como estratégia didática, mesmo essa sendo apontada pela bibliografia como sendo mais vantajosa. Em outras palavras, todas as inserções encontradas são utilizadas apenas para fornecer uma informação geral, ou para responder algum tipo de questionamento, o que exigiria um trabalho maior do docente para tratar pedagogicamente dessas informações em suas aulas. Dito isso, sugerimos que algumas dessas inserções poderiam ter sido mais bem exploradas pelos autores, por exemplo, ao propor atividades que relacionassem a história da matemática nelas presentes, ao conteúdo a ser trabalhado. Cabe relembramos que não só a forma de apresentação é importante, com também o conteúdo, pois, como vimos, algumas das inserções possuíam certos equívocos conceituais. Assim, sugerimos uma revisão cuidadosa dos professores a respeito dessas inserções antes de utilizá-las, a fim de evitar equívocos, bem como ideias que podem reforçar visões distorcidas a respeito da ciência. Porém, ressaltamos que a inclusão de uma seção destinada à história da matemática é vista como um ponto positivo, tendo em vista a permanência e valorização desse recurso didático nas aulas de matemática.

Com esse trabalho, em especial com nossas análises das inserções de história da matemática nos livros didáticos, pretendemos contribuir para a formação docente, principalmente com relação à abordagem da história da matemática no ensino. Para isso, evidenciamos como algumas dessas inserções podem vir a contribuir com crenças e visões distorcidas acerca da matemática, a fim de que os docentes possam evitar tais abordagens da história da matemática em suas aulas, para que tal recurso didático possa ser usado para ajudar a desfazer tais visões e crenças.

Evidenciamos que uma das limitações deste trabalho diz respeito às inserções de história da matemática selecionadas. Entendemos que, para uma possível ampliação desta pesquisa, uma seleção com maior variedade, isto é, uma seleção de inserções de outras coleções, de outros autores, de outras épocas, possa contribuir para se obter um panorama mais amplo a respeito da relação entre livros didáticos e a história da matemática.

Por fim, como autor desta dissertação, admito que, com a realização das pesquisas, muitos questionamentos surgiram, com respeito à forma de apresentação e utilização da história da matemática, ou sobre qual "visão" se baseava meus próprios conhecimentos, por exemplo. Questões essas que me fizeram repensar, e até mudar de opinião, quanto à forma que entendia não só a história da matemática, mas a matemática em si. Durante as análises, pude me aprofundar com relação a algumas respostas a essas questões, e consegui entender como algumas concepções negativas da matemática podem acabar sendo reforçadas, porém, também descobrir formas de repensar e desfazer essas mesmas concepções.

Portanto, consideramos que a história da matemática é um tema bastante presente, seja em pesquisas, tais como esta, ou mesmo como recurso didático. Recurso esse utilizado em salas de aula por professores, estimulado por documentos oficiais que incentivam o seu uso em salas, o que de certa forma garantem a presença da história da matemática nos livros didáticos. Por fim, ressaltamos que, para que o professor tenha maior sucesso quanto ao uso da história da matemática em suas aulas, não só o material é importante como também a sua formação e condições de trabalho, já que o segundo servirá de base condicionante para a utilização do primeiro.

REFERÊNCIAS

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; TEIXEIRA, Marcos Vieira; NOBRE, Sergio Roberto. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, v. 25, n. 41, p. 153-171, 2011.

BIANCHI, Maria Isabel Zanutto. **Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos.** 2006, 103p. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; CÂMARA, Paulo Roberto de Sousa. **Prisma Matemática**: Conjuntos e funções. 1º ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; CÂMARA, Paulo Roberto de Sousa. **Prisma Matemática**: Estatística, combinatória e probabilidade. 1º ed. São Paulo: Editora FTD, 2020

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; CÂMARA, Paulo Roberto de Sousa. **Prisma Matemática**: Funções e progressões. 1º ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; CÂMARA, Paulo Roberto de Sousa. **Prisma Matemática**: Geometria. 1º ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; CÂMARA, Paulo Roberto de Sousa. **Prisma Matemática**: Geometria e trigonometria. 1º ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; CÂMARA, Paulo Roberto de Sousa. **Prisma Matemática**: Sistemas, matemática financeira e grandezas. 1º ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia Digital PNLD-2021,** 2020. Disponível em: <https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_didatico/componente-curricular/pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias>. Acesso em: 25 jun. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. v. 2. Brasília, 2006.

CARLINI, Elisângela Miranda Pereira; CAVALARI, Mariana Feiteiro. As funções didáticas da história da matemática nos livros didáticos de matemática do ensino médio. **Hipátia**, v.2, n.2, p.73-88, 2017.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.3, p. 549-566, set./dez., 2004.

CHOPPIN, Alain. O historiador e o livro escolar. **História da Educação**. ASPHE/FaE/UFPel, Pelotas, v.11, p.5-24, 2002.

CRUZ, Jaqueline Zdebski da Silva; RIBEIRO, Dulcyene Maria. História da matemática na construção de concepções equivocadas em sala de aula: reflexões acerca das pseudo-histórias. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.7, n.14, p.132-153, 2018.

D' AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 16 ªed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2008.

EGGERT-STEINDEL, Gisela; FELDMAN, Daniele; SILVA, Kayma Kanoon. Os desafios do livro didático como fonte de pesquisa, memória e história em tempos de sociedade da informação. **Perspectivas em Ciência da Informação**, v. 21, n. 1, p. 84-96, 2016.

EMMEL, Rubia; ARAÚJO, Maria Cristina Pansera de. **A pesquisa sobre o livro didático no Brasil:** contexto, caracterização e referenciais de análise no período 1999-2010. Anais IX ANPED Sul. Seminário de pesquisa em educação da região sul, 2012.

FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Tradução Joice Elias Costa. 3.ed. Porto Alegre: Artemed, 2009.

FNDE. **Histórico.** Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/component/k2/item/518-histórico>. Acesso em 05/02/2023.

FREITAS, Neli Klix; RODRIGUES, Melissa Haag. O livro didático ao longo do tempo: a forma do conteúdo. **DAPesquisa,** v. 3, n. 5, p. 300-307, 2019.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar um projeto de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOMES, Marcos Luis. As práticas culturais de mobilização de história da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio. **Zetetiké**, v.18, p.433-448, 2011.

HAUBRICH, Cleber.; AMADEO, Marcello. História da matemática nas coleções do pnld 2018: um estudo preliminar. **Hipátia** v. 6, n. 2, p. 199-214, 2021.

KUHN, Thomas Samuel. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. 5° Ed. Trad. B. V. Boeira & N. Boeira. São Paulo: Editora Perspectiva S. A, 1998.

LORIN, João Henrique. **Uma revolução científica na matemática: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano.** 2009. 99 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

LORIN, João Henrique; BATISTA, Irinéa de Lourdes. Natureza do conhecimento matemático na formação de professores. In: DOS SANTOS, Talita Secorun; BORGES, Fábio Alexandre (org.). Pesquisas em educação matemática: implicações para o ensino. Campo Mourão: **Felcicam,** 2016. p. 139- 154.

LORIN, João Henrique; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Do Paradigma Pitagórico ao Paradigma Euclidiano: um estudo histórico sob a ótica epistemológica kuhniana. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM).** Campo Mourão - PR, v.4, n.7, p. 113-134, 2015.

MACHADO, Nilson José. **A matemática e a língua materna:** análise de uma Natureza do conhecimento matemático na formação de professores impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2011.

MENDES, Iran Abreu. História no ensino da matemática: Trajetórias De Uma Epistemologia Didática. **Rematec**, n.12, p.66-85, 2013.

MOREIRA, Kênia Hilda. Livros didáticos como fonte de pesquisa: Um mapeamento da produção acadêmica em História da Educação. **Educação e Fronteiras**, v. 2, n. 4, p. 129-142, 2012.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica** – Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. O teorema de Thales ao longo da história: percepções encontradas em alguns livros didáticos do século xx. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 17, p. 60-73, 2016.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; PEREIRA, Daniele Esteves. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de matemática. **Rematec**, n. 18, p. 65-78, 2015.

