

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

União da Vitória,
2023

**CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS ANIMADOS NO
GEOGEBRA EM CONTEXTO DE SALA DE AULA DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

Adrieli Cristine Bueno

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA EM CONTEXTO
DE SALA DE AULA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Adrieli Cristine Bueno

Orientadora:
Profa. Dra. Maria Ivete Basniak
Coorientadora:
Profa. Dra. Daysi Julissa García-Cuéllar
Apoio: Capes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa Tecnologia, diversidade e cultura em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

União da Vitória
Abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bueno, Adrieli Cristine

Construção de cenários animados no GeoGebra em
contexto de sala de aula do Ensino Fundamental /
Adrieli Cristine Bueno. -- União da Vitória-PR, 2023.
179 f.: il.

Orientador: Maria Ivete Basniak.

Coorientador: Daysi Julissa García-Cuéllar.

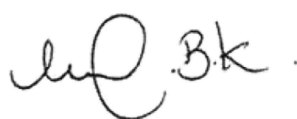
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) --
Universidade Estadual do Paraná, 2023.

1. Aproximação Instrumental. 2. Educação
Matemática. 3. Tecnologias na educação. 4. Função. I -
Basniak, Maria Ivete (orient). II - García-Cuéllar,
Daysi Julissa (coorient). III - Título.

Adrieli Cristine Bueno

CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA EM CONTEXTO
DE SALA DE AULA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Comissão Examinadora:



Dra. Maria Ivete Basniak – Presidente da Comissão Examinadora
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ



Dra. Daysi Julissa García-Cuéllar – Subpresidente da Comissão Examinadora
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ



Dra. Marilena Bittar – Membro da Banca
UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL



Dra. Veridiana Rezende - Membro da Banca
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

Resultado: Aprovada

Dedico este trabalho às pessoas fortes e corajosas.

AGRADECIMENTOS

Com toda certeza consegui realizar esta pesquisa porque havia pessoas fantásticas me apoiando e incentivando a todo momento.

Agradeço a Deus pela vida e por me permitir realizar sonhos.

A minha família, que sempre confia em mim e compreendeu os momentos de ausência. Quero agradecer, em especial, a minha amada mãe, sempre carinhosa e pronta para me ajudar: não sei o que seria de mim sem você. Ao meu querido pai, que faz o possível e o impossível para me ver bem e me incentiva sempre a ir além. As minhas preciosas irmãs, Kelyn e Chaiane, que me ampararam, aconselharam e me acalmaram durante esse período: amo vocês de todo o coração, vocês me inspiram. Deus não poderia ter me dado uma família melhor. Vocês foram minha base durante todo esse período. Obrigada.

Ao meu amigo e amor, Giovani. Obrigada pela paciência, carinho, parceria e apoio incondicional. Sua generosidade, humildade e humanidade me inspiram.

A minha querida orientadora, professora Dra. Maria Ivete Basniak, que acreditou em mim mesmo quando eu não acreditei. Mostrou-me como ser mais humana com as pessoas, a ser uma pessoa e profissional melhor. Sou imensamente grata pela confiança, amizade e paciência durante todos esses anos. Você é uma inspiração. Só tenho a agradecer por tudo.

A minha querida coorientadora, professora Dra. Daysi Julissa García-Cuéllar, que mesmo de longe não mediu esforços para me auxiliar durante esse processo. Admiro muito você e sou muito grata por poder contar com seu olhar sobre a pesquisa.

A minha banca de qualificação e defesa, professora Dra. Marilena Bittar e professora Dra. Veridiana Rezende: é uma honra ter vocês avaliando meu trabalho. Seus apontamentos e sugestões foram valiosos para que esta pesquisa fosse desenvolvida. Muita obrigada.

A minha panelinha, meus amigos queridos, Camila, Luan e Jaqueline: não sei o que seria de mim sem amizade e apoio de vocês. Sou imensamente grata ao universo por ter vocês na minha vida. Agradeço em especial a Camila, que esteve comigo durante todo esse período e não mediu esforços para me ajudar. Vocês me inspiram a ser melhor.

A Taimara: sua amizade e motivação foram fundamentais.

Aos integrantes do projeto Universidade Sem Fronteiras, Bruna, Eliseu e Felipe, que me ajudaram muito durante as intervenções com os alunos. A ajuda de vocês foi essencial nesse processo. Contem sempre comigo.

A professora Andrea, pelo apoio; ao professor Fabiano, por disponibilizar as aulas com os alunos; aos alunos, que aceitaram o convite para participar dos encontros; aos professores Dr. Dion e Dr. Felipe, pelo olhar sobre a pesquisa; ao professor Me. Juarez, por disponibilizar suas aulas para o estágio de docência.