PÉREZ, Daniel, Gil. et. al. Por uma imagem não deformada do trabalho científico. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 7, n. 2, p. 125-153, 2001.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Tradução: Bernadete Morey, Iran Abreu Mendes. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

SALIS, Carmem Lucia Gomes; SALIS, Andre Ulysses; COSTA, Maria Paula; A apropriação do livro didático de história na perspectiva dos alunos. **Revista Outras Fronteiras**, v. 5, n. 2, p. 37-53, 2019.

SÁ-SILVA, Jackson Ronie; ALMEIDA, Cristovão Domingos de; GUINDANI, Joel Felipe. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista brasileira de história & ciências sociais,** v. 1, n. 1, p. 1-15, 2009.

SANTOS, Carlos Cesar dos; ECAR, Ariadne Lopes. **O uso dos livros didáticos no ensino médio técnico no contexto pandêmico**. SciELO Preprints, 2022.

SAVIANI, Dermeval. **Educação: do senso-comum à consciência filosófica**. 17. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

SILVA, Elda Cristina Carneiro da; AIRES, Joanez Aparecida. A teoria celular em livros didáticos de biologia: uma análise sobre as concepções acerca da natureza da ciência. **Revista Insignare Scientia** - RIS, v. 4, n. 3, p. 309-327, 3 mar. 2021.

SOUZA, Thalles Pinto de; MÜLLER, Maykon Gonçalves. O enfoque CTS em livros didáticos brasileiros e em manuais escolares portugueses: uma revisão das publicações em eventos do Ensino de Ciências e Química. **Revista Insignare Scientia** - RIS, v. 5, n. 2, p. 451-466, 23 jun. 2022.

STASCOVIAN, Juliana; DE ALMEIDA, Laura Isabel Marques Vasconcelos. Metodologia do ensino primário: análise do livro didático como fonte de pesquisa. **Coinspiração-Revista dos Professores que ensinam matemática**, v. 1, n. 2, p. 75-89, 2018.

TEIXEIRA,Wilza Maria Adão Lopes; BERNARDES, Aline Caetano da Silva. História da matemática em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental. **Hipátia,** v. 6, n. 2, p. 259-271, 2021.

APÊNDICE

A seguir trazemos um compilado de todas as inserções analisadas, separadas por livro e identificas de acordo com o quadro 1.

Livro de Geometria

G1

SAIBA QUE...

Heron de Alexandria foi um matemático grego que viveu por volta do ano 100. Ficou conhecido pela fórmula para o cálculo da área de um triângulo e que leva seu nome. O livro em que apresenta essa fórmula, **A métrica**, só foi encontrado em 1896.

Fonte dos dados: BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

G2

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Uma aproximação de π

Os cálculos da área do círculo e de suas partes envolvem o número irracional π. O texto a seguir aborda a aproximação usada pelos egípcios, além de alguns fatos a respeito da Geometria na história da Matemática.

Análise: área que estuda mais profundamente a natureza de conjuntos de números reais e de funções, tal como suas características e propriedades.

Um pouco sobre a abrangência da Geometria

De uma forma simplista muitos consideram a Matemática englobando essencialmente a Geometria, a Álgebra e a Análise.

A Geometria é provavelmente a mais antiga das três áreas e surgiu, sem dúvida, da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos etc.

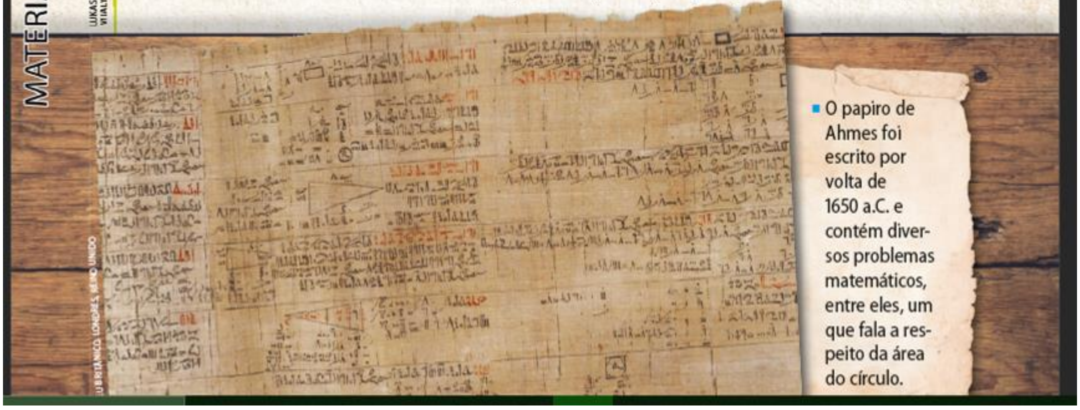
No início, pelo que se sabe, a Geometria era simplesmente uma coleção de conhecimentos práticos, como por exemplo, a fórmula aproximada da área A do círculo de diâmetro d, $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, conhecida dos egípcios desde o ano 1500 antes de Cristo. Comparando-se com a expressão correta, $\frac{\pi d^2}{4}$, verifica-se que, essencialmente, a fórmula aproximada corresponde a adotar para π um valor da ordem de 3,16.

Os gregos realmente dispuseram-se a organizar a Geometria como uma ciência e trataram de ordenar os fatos geométricos procurando demonstrar certas proposições a partir de outras mais simples; culminaram nos anos 300 antes de Cristo com a publicação dos “Elementos” de Euclides.

Trata-se da primeira exposição dedutiva da Geometria Elementar de que se tem notícia, partindo de certos postulados ou axiomas que eram proposições simples representando uma certa evidência natural. Sobre os “Elementos”, disse Einstein, numa certa ocasião: “Quem não soube entusiasmar-se por este livro em sua juventude, não nasceu para pesquisador teórico.” Apesar das demonstrações de Euclides estarem cheias de apelos à intuição, utilizando postulados admitidos tacitamente, não se pode negar que seu trabalho constituiu-se, durante muitos séculos, em um modelo de apresentação matemática, com forte influência na cultura do ocidente.

[...]

OLIVA, W. M. A independência do axioma das paralelas e as geometrias não euclidianas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 2. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/2/8.htm. Acesso em: 14 jul. 2020.



O papiro de Ahmes foi escrito por volta de 1650 a.C. e contém diversos problemas matemáticos, entre eles, um que fala a respeito da área do círculo.

G3

O postulado $\mathbf{R}_3$ também é conhecido como postulado de Euclides. Por causa desse postulado, dizemos que estudamos uma Geometria Euclidiana.

Existem geometrias em que esse postulado não é verdadeiro. Por exemplo, a que tem como modelo uma esfera. Pensando em uma relação com o globo terrestre, os meridianos seriam algumas das retas nesse modelo de geometria.

G4

Relação de Euler

Existe uma relação importante que envolve o número de faces (F), o número de arestas (A) e o número de vértices (V) de um poliedro convexo. Essa relação é válida para todo poliedro convexo e recebe o nome de **relação de Euler**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

$$V - A + F = 2$$

Selo postal da Suíça em homenagem a Leonhard Euler.

G5

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão levam o nome do filósofo grego Platão (428/427-348/347 a.C.), que os utilizava para explicar alguns fenômenos naturais.

Para que um poliedro seja considerado um **poliedro de Platão**, é necessário que as faces do poliedro tenham o mesmo número de arestas, em todos os vértices concorra o mesmo número de arestas e seja válida a relação de Euler. Assim, os poliedros de Platão englobam todos os poliedros regulares convexos, e existem somente cinco classes de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Nos poliedros de Platão, as faces não precisam ser polígonos regulares; assim, nem todo poliedro de Platão é regular.

G6

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Academia de Platão

O filósofo grego Platão (428/427-348/347 a.C.) contribuiu, de forma contundente, para a estruturação da matemática da Grécia antiga por meio de sua escola em Atenas, a Academia.

A Academia de Platão

[...] Perto do ano de 377 a.C., Platão fundou em Atenas uma escola, a *Academia*, que durante um século dominaria a vida filosófica da cidade. A Academia era um espaço destinado ao estudo, pesquisa e ensino da filosofia e da ciência, e talvez tenha sido o primeiro exemplo de instituição de ensino e pesquisa de alto nível. [...] Platão herdou de Pitágoras a ideia de que a matemática estruturava o universo. Tinha, no entanto, uma concepção geométrica, contrastando com a concepção aritmética pitagórica. [...]

No tempo de Platão, três célebres problemas receberam a atenção dos matemáticos [...]. Os três problemas são enunciados a seguir:

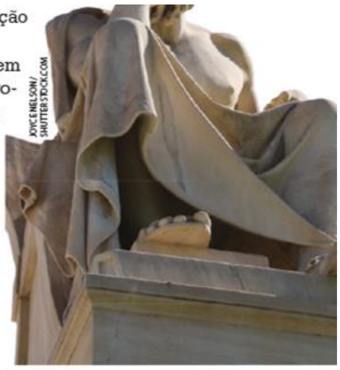
Duplicação do cubo. Encontrar o lado x de um cubo que tem como volume duas vezes o volume de um cubo de lado a. [...] O problema equivale, portanto, a encontrar o valor $\sqrt[3]{2}$ usando régua e compasso.

Trisseção do ângulo. Dado um ângulo θ, encontrar, usando a régua e o compasso, o ângulo $\theta/3$.

Quadratura do círculo. Encontrar o lado x de um quadrado que tenha a mesma área de um círculo de raio r [...], o que equivale a determinar o valor de π usando régua e compasso.

Esses problemas viriam a desafiar os matemáticos por mais de dois milênios, a ponto de a expressão "quadratura do círculo" ter se tornado sinônimo de problema impossível de ser resolvido. Demonstrações para a impossibilidade de resolver esses problemas seriam produzidas apenas no século XIX.

MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 37-38. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 30 jul. 2020.



Estátua de Platão presente na Academia de Atenas, Grécia. Fotografia de 2019.

G7

SAIBA QUE...

O princípio de Cavalieri foi desenvolvido pelo matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

G8

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Arquimedes

A contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento da Matemática foi tão importante que a **Medalha Fields** traz, em seu anverso, a efígie de Arquimedes, com seu nome escrito em grego e a seguinte inscrição: TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRE (Superar as próprias limitações e dominar o universo).

Essa medalha foi proposta pelo professor John Charles Fields (1863-1932) e começou a ser concedida em 1936 aos matemáticos que desenvolvam pesquisas de destaque.

Leia a seguir um texto sobre os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro.

Arquimedes, a esfera e o cilindro

[...] Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres"[...] Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida [...]. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio R, inscrita num cilindro circular reto, de altura $2R$ e cuja base tem raio R (Fig. 1).

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

EDITORIA DE ARTE

Figura I. "... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Então *o volume do cilindro é* $\frac{3}{2}$ *do volume da esfera, e a área total do cilindro também é* $\frac{3}{2}$ *da área da esfera*. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves [...], há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido...

ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 10. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm. Acesso em: 8 ago. 2020.

LEX RUIN DA/SHUTTERSTOCK.COM

Livro de conjuntos e funções

C1

SAIBA QUE...

O diagrama de Venn foi desenvolvido pelo matemático inglês John Venn (1834-1923).

C2

Conjuntos numéricos

Desde os primórdios da civilização, o ser humano teve necessidade de contar. Com o tempo, essa necessidade exigiu a ampliação da ideia de número e, por isso, surgiram diferentes concepções de número em Matemática. Esses números foram organizados em **conjuntos numéricos**.

Aqui estudaremos os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais, dos números irracionais, dos números reais e dos números complexos, com algumas propriedades e aplicações.

C3

Conjunto dos números inteiros

Durante o Renascimento (entre os séculos XIV e XVI), a circulação de dinheiro aumentou por causa da expansão comercial. Isso fez que comerciantes se envolvessem com situações de lucro e prejuízo e, para facilitar a representação dessa movimentação financeira, começaram a utilizar os símbolos + (mais), para representar um valor positivo ou lucro, e − (menos), para representar um valor negativo ou prejuízo.

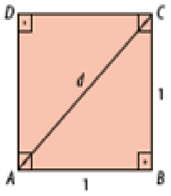
O conjunto formado pelos números positivos, negativos e zero é denominado **conjunto dos números inteiros** e é representado por $\mathbb{Z}$.

C4

Conjunto dos números irracionais

Como comentamos anteriormente, o conjunto dos números racionais parecia ser ideal para todas as situações que envolviam operações aritméticas. E, de fato, durante algum tempo acreditou-se que os números racionais resolveriam todos os problemas que envolviam medições. No entanto, já na época de Pitágoras e seus discípulos, cerca de VI a.C., alguns problemas desafiavam essa teoria, como o apresentado a seguir.

Qual é a medida da diagonal *d* do quadrado *ABCD* cujo lado mede 1 unidade de comprimento?



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Para determinar o valor de *d*, devemos responder à seguinte questão: qual é o número cujo quadrado é igual a 2? Inicialmente, vamos tentar calcular o valor de *d* usando aproximações por números racionais.

$1^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $2^2 = 4$

C5

Alguns números irracionais famosos

O número pi (π)

O número representado pela letra grega π (pi) é um dos números irracionais mais conhecidos no meio matemático. O **número π** é a constante obtida da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Por ser um número irracional, a representação decimal de π é infinita e não periódica: $\pi = 3,141592653...$.

As aproximações do número π já eram conhecidas por muitas civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, que sabiam que essa razão era maior do que 3. Por exemplo, essa constante aparece com o valor 3,16 (na notação atual) no papiro de Ahmes (cerca de 1650 a.C.) e com o valor 3,14 no papiro de Moscou (cerca de 1850 a.C.).

No entanto, a designação dessa constante pela letra grega π apareceu apenas em 1706, quando o matemático inglês William Jones (1675-1749) usou esse símbolo pela primeira vez para expressar essa razão. Euler adotou o símbolo em 1737, o qual rapidamente se tornou uma notação padrão.

Até hoje o número π é motivo de interesse de muitos estudiosos e, com o auxílio de computadores, já é possível determiná-lo com trilhões de casas decimais.

Nos estudos matemáticos do Ensino Médio, o π aparece em medidas de ângulos, na unidade radianos, que serão aplicados nos estudos da Trigonometria, por exemplo. O π também está presente no cálculo de áreas de círculos e nos volumes de corpos redondos.

C6

O número de Euler (*e*)

O número irracional *e*, chamado de **número de Euler**, cujo valor é 2,718281..., tem diversas aplicações dentro da Matemática, bem como em outras ciências como Economia, Biologia e Estatística. Esse número irracional também é chamado de número de Napier, graças aos estudos relacionados aos logaritmos feitos pelo matemático John Napier (1550-1617).

A primeira referência a esse número foi publicada em 1618, em um trabalho sobre logaritmos realizado por esse matemático. O valor da constante não aparece nesse trabalho, há apenas uma lista de logaritmos naturais de diversos números.

Anos depois, Jacob Bernoulli (1655-1705) indicou um possível valor aproximado para esse número, enquanto estudava soluções para problemas de juro composto no campo financeiro.

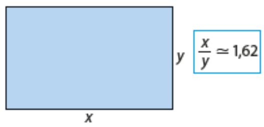
Leonhard Euler (1707-1783) adotou a letra *e* para representar a constante em sua obra **Mechanica**, publicada em 1736, que descreve analiticamente a matemática que rege os movimentos em Física. A verdadeira motivação para a escolha da letra *e* não é conhecida, mas por ela ser a segunda vogal e por a letra *a* já estar sendo utilizada no trabalho, talvez essa seja a explicação para a adoção da letra pelo matemático. O número *e* é bastante utilizado no cálculo de logaritmos e de funções exponenciais e logarítmicas.

C7

A "divisão de um segmento em média e extrema razão" foi um dos assuntos da escola pitagórica, grupo de estudos criado por Pitágoras, responsável por grandes descobertas por volta do século VI a.C. Séculos mais tarde, essa razão ficou conhecida como razão áurea.

A razão áurea também esteve presente nos trabalhos de outros matemáticos, principalmente naqueles desenvolvidos por Fibonacci (1170-1250) e por Luca Pacioli (1445-1517).