Ao grupo de pesquisa GEPTeMatE (Grupo de Estudos sobre Práticas e Tecnologias na Educação Matemática e Estatística) que, por meio de discussões coletivas, contribuíram significativamente para o desenvolvimento da pesquisa. Quero agradecer em especial ao professor Dr. Everton José Goldoni Estevam: sua integridade e comprometimento com a educação me motivam a ser melhor.

Aos professores do PRPGEM, que contribuíram com minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio à pesquisa.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que esse sonho se realizasse. Muito obrigada.

RESUMO

Nesta pesquisa, que envolve a construção de cenários animados no GeoGebra, tomou-se como referencial teórico a Aproximação Instrumental (AI) que, articulando a abordagem instrumental e a Teoria Antropológica do Didático, é considerada uma teoria necessária quando há interação com as tecnologias digitais, pois considera a relação instrumental entre sujeito e objeto no processo de desenvolvimento de uma tarefa. Os cenários animados no GeoGebra, construções que possuem movimento e constituem uma cena animada, são usados neste trabalho para abordar o conteúdo de função afim. Assim, o presente trabalho teve por objetivo investigar a relação instrumental entre as características da função afim e as técnicas instrumentadas empregadas no GeoGebra na construção de cenários animados por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, foram usados os pressupostos metodológicos da Pesquisa de Desenvolvimento, que possibilita investigar a integração de tecnologias na educação em contextos reais. Considerando as características dessa metodologia, a pesquisa foi *teoricamente orientada*, pois foi realizado um estudo teórico sobre a AI; foram realizadas *intervenções*, antecipadamente planejadas, com os alunos de duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental de um colégio no Paraná e contou-se com a *colaboração* de outros pesquisadores para propor a construção de cenários animados no software GeoGebra envolvendo o conteúdo de função afim; por ser *fundamentalmente responsiva*, durante o período de intervenção foram realizadas reuniões semanais entre os colaboradores da pesquisa para que fossem feitos os ajustes necessários; e por ser *iterativa*, após obter o resultado de cada etapa, as próximas ações foram (re)planejadas e melhoradas para que se construíssem soluções adequadas. Para apresentar e discutir os resultados, esta pesquisa foi organizada no formato *multipaper* e contou com um capítulo teórico sobre a AI. O primeiro artigo buscou elencar o processo de construção do cenário animado *Abelha simples* e discutir os elementos da AI, como tarefa, técnica instrumentada, esquemas e dimensões da instrumentação e instrumentalização. O segundo artigo relata a construção do cenário animado *Abelha simples* desenvolvido pelos alunos por meio da dialética esquema-técnica discutida dentro da AI. Por fim, no terceiro artigo, considerando as dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, a construção do cenário animado próprio desenvolvido por um aluno foi analisada. Portanto, a partir das características da função afim, como constante, crescente e decrescente, idealizou-se um processo de construção para o cenário animado *Abelha simples* (artigo 01) que, ao ser proposto aos alunos do Ensino Fundamental, foram verificadas as técnicas instrumentadas empregadas por eles, a manifestação de noções referentes às características da função afim, através dos esquemas de ação instrumentada (artigo 02), e que por meio da construção de cenários animados, o artefato GeoGebra transformou-se em diferentes instrumentos (artigo 03). Dessa forma, compreende-se que as situações propostas aos alunos foram favoráveis para que, futuramente, o conceito de função e as características da função afim sejam compreendidas por eles, além de evidenciar aspectos pertinentes à interação entre aluno e software.

Palavras-chave: Aproximação Instrumental; Educação Matemática; Tecnologias na educação; Função.