Outra denominação para a razão áurea é proporção áurea, considerada harmônica entre dois segmentos de reta, ou seja, é considerada o perfeito equilíbrio, ou proporcionalidade, entre as medidas de dois segmentos de reta. Por exemplo, um retângulo áureo é aquele que possui a razão entre suas medidas igual a ϕ. Nesta figura, o retângulo tem medidas próximas às de um retângulo áureo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A razão áurea foi objeto de grande admiração e estudo desde a Antiguidade, pois é encontrada em diversas formas de arte e na arquitetura, como na pirâmide de Quéops, na arte egípcia; no Parthenon (construído entre 447 e 433 a.C.), na arquitetura grega; na obra **Homem Vitruviano**, de Leonardo da Vinci (1452-1519), entre outras.

Também encontramos a razão áurea em diversos elementos da natureza e, atualmente, ela pode ser encontrada em vários outros contextos, como em projetos de *designers* gráficos para proporcionar equilíbrio na aparência dos personagens digitais ou no trabalho dos cirurgiões plásticos, a fim de obter proporções harmônicas no corpo humano.

SAIBA QUE...

O retângulo áureo será retomado na seção **Explorando a tecnologia** deste Capítulo.

C8

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Incomensurabilidade e os números irracionais

Um dos assuntos que gerou muita discussão entre os estudiosos da Antiguidade foi o conceito de grandezas incomensuráveis e a descoberta de que os números racionais não eram suficientes para medir tudo o que se desejava. Leia o texto a seguir que trata a respeito do assunto.

Grandezas incomensuráveis e números irracionais

[...]

Existem, em Matemática, conceitos que parecem muito simples a uma visão superficial, mas que, submetidos a uma análise mais cuidadosa, revelam aspectos verdadeiramente surpreendentes.

[...] Exploremos alguns fatos notáveis e inesperados, que estão ligados à primeira grande crise do desenvolvimento da Matemática, ocorrida no final do 5º século a.C.

Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos daquela época era a de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos *AB* e *CD*, dizer que a razão $\frac{AB}{CD}$ é o número racional $\frac{m}{n}$, significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento *EF* tal que *AB* fosse *m* vezes *EF* e *CD* *n* vezes esse mesmo segmento *EF*. Na Fig. 1 ilustramos essa situação com $m = 8$ e $n = 5$.

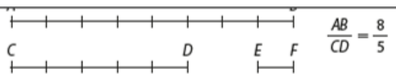


Fig. 1

No tempo de Pitágoras (580 – 500 a.C. aproximadamente) – e mesmo durante boa parte do 5º século a.C. – pensava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta; isto é, dados dois segmentos *AB* e *CD*, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento *EF* contido um número inteiro de vezes em *AB* e outro número inteiro de vezes em *CD*, situação esta que descrevemos dizendo que *EF* é um *submúltiplo comum* de *AB* e *CD*. Uma simples reflexão revela que essa é uma ideia muito razoável. Afinal, se *EF* não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento *EF*, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Na Fig. 2 ilustramos uma situação com segmento *EF* bem menor que o da Fig. 1. O leitor deve ir muito além, imaginando um segmento *EF* tão pequeno que nem possa mais desenhar, para se convencer, pela sua intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrar um submúltiplo comum de *AB* e *CD*.

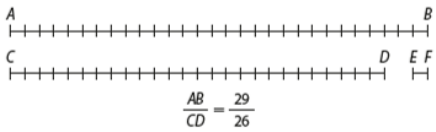


Fig. 2

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Dois segmentos nessas condições são ditos *comensuráveis*, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade *EF*. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos *AB* e *CD* sem unidade comum *EF*, os chamados segmentos *incomensuráveis*. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica, e por isso mesmo a descoberta de grandezas incomensuráveis na Antiguidade representou um momento de crise no desenvolvimento da Matemática.

Foram os próprios pitagóricos que descobriram grandezas incomensuráveis, provavelmente entre 450 e 400 a.C.; e, ao que tudo indica, isto se fez através de um argumento geométrico, [...] demonstrando que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

[...]

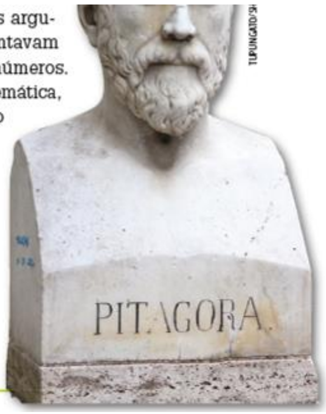
A descoberta dos incomensuráveis representou, no 5º século a.C., uma derrota para os pitagóricos. De fato, para eles o número era a essência de tudo. Eles acreditavam na possibilidade de explicar todos os fenômenos do mundo sensível em termos dos números e de suas relações, tanto na Geometria como na Música, na Astronomia ou na Física, enfim, o número seria a essência última do ser e de todos os fenômenos. Mas por número eles entendiam apenas o que chamamos hoje de "números naturais", ou inteiros positivos: 1, 2, 3, 4, ... Nem as frações eram números, já que elas apareciam como relações entre grandezas da mesma espécie. Agora que haviam sido descobertas grandezas incomensuráveis, estava claro que os números (naturais) eram insuficientes até mesmo para definir a razão entre duas grandezas, o que se constituía num sério entrave à Filosofia Pitagórica.

SHUTTERSTOCK.COM

Ao mesmo tempo em que essas coisas aconteciam, outros argumentos propostos pelos filósofos da época [...] também apontavam dificuldades na suposta harmonia entre a Geometria e os números. Tudo isso culminou numa crise no desenvolvimento da Matemática, crise essa que só foi definitivamente superada com a criação da teoria dos números reais (racionais e irracionais) no século passado, devido, sobretudo aos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916).

[...]

ÁVILA, G. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, n. 05. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/5/3.htm. Acesso em: 14 maio 2020.



TUPUNGATO/SHUTTERSTOCK

Busto em homenagem a Pitágoras, localizado em Roma (Itália).

C9

Conjunto dos números complexos

Por volta do ano 1500, o pensamento corrente era o de que não existia raiz quadrada de número negativo. Por exemplo, ao se depararem com a equação $x^2 - 18x + 82 = 0$, os estudiosos da época simplesmente diziam que ela não podia ser resolvida, pois os cálculos levam a determinar o valor de $\sqrt{-4}$.

Ainda nessa época, por volta de 1545, Girolamo Cardano (1501-1576) publicou em seu livro **Ars Magna** a resolução de equações cúbicas (equações do 3º grau), o que geraria uma disputa com Nicolo Tartaglia (1500-1557) pela autoria da resolução.

Contudo, durante o processo de resolução das equações de 3º grau, um fato chamou a atenção dos estudiosos: algumas equações cúbicas forneciam raízes reais mediante expressões nas quais apareciam raízes quadradas de números negativos. Por exemplo, uma das raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ é 4; no entanto, utilizando a resolução publicada por Cardano, é preciso calcular o valor de $\sqrt{-121}$, que até então era visto como impossível.

C10

Anos mais tarde, no século XVIII, uma notação para esses números foi desenvolvida; o matemático Leonhard Euler (1707-1783) usou em seus trabalhos a letra *i*, denominada **unidade imaginária**, para indicar a raiz quadrada de −1. Essa notação se perpetuou ao longo do tempo e é utilizada até hoje. Assim, definimos:

C11

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O surgimento dos gráficos

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais sobre o uso dos gráficos em Matemática e em outras áreas de conhecimento, bem como os primeiros estudiosos a usar esse tipo de representação em seus trabalhos e a repercussão disso ao longo da história.

BIBLIOTECA NACIONAL, PARIS, FRANÇA.

Nicole d'Oresme (c. 1320-1382) foi um intelectual que viveu no século XIV e atuou em áreas do conhecimento como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais.

Na matemática são utilizados gráficos para visualizar funções. Em outros campos, como o da biologia e da economia, os gráficos são utilizados principalmente para a apresentação de dados. Normalmente, as curvas matemáticas são representadas em um conjunto de dois eixos perpendiculares, denominados x e y, em duas dimensões. Todo ponto do plano pode ser identificado a partir de um "par ordenado" (x, y) que especifica sua distância aos eixos y e x. O mesmo conceito é utilizado para apresentar uma informação em três dimensões, acrescentando um terceiro eixo que se denomina convencionalmente z.

Esse sistema recebe o nome de coordenadas cartesianas em homenagem ao seu inventor, o matemático e filósofo francês René Descartes. Seu contemporâneo, Pierre de Fermat, desenvolveu ao mesmo tempo ideias semelhantes. Entretanto, seria mais lógico conceder o crédito da invenção a Nicole d'Oresme, quem, três séculos antes, utilizou eixos horizontais e verticais para demonstrar graficamente uma lei relativa à distância percorrida por dois objetos que se moviam em velocidades diferentes.

O descobrimento de Descartes do potencial de gráficos foi fundamental para o desenvolvimento da história da matemática, já que relacionou números a figuras geométricas. O que tornou possível representar figuras por meio de equações, unindo a álgebra à geometria para criar o campo da geometria analítica.

BROWN, R. **50 teorías matemáticas: creadoras e imaginativas**. Barcelona: Blume, 2012. p. 108. (Tradução nossa.)

C12

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

DONATAS1205/

Galileu Galilei

Leia a seguir um texto sobre Galileu Galilei e algumas de suas contribuições para a ciência. Observe a expressão que ele usou para descrever a relação entre a distância percorrida por um corpo em queda livre e o tempo de queda. Nessa lei, g é uma constante correspondente à aceleração gravitacional.

[...]

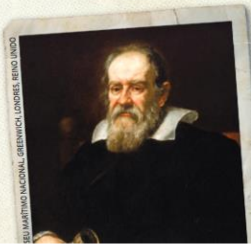
Galileu, filho de um nobre florentino empobrecido, nasceu em Pisa em 1564, no dia em que faleceu Michelangelo. Aos dezessete anos de idade foi encaminhado pelos pais à Universidade de Pisa para estudar medicina. Um dia, quando assistia a um serviço na Catedral de Pisa, seu espírito se distraiu observando o grande lustre de bronze suspenso da elevada abóbada. A lâmpada tinha sido posta para fora a fim de iluminar mais facilmente e, solta, oscilava para cá e para lá com amplitude que decrescia gradualmente. Usando as batidas de seu pulso para marcar o tempo, ele ficou surpreso ao verificar que o período de uma oscilação da lâmpada independia da amplitude do arco de oscilação. Posteriormente, por experiências, ele mostrou que o período de um pêndulo em movimento também independe do peso de sua massa oscilante, dependendo assim apenas do comprimento de sua haste. Relata-se que o interesse de Galileu pela ciência e pela matemática surgiu desse problema e foi estimulado, posteriormente, pela oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade. Como resultado solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e à matemática, campos para pela matemática surgiu desse problema e foi estimulado, posteriormente, pela oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade. Como resultado solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e à matemática, campos para os quais possuía forte talento natural.

Aos vinte e cinco anos de idade Galileu foi indicado professor de matemática da Universidade de Pisa, tendo, segundo consta, realizado experiências públicas sobre a queda dos corpos enquanto exerceu essa função. Conta uma história que, perante uma multidão de estudantes, professores e religiosos, ele deixou cair dois pedaços de metal, um deles com peso dez vezes o do outro, do alto da torre de Pisa. Os dois pedaços chocaram-se contra o chão praticamente no mesmo momento, contrariando assim Aristóteles, segundo quem o corpo mais pesado teria de cair muito mais rapidamente do que o outro. Galileu estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, e que se traduz na fórmula familiar $s = \frac{gt^2}{2}$.

[...]

Devemos a Galileu o moderno espírito científico na forma de uma harmonia entre experiência e teoria. Ele fundou a mecânica dos corpos em queda livre, lançou os fundamentos da dinâmica em geral, e sobre esses fundamentos mais tarde Newton foi capaz de construir uma ciência.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 352-355.



MUSEU MARÍTIMO NACIONAL, GREENWICH, LONDRES, REINO UNIDO

Livro de Estatística

E1

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística

O interesse pelo estudo da probabilidade é bem antigo na história. Leia o texto a seguir e confira.

AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

Busto do matemático italiano Jerónimo Cardano.

O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística

[...]

A teoria da Probabilidade apareceu como ramo da Matemática em meados do século XV, embora tenha se iniciado como ciência empírica muito antes desse período. Suas raízes apareceram principalmente nos jogos e apostas. Há registros de que, por volta do 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar (astragalus) fosse utilizado formando faces como as de um dado. Mesmo antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já havia jogos utilizando ossinhos. Os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados e cartas que, durante a Idade Média, foram proibidos pela Igreja Cristã.

No século XVI, o matemático e jogador italiano, Jerónimo Cardano (1501-1576), decidiu estudar as probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Analisou seriamente as probabilidades de retirar ases de um baralho de cartas e de obter "setes" com dois dados e publicou os resultados dessas pesquisas em um manual para jogadores chamado "Liber de Ludo Aleae" (O livro dos jogos de azar – 1526).

Cardano é considerado iniciador da teoria das probabilidades, pois foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades. Ele afirmou que, ao jogar dados, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis.

Apesar disso, muitos autores atribuem a origem dessa teoria às correspondências trocadas entre Pascal e Fermat em que falavam do objetivo de se obter solução dos problemas de jogos de azar propostos, em 1653, por Chevalier de Méré, conhecido como filósofo do jogo que também interessou-se pelo uso da Matemática para determinar as apostas nos jogos de azar.

Livro de Função e Progressão

F1

SAIBA QUE...

A notação |x| foi introduzida pelo matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

F2

SAIBA QUE...

O número *e*, conhecido como número de Euler, é um número irracional cujo valor é 2,718281... Leonhard Euler (1707-1783) adotou a letra *e* para representar a constante em 1736 em uma de suas obras.

O matemático John Napier (1550-1617) desenvolveu diversos trabalhos envolvendo esse número e, por isso, também é conhecido como número de Napier.

F3

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O texto a seguir apresenta um resumo do progresso científico ocorrido entre os séculos 16 e 17. Nesse contexto, a participação do matemático escocês John Napier no intuito de simplificar cálculos matemáticos foi fundamental para o surgimento do conceito de logaritmo.

A ideia de Napier era verificar, ao escrever um número positivo como uma potência, que seria possível transformar as multiplicações em adições e as divisões em subtrações, exatamente como vimos nas propriedades operatórias do logaritmo.

UNIVERSAL HISTORY ARCHIVE/UIG/BRIDGEMAN IMAGES/FOTOARENA
LE CHERNINA/SHUTTERSTOCK.COM

Matemático escocês John Napier (1550-1617).

A ideia de John Napier e o logaritmo

[...]

O século XVI e o início do século XVII testemunharam uma enorme expansão do conhecimento científico em todos os campos. A Geografia, a Física e a Astronomia, livres de antigos dogmas, mudaram rapidamente a percepção que o homem tinha do universo. O sistema heliocêntrico de Copérnico, depois de lutar durante quase um século contra as resoluções da Igreja, encontrara finalmente a aceitação. A circum-navegação do globo por Magalhães, em 1521, anunciou uma nova era de exploração marítima que não deixaria um canto do mundo sem ser visitado. Em 1569 Gerhard Mercator publicou o seu aclamado novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na arte da navegação. Na Itália, Galileu Galilei estabelecia as fundações da ciência da mecânica, enquanto na Alemanha Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia, de uma vez por todas, do universo geocêntrico dos gregos.

Esses desenvolvimentos envolviam uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos tediosos. A época pedia uma invenção que livrasse os cientistas, de uma vez por todas, desse fardo. Napier aceitou o desafio.

[...]