ABSTRACT

In this research, which involves construction of animated scenarios in GeoGebra, Instrumental Approach (IA) was taken as theoretical reference, which articulating instrumental approach and Anthropological Theory of Didactics, is considered a necessary theory when there is interaction with digital technologies, as it considers instrumental relationship between subject and object in the process of developing a task. Animated scenarios in GeoGebra, constructions that have movement and constitute an animated scene are used in this work to address the affine function content. Hence, this work had as aim at investigating instrumental relationship between affine function characteristics and instrumented techniques used in GeoGebra in the construction of animated scenarios by Elementary School 8th grade students. Thereunto, methodological assumptions of Development Research were used, which makes it possible to investigate integration of technologies in education in real contexts. Considering characteristics of this methodology, research was *theoretically oriented* because a theoretical study was carried out on IA; planned in advance, *interventions* were performed with students in two Elementary School 8th grade groups of a school in Paraná, and there was *contribution* by other researchers to propose the construction of animated scenarios in GeoGebra software involving affine function content; because it is *fundamentally responsive*, weekly meetings were held with research collaborators during the intervention period to make the necessary adjustments; and because it is *iterative*, after obtaining each stage result, next actions were (re)planned and improved to build adequate solutions. To present and discuss results, this research was organized in a multi-paper format and has a theoretical chapter on IA. First paper searched for list the construction process of *Simple Bee* animated scenario and discuss IA elements, such as task, instrumented technique, schemes, and dimensions of instrumentation and instrumentalization. Second paper reports construction of *Simple Bee* animated scenario by students through scheme-technical dialectic discussed within IA. Finally, third paper, considering artifact-instrument and instrumentation-instrumentalization dialectics, analyzes construction of an animated scenario developed by a student him/herself. Therefore, from affine function characteristics, such as constant, increasing and decreasing ones, a construction process was idealized for *Simple Bee* animated scenario (paper 01), which when proposed to Elementary School students, instrumented techniques employed by them were verified, manifestation of notions referring to affine function characteristics through instrumented action schemes (paper 02), and which via animated scenarios construction GeoGebra artifact was transformed into different instruments (paper 03). Thereafter, it is understood that the situations proposed to students were favorable so that in the future the function concept and affine function characteristics would be understood by them, further highlighting relevant aspects of interaction between student and software.

Keywords: Instrumental approach; Mathematics education; Technologies in education; Function.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Relações entre esquema e técnica, gesto e invariantes operatórios	48
Figura 2 - Cenário animado <i>Abelha</i>	74
Figura 3 - Representação de um esquema de ação instrumentada	92
Figura 4 - Cenário animado <i>Abelha</i>	95
Figura 5 - Junior: restringindo o domínio das funções.....	104
Figura 6 - Tela projetada	105
Figura 7 - Relação entre artefato-instrumento.....	115
Figura 8 - De artefato para instrumento.....	117
Figura 9 - Cenário <i>Balão</i>	120
Figura 10 - Funções criadas pelo aluno para o caminho do balão.....	122
Figura 11 - Caixa de erro que aparece na tela	125
Figura 12 - Função afim caracterizada como decrescente com o domínio limitado	126
Figura 13 - Cada função afim com o domínio limitado	127
Figura 14 - Função por partes.....	129
Figura 15 - Ponto B	131
Figura 16 - Ponto A e B.....	132
Figura 17 - Controle deslizante	133

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Planejamento das aulas	25
Quadro 2 - Efetivação da intervenção parte I.....	28
Quadro 3 - Efetivação da intervenção parte II.....	29
Quadro 4 - Organização dos artigos que compõem a pesquisa	33
Quadro 5 - Organização das turmas	94
Quadro 6 - Etapas da construção do cenário animado <i>Abelha</i>	96
Quadro 7 - Relação entre esquema-técnica na construção da função constante	98
Quadro 8 - Relação entre esquema-técnica na construção da função afim crescente	100
Quadro 9 - Relação entre esquema-técnica na construção da função afim com o coeficiente linear	101
Quadro 10 - Relação entre esquema-técnica na construção da função afim decrescente com o coeficiente linear.....	103
Quadro 11 - Relação entre esquema-técnica na limitação da representação gráfica de cada função afim.....	106
Quadro 12 - Relação entre esquema-técnica na construção da função por partes.....	107
Quadro 13 - Relação entre esquema-técnica na animação da figura da abelha.....	108
Quadro 14 - Relação entre instrumentação-instrumentalização na construção do caminho do balão	124
Quadro 15 - Relação entre instrumentação-instrumentalização na delimitação do caminho do balão	128
Quadro 16 - Relação entre instrumentação-instrumentalização na união do caminho do balão	130
Quadro 17 - Relação entre instrumentação-instrumentalização ao inserir a figura do balão .	130
Quadro 18 - Relação entre instrumentação-instrumentalização ao conectar pontos da figura, controle deslizante e função	134
Quadro 19 - Relação entre instrumentação-instrumentalização ao finalizar o cenário animado	135
Quadro 20 - Elementos da AI presentes na construção dos cenários animados <i>Abelha simples</i> e <i>Balão</i>	143