Sua linha de pensamento era a seguinte: se pudermos escrever **qualquer** número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então **a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes**. Além disso, elevar um número à enésima potência (isto é, multiplicá-lo por si mesmo n vezes) seria equivalente a **somar** o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n [...]. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

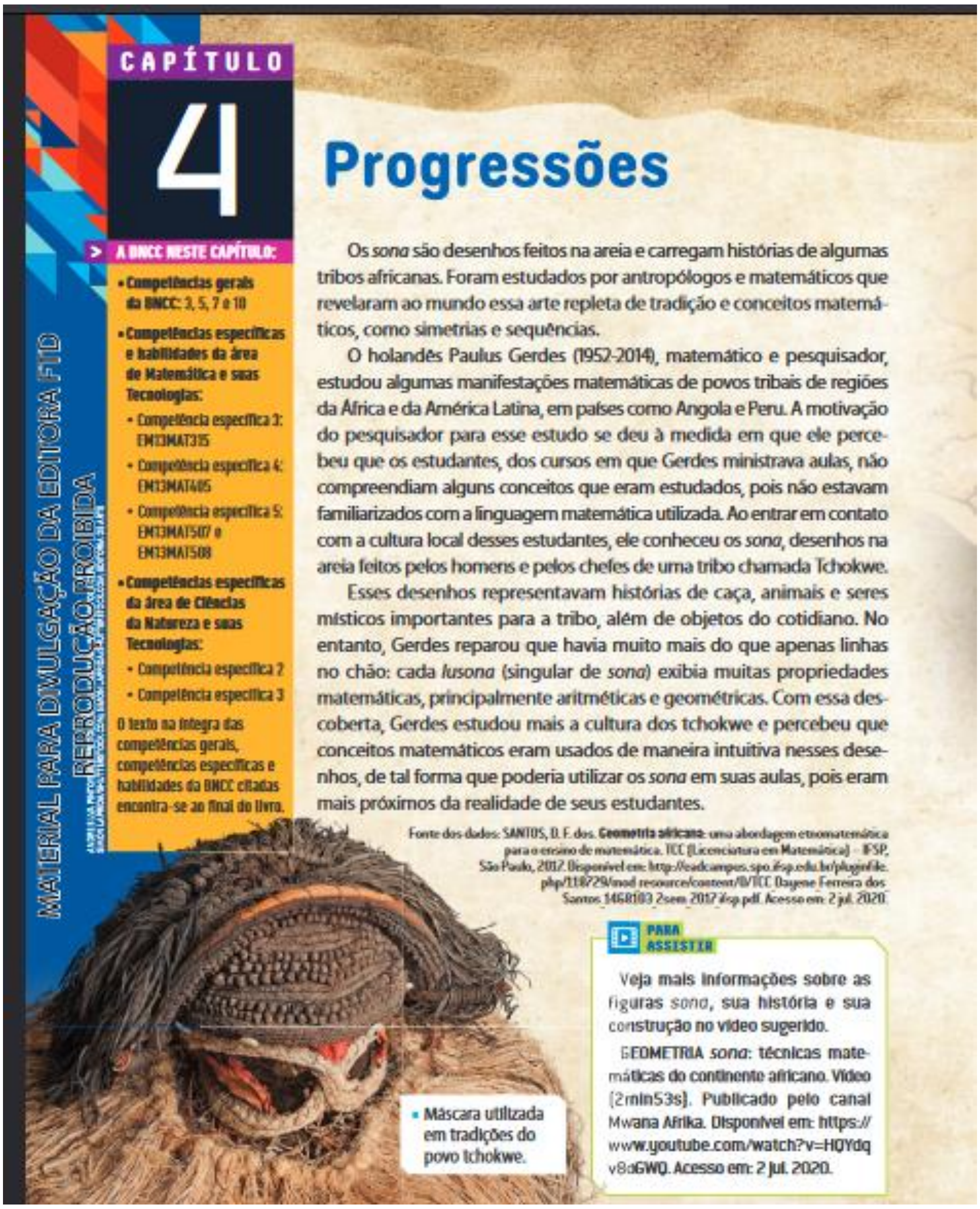
Vamos ilustrar como esta ideia funciona escolhendo como nossa base o número 2. A tabela 1.1 mostra as potências sucessivas de 2, começando com $n = -3$ e terminando com $n = 12$. Suponha que queremos multiplicar 128 por 32. Nós procuramos na tabela os expoentes correspondentes a 32 e a 128 e descobrimos que eles são, respectivamente, 5 e 7. Somando esses expoentes, obtemos 12.

Agora revertemos o processo, procurando o número cujo expoente correspondente é 12; este número é 4096, a resposta desejada. [...]

Tabela 1.1 – Potências de 2

n	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	9	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

F4



CAPÍTULO 4

Progressões

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 3, 5, 7 e 10
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3: EM13MAT315
  - Competência específica 4: EM13MAT405
  - Competência específica 5: EM13MAT507 e EM13MAT508
- **Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 2
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Os *sona* são desenhos feitos na areia e carregam histórias de algumas tribos africanas. Foram estudados por antropólogos e matemáticos que revelaram ao mundo essa arte repleta de tradição e conceitos matemáticos, como simetrias e sequências.

O holandês Paulus Gerdes (1952-2014), matemático e pesquisador, estudou algumas manifestações matemáticas de povos tribais de regiões da África e da América Latina, em países como Angola e Peru. A motivação do pesquisador para esse estudo se deu à medida em que ele percebeu que os estudantes, dos cursos em que Gerdes ministrava aulas, não compreendiam alguns conceitos que eram estudados, pois não estavam familiarizados com a linguagem matemática utilizada. Ao entrar em contato com a cultura local desses estudantes, ele conheceu os *sona*, desenhos na areia feitos pelos homens e pelos chefes de uma tribo chamada Tchokwe.

Esses desenhos representavam histórias de caça, animais e seres místicos importantes para a tribo, além de objetos do cotidiano. No entanto, Gerdes reparou que havia muito mais do que apenas linhas no chão: cada *lusona* (singular de *sona*) exibia muitas propriedades matemáticas, principalmente aritméticas e geométricas. Com essa descoberta, Gerdes estudou mais a cultura dos tchokwe e percebeu que conceitos matemáticos eram usados de maneira intuitiva nesses desenhos, de tal forma que poderia utilizar os *sona* em suas aulas, pois eram mais próximos da realidade de seus estudantes.

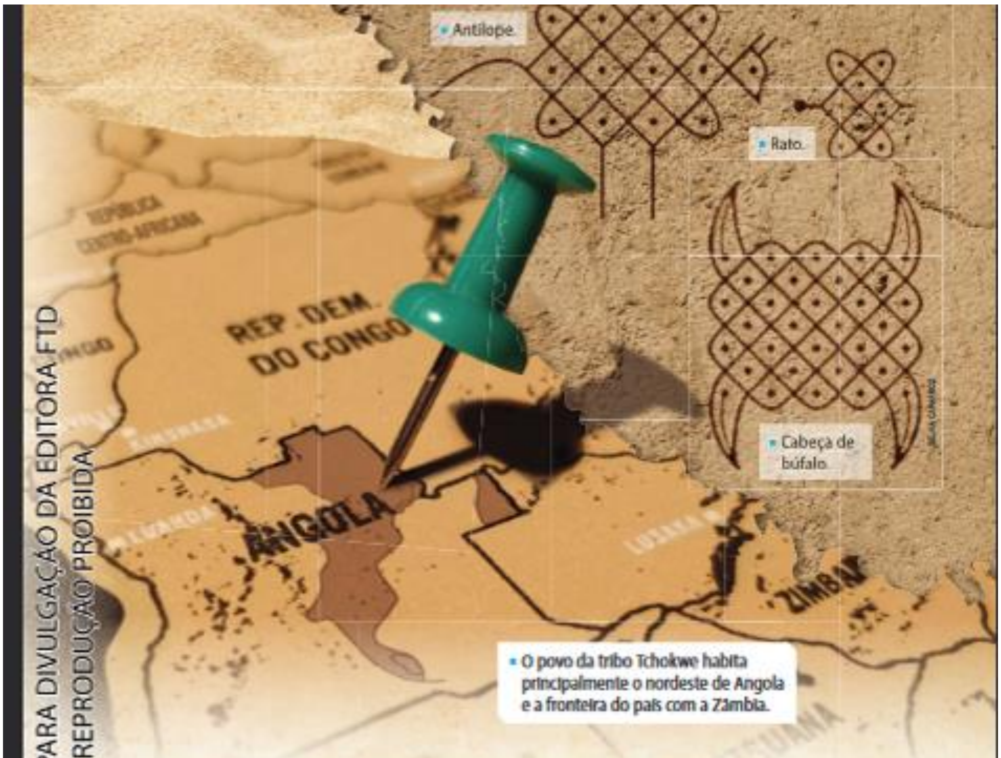
Fonte dos dados: SANTOS, D. F. dos. **Geometria africana**: uma abordagem etnomatemática para o ensino de matemática. TCC (Licenciatura em Matemática) – IFSP, São Paulo, 2017. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/118729/mod_resource/content/0/TCC_Dayene_Ferreira_dos_Santos_1468103_2sem_2017_ifsp.pdf. Acesso em: 2 jul. 2020.

PARA ASSISTIR

Veja mais informações sobre as figuras *sona*, sua história e sua construção no vídeo sugerido.

GEOMETRIA *sona*: técnicas matemáticas do continente africano. Vídeo (2min53s). Publicado pelo canal Mwana Afrika. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HQYdqv8aGWQ. Acesso em: 2 jul. 2020.

- Máscara utilizada em tradições do povo tchokwe.



- O povo da tribo Tchokwe habita principalmente o nordeste de Angola e a fronteira do país com a Zâmbia.

Observe que os *sona* estão em sequência e cada elemento da sequência é desenhado seguindo uma mesma regra. A quantidade de pontos desses *sona* está relacionada com sua posição na sequência.

O *lusona* **1** tem uma linha com duas bolinhas; o *lusona* **2** tem duas linhas com três bolinhas em cada uma; o *lusona* **3** tem três linhas com quatro bolinhas em cada uma e assim por diante.

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item.

1. Vocês já viram algum desenho parecido com esse? Pesquisem para saber mais a respeito dos *sona* e como os chefes das tribos os desenham.
Resposta pessoal.
2. Considerando a sequência de *sona* apresentada, o 4º elemento da sequência deve ter quantas linhas? Quantas bolinhas deve haver em cada uma delas?
4 linhas com 5 bolinhas em cada uma
3. Procurem criar uma regra que determine a quantidade de linhas de um *lusona* e a quantidade de bolinhas em cada linha, de acordo com a posição do elemento na sequência. É possível fazer isso?
Resposta esperada: Sim; para um elemento na posição n, o *lusona* deve ter n linhas com $n + 1$ bolinhas em cada uma.

117

F5

Introdução

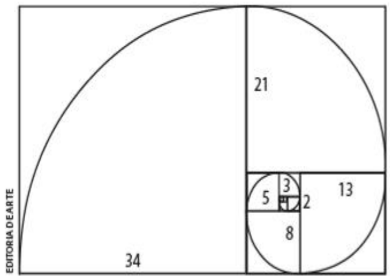
O matemático italiano Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), conhecido como Fibonacci, por volta de 1202, associou uma importante sequência numérica ao crescimento de uma população de coelhos. Nessa sequência, os termos são obtidos pela seguinte regra: o primeiro número é 1, o segundo também é 1, e cada um dos demais termos da sequência é obtido pela adição dos dois termos que o antecedem. A partir dessa regra, obtemos a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), que embora já tivesse sido explorada na Antiguidade, ficou conhecida como **sequência de Fibonacci**.

Existe uma relação interessante entre essa sequência e a razão áurea ($\phi = 1{,}618033...$): à medida que aumentamos a quantidade de termos da sequência de Fibonacci, a razão entre um termo dessa sequência e o termo anterior varia em torno de ϕ, aproximando-se cada vez mais desse valor. Observe:

$\frac{1}{1} = 1;$ → $\frac{2}{1} = 1;$ → $\frac{3}{2} = 1{,}5;$ → $\frac{5}{3} = 1{,}66667...;$ → $\frac{8}{5} = 1{,}6;$ → $\frac{13}{8} = 1{,}625;$ →

→ $\frac{21}{13} = 1{,}61538...;$ → $\frac{34}{21} = 1{,}61905;$ → $1{,}61765;\ \frac{89}{55}$ → $\frac{89}{55} = 1{,}61818...;$ → ...

A forma espiral observada, por exemplo, na concha de um caramujo, no chifre de um carneiro ou na orelha de um ser humano, também guarda relação com essa sequência, uma vez que se assemelham a uma espiral formada por "quartos" de circunferência, cujos raios crescem de maneira proporcional aos números da sequência de Fibonacci. Essa forma espiral, observada nos seres vivos e na natureza, também é encontrada nas artes, na arquitetura e em outras áreas do conhecimento.



Os raios dos arcos de circunferência que compõem essa espiral são, respectivamente, os primeiros nove números da sequência de Fibonacci.

SAIBA QUE...

Por volta de 1202, Fibonacci publicou a obra **Liber abaci**, que, além de expor processos algorítmicos e aritméticos, apresentava problemas muito intrigantes. Um desses desafios, conhecido como "o problema dos coelhos", deu origem à sequência de Fibonacci e objetivava, basicamente, descobrir quantos pares de coelhos poderiam ser gerados em um ano, a partir de um único casal de coelhos.

C6

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O texto a seguir conta a história de quando o matemático, astrônomo e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ainda estudante, supostamente teria calculado mentalmente a soma dos 100 primeiros números naturais não nulos. Leia o texto e tente associar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA, apresentada neste Capítulo, com a fórmula possivelmente utilizada por Gauss no cálculo mental.

Gauss e a soma de uma progressão aritmética

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [...] foi menino prodígio. [...]

Gauss em criança se divertia com cálculos matemáticos; uma anedota referente a seus começos na escola é característica. Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardósia sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardósia sobre a mesa dizendo: "Aí está!". O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5 050, sem outro cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$, presumivelmente pela fórmula $\frac{m \cdot (m + 1)}{2}$. Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick, que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio local, depois na Universidade em Gottingen, onde se matriculou em outubro de 1795.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. 9. reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. p. 343-344. Título original: A history of mathematics.

• Selos comemorativos, em homenagem a Gauss. Respectivamente: Alemanha (1955), Alemanha Oriental (1977) e Nicarágua (1994).

Livro de trigonometria

TR 1

SAIBA QUE...

Tales, matemático e filósofo que viveu no século VI a.C., era natural da cidade de Mileto, na Grécia, por isso ficou conhecido como Tales de Mileto.

TR 2

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Tales de Mileto e as pirâmides do Egito

Vimos o enunciado do teorema de Tales e sua demonstração. Fizemos também algumas atividades utilizando esse resultado matemático. Agora, vamos conhecer um pouco mais sobre Tales de Mileto, o matemático que dá nome a esse teorema. Para isso, leia o texto a seguir.

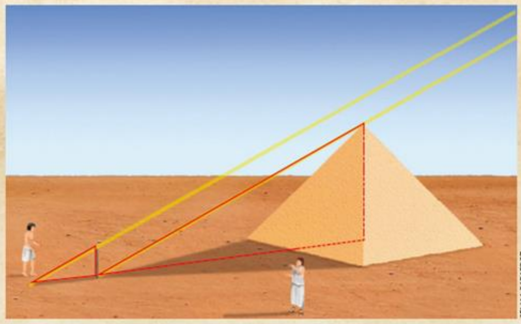
Segundo a tradição a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra [...]. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. [...]

[...] Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 94-95; 115.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 94-95; 115.

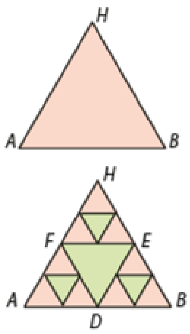


SELMA CAPARROZ

ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK.COM

Representação artística da versão dada por Plutarco, em que Tales usou proporcionalidade e semelhança de triângulos para calcular a altura de uma das pirâmides do Egito. Considerando que os raios de Sol que chegam à Terra têm direções paralelas entre si, eles incidem com a mesma inclinação tangenciando tanto o topo da pirâmide como o da estaca fincada no solo, fazendo que projetem suas sombras. Têm-se, assim, três medidas: os comprimentos da estaca, da sombra da estaca e da sombra da pirâmide. Com isso, calcula-se a altura da pirâmide.

TR3



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Esse fractal é conhecido como triângulo de Sierpinski, em homenagem ao matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

TR 4

Introdução

O significado da palavra trigonometria, do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida", remete ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

A origem da Trigonometria é incerta. No entanto, é possível afirmar que alguns de seus recursos já eram aplicados por antigas civilizações do Mediterrâneo e pela civilização egípcia. Além disso, o desenvolvimento dessa área da Matemática teve grande progresso com as necessidades geradas pelas navegações, Astronomia e Agrimensura.