LISTA DE SIGLAS

AEE-I	Atendimento Educacional Especializado - Integral
AH/SD	Altas Habilidades/Superdotação
AI	Aproximação Instrumental
EA	Equipe(s) Assistente(s)
G1	Grupo 1
G2	Grupo 2
G3	Grupo 3
G4	Grupo 4
GEPTEMatE	Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística
LIFE	Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores
LIM	Laboratório de Informática do curso de Licenciatura em Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
SRM II	Sala de Recursos Multifuncional II
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná
USF	Universidade Sem Fronteiras

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
Pesquisas sobre a construção de cenários animados	16
Nomenclaturas e definições: mudanças necessárias.....	18
Inquietações e justificativas desta pesquisa	20
Objetivo geral	21
Fundamentos metodológicos	21
Tecnologia e a Aproximação Instrumental.....	22
Pesquisas atuais	23
Intervenção	24
Planejamento	24
Organização intervenção	26
Efetivação da intervenção.....	28
Colaboração	31
Reuniões semanais.....	31
Iterativa	32
Escolha pela opção <i>Multipaper</i> e organização da pesquisa.....	32
REFERÊNCIAS	35
1 CAPÍTULO TEÓRICO.....	38
1.1 Introdução	38
1.2 Teoria Antropológica do Didático	38
1.2.1 Tarefa.....	39
1.2.2 Técnica	39
1.2.3 Tecnologia	40
1.2.4 Teoria.....	41
1.2.5 Praxeologia	41
1.3 Abordagem instrumental	42
1.3.1 Esquemas	43
1.3.2 Artefato.....	49
1.3.3 Instrumento.....	50
1.3.4 Gênese Instrumental	52
1.3.5 Instrumentalização.....	52

1.3.6 Instrumentação	53
1.4 Aproximação Instrumental	55
1.4.1 Técnicas instrumentadas e seus valores	58
1.4.2 Diferenças entre técnicas no papel e lápis e técnicas usados nos artefatos tecnológicos	59
CONSIDERAÇÕES	60
REFERÊNCIAS	61
2 FUNÇÃO AFIM E SUAS CARACTERÍSTICAS ABORDADAS POR MEIO DO CENÁRIO ANIMADO ABELHA NO GEOGEBRA	65
2.1 Introdução	66
2.2 Aproximação Instrumental	67
2.3 Função afim e o GeoGebra	70
2.4 Pressupostos metodológicos	73
2.5 Cenário animado Abelha construído utilizando prioritariamente função afim	73
2.5.1 Criando a base para o trajeto da abelha	74
2.5.2 Restringindo o domínio de cada função e função por partes	78
2.5.3 Animação do cenário	81
2.6 Considerações finais	84
2.7 Agradecimentos	85
REFERÊNCIAS	85
3 CENÁRIO ANIMADO ABELHA NO GEOGEBRA E A DIALÉTICA ESQUEMA-TÉCNICA.....	88
3.1 Introdução	88
3.2 Aproximação Instrumental: dialética esquema-técnica	89
3.3 Contexto e pressupostos metodológicos	92
3.4 Construção e análise.....	97
3.4.1 Função constante	97
3.4.2 Função afim caracterizada como crescente (taxa de variação)	99
3.4.3 Função afim caracterizada como crescente (coeficiente linear).....	100
3.4.4 Função afim caracterizada como decrescente	102
3.4.5 Restringindo o domínio do gráfico de função	103
3.4.6 Função por partes	106
3.4.7 Pontos da figura animados	107
3.5 Considerações	109

REFERÊNCIAS	111
4 AS DIALÉTICAS ARTEFATO-INSTRUMENTO E INSTRUMENTAÇÃO- INSTRUMENTALIZAÇÃONA CONSTRUÇÃO DO CENÁRIO ANIMADO BALÃO	113
4.1 Introdução	113
4.2 Dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização	114
4.3 Contexto e pressupostos metodológicos	117
4.4 Análise da construção do cenário Balão	120
4.4.1 Construindo a base do percurso do balão	120
4.4.2 Restringindo o percurso do balão	125
4.4.3 Unindo as partes do percurso do balão.....	129
4.4.4 Animação do balão.....	130
4.4.5 Cenário da construção	134
4.5 Considerações	135
REFERÊNCIAS	137
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	139
REFERÊNCIAS	147
APÊNDICE I – ROTEIRO CONSTRUÇÃO-DISCUSSÃO CENÁRIO BARCO E CHUVA	154
APÊNDICE II – ROTEIRO CONSTRUÇÃO-DISCUSSÃO CENÁRIO A PRINCESA E O SAPO (FUNÇÃO CRESCENTE)	157
APÊNDICE III – ROTEIRO CONSTRUÇÃO-DISCUSSÃO CENÁRIO A PRINCESA E O SAPO (FUNÇÃO DECRESCENTE E POR PARTES).....	162
APÊNDICE IV – ROTEIRO CONSTRUÇÃO-DISCUSSÃO CENÁRIO ABELHA SIMPLES.....	167
APÊNDICE V – ROTEIRO CONSTRUÇÃO-DISCUSSÃO CENÁRIO ABELHA COMPLETA	173
APÊNDICE VI – QUESTÕES SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DA FUNÇÃO AFIM	177