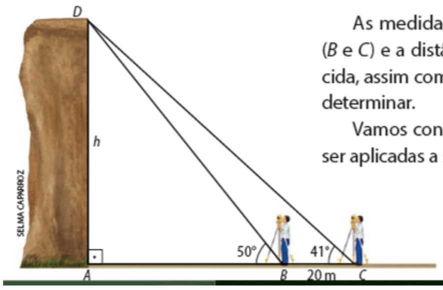
SEE CAPTION/ALAMY/FOTOARENA

Tábua Plimpton 322, uma das tábuas com escritas cuneiformes, oriunda da civilização babilônica e datada de cerca de 1700 a.C. Essa tábua contém uma tabela de ternas pitagóricas, ou seja, conjuntos de três números naturais que são medidas dos lados de um triângulo retângulo. A civilização babilônica adotava a base sexagesimal, utilizada até hoje na medida de ângulos, em graus, e na medida de tempo, em hora, minuto e segundo.

Ao longo dos séculos, diversos estudiosos, como Eratóstenes (276-195 a.C.), Hiparco de Niceia (190-120 a.C.) e Johann Müller, também conhecido como Regiomontanus, (1436-1476), dedicaram-se ao estudo da Trigonometria, dando importantes contribuições para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento desse ramo da Matemática.

Neste Capítulo, vamos estudar a Trigonometria aplicada aos triângulos, embasada na Geometria plana euclidiana. Assim, podemos resolver problemas geométricos que envolvem ângulos e distâncias, como o seguinte:

Usando um teodolito mecânico, um agrimensor mediu o ângulo de observação entre sua posição na linha da base e o topo de um barranco em um terreno acidentado, conforme o esquema.



As medidas foram tomadas de dois locais diferentes (*B* e *C*) e a distância até a base do barranco era desconhecida, assim como a altura dele, que o agrimensor precisava determinar.

Vamos conhecer relações trigonométricas que podem ser aplicadas a situações como essa, de medição indireta.

TR 5

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Razões trigonométricas

Estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica. Agora, vamos ler um texto que conta um pouco como as razões trigonométricas surgiram, há muito tempo, no antigo Egito.

[...] As raízes da Trigonometria

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes**, conhecido como Papiro **Rhind** [...], que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.

Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV**.

SAIBA QUE...

A cotangente de um arco é a razão trigonométrica inversa da tangente.

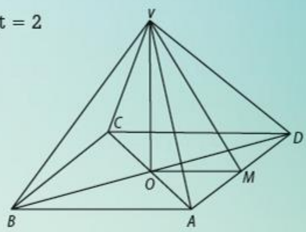
$\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$, com $\text{tg}\,\alpha \neq 0$

Exemplo:

Seja OV = 40 e OM = 80, então o seqt = $\frac{80}{40}$, isto é: seqt = 2

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). [...]



EDITORIA DE ARTE

▪ Figura 1 - O Seqt Egípcio.

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

COSTA, N. M. L. da. A **História da Trigonometria**. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em: 23 jul. 2020.

Livro de Sistemas e Grandezas

S1

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Vimos que o estudo de matrizes contribui para ampliar as estratégias de resolução de sistemas lineares. Nesta seção, apresentamos uma informação histórica sobre um dos matemáticos que também estudaram esses conteúdos, inclusive dando indícios de uma teoria que posteriormente ficaria conhecida como **teoria do determinante de uma matriz**, assunto que você pode pesquisar para ampliar o estudo de matrizes e de sistemas lineares.

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais sobre aspectos históricos associados ao conteúdo de matrizes e sistemas lineares.

A notação de Leibniz

[...]

O estudo de um sistema linear de equações como é conhecido hoje teve início em 1678, com Gottfried W. Leibniz (1646-1716). [...] conta que, em 1693, Leibniz usou um conjunto sistemático de índices como coeficiente de um sistema de três equações lineares em duas incógnitas, x e y. Ele reescreveu as equações eliminando as incógnitas e obteve uma regra para obter o que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares.

[...] Leibniz explicou que, para resolver o problema da eliminação das incógnitas do sistema

$$\begin{cases} a+bx+cy=0 \\ d+ex+fy=0 \\ g+hx+ky=0 \end{cases}$$

ele as reescreveu na forma

$$\begin{cases} 10+11x+12y=0 \\ 20+21x+22y=0 \\ 30+31x+32y=0 \end{cases}$$

▪ Leibniz também desenvolveu trabalhos em Direito, Religião, Política, História, Literatura, Lógica, Metafísica e Filosofia.

sendo o primeiro número o índice da linha da posição do coeficiente no sistema e o segundo, da coluna. Como forma de avaliar se o sistema teria solução, estabeleceu como condição necessária a igualdade

$$10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 =$$
$$= 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30$$

Este marco é considerado [...] o primeiro do desenvolvimento da teoria dos determinantes. [...] uma das principais contribuições de Leibniz foi justamente a notação, que combinava dois números, tal como no sistema cartesiano, dando a posição, nas equações, do número ao qual se referia. [...]

Uma aplicação mais precisa e abrangente do que seria conhecido como determinante seria proposta quase 60 anos depois pelo matemático Gabriel Cramer. O trabalho, que foi bastante divulgado à época, representa um avanço no estudo de álgebra linear e levaria ao que conhecemos hoje como Regra de Cramer. [...]

[...]

S2

Luca Pacioli – um dos precursores dos processos contábeis

O Renascimento foi um período importante na história da humanidade por favorecer o desenvolvimento da criatividade humana em diversas áreas. Considerando as inúmeras ideias que surgiram nesse período, podemos destacar as novas concepções na Astronomia, a noção da perspectiva nas Artes, estudos sobre o comportamento da luz, o desenvolvimento da Álgebra e dos processos contábeis, entre outros.

Nessa perspectiva, o papel do frade Luca Pacioli foi importante pelas inúmeras contribuições para a Matemática e para a área contábil.

- Retrato de Luca Pacioli (1445-1514), frade franciscano nascido na região da Toscana, onde hoje é território italiano.

THEERADECH SANIN/SHUTTERSTOCK.COM

[...]

[...] Pacioli, que foi professor de matemática e colaborador de Leonardo da Vinci, publicou em 1494 o livro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni di Proporzionalita* (Compêndio de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade), escrito em idioma vernacular. A obra abordava quatro assuntos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar e contabilidade. O livro, síntese de boa parte do conhecimento matemático de então, foi o primeiro livro impresso a tratar de álgebra, retomando a classificação das equações de segundo grau dos árabes. No que diz respeito à contabilidade, introduziu o chamado *método das partidas dobradas*, também conhecido como método veneziano. Esse é o sistema padrão usado em empresas e outras organizações para registrar transações financeiras, em que todos os movimentos são lançados em pelo menos duas contas, com o total de débitos devendo se igualar ao total de créditos. A contribuição de Pacioli veio a atender algumas necessidades de técnicas aritméticas surgidas com o desenvolvimento do sistema bancário nas cidades mercantis italianas.

[...]

MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 90. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 13 jul. 2020.

SAIBA QUE...

Embora o método de partidas dobradas seja um pensamento aparentemente simples, no qual, em síntese, não existe devedor sem credor, é aplicado até hoje em instituições financeiras, no comércio e em empresas em geral, sendo a base teórica que desenvolve as Ciências Contábeis.

S3

A Matemática e a Cartografia

Cartografia, que é a arte de fazer mapas, tem uma história antiga, que remonta a milênios antes de Cristo. Nos tempos modernos, ou seja, a partir da segunda metade do século XV, a elaboração de mapas tornou-se uma atividade de interesse crescente, principalmente devido às grandes navegações, que exigiam mapas cada vez mais confiáveis. E, por serem mapas de grandes regiões, se não de todo o globo terrestre, os cartógrafos procuravam descobrir a maneira de fazer um tal mapa de forma a reproduzir as diferentes localidades do globo preservando, com exatidão, na mesma escala, as várias distâncias entre elas. Isso perdurou até que, em meados do século XVIII, o grande matemático Leonardo Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse intento. [...]

Um outro momento importante da Cartografia do século XVI foi a construção de um mapa com características especiais, muito apropriadas às navegações, o chamado mapa de Mercator.

[...]