INTRODUÇÃO

Aproximação da pesquisadora com a construção de cenários animados

O GeoGebra é um software que pode ser usado como ferramenta educacional no contexto do ensino da Matemática, pois combina álgebra, geometria e gráficos, por exemplo, e permite a construção de vários objetos matemáticos (SCALDELA, 2014). Por meio das construções feitas nesse software, podem ser favorecidas investigações sobre os conteúdos matemáticos que são representados nas janelas disponíveis (BASNIAK, 2020). Ao comparar o uso do software com outros recursos, como régua e compasso, ele oferece vantagens, pois a construção de objetos é realizada de forma precisa, rápida e prática.

Uma possibilidade que chama a atenção no GeoGebra é a disponibilidade de atribuir dinamismo aos objetos criados: eles podem ser manipulados ou animados nas construções. Uma das maneiras de fazer isso é usando a ferramenta controle deslizante, pois ela determina uma variável numérica dentro de um intervalo pré-estabelecido pelo usuário, que varia de acordo com um incremento, também determinado pelo usuário. Quando um objeto está atrelado a um controle deslizante, e o usuário move/anima o referido controle, confere movimento e dinamicidade à construção final.

Em 2015, acadêmicos do curso em Licenciatura em Matemática da UNESPAR *campus* União da Vitória – PR, enquanto bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), começaram a desenvolver construções no software GeoGebra, denominadas animações. Essas construções representavam situações cotidianas, como um menino quicando uma bola, ou fenômenos naturais, como a chuva (BASNIAK, 2020).

No ano seguinte, a professora da Sala de Recursos Multifuncional II (SRM II) de um colégio de União da Vitória, que funciona no mesmo prédio da UNESPAR *campus* União da Vitória, procurou a professora coordenadora do PIBID para solicitar atividades de matemática a serem desenvolvidas com os alunos com indicativo de altas habilidades/superdotação (AH/SD). Entre esses alunos, havia alguns com indicativo de AH/SD na área de Exatas.

Considerando que já haviam sido desenvolvidas animações no GeoGebra utilizando conteúdos matemáticos por meio do PIBID, considerou-se que seria uma via interessante para estimular o desenvolvimento e a aprendizagem desses alunos. Então, em agosto de 2017, pela primeira vez, foi trabalhada a construção de animações no GeoGebra com a turma da SRM II, por meio de uma pesquisa de iniciação científica que a professora coordenadora do PIBID orientava. Essas construções abordavam conteúdos matemáticos que os alunos ainda não

havam estudado formalmente na sala de aula, como relações trigonométricas, plano cartesiano e função (BORUCH; BASNIAK, 2018; BASNIAK, 2020).

Devido à colação de grau, o bolsista que realizava a pesquisa precisou deixá-la, então houve sua substituição. Quem assumiu a pesquisa foi a autora deste trabalho, que continuou participando de outras pesquisas de iniciação científica com diferentes objetivos, mas todas envolvendo animações, agora denominados *cenários animados*, conforme discutido na próxima seção.

A autora deste trabalho fazia a proposta, semanalmente, de construções de cenários animados no GeoGebra aos alunos do Ensino Fundamental e Médio. Tais construções envolviam outros diversos conteúdos, como círculo, circunferência, lógica matemática, ângulo, função afim, função quadrática, função trigonométrica, função exponencial, função por partes, entre outros.

Os encontros eram realizados no laboratório de informática do curso de licenciatura em matemática, no horário do contraturno das aulas dos alunos, e duravam aproximadamente duas horas e trinta minutos. Quando a construção do cenário animado envolvia conteúdos que ainda não haviam sido abordados por meio de outras construções, a autora deste trabalho desenvolvia a construção com os alunos e discutia os conteúdos envolvidos na construção. Quando a construção envolvia conteúdos que os alunos já haviam tido contato, eles eram incentivados para que realizassem sozinhos a construção, sendo auxiliados quando necessário.

Nesse sentido, além de desenvolver a pesquisa, a bolsista/autora deste trabalho atuava como professora dos alunos, promovia investigações e explorações sobre os conteúdos por meio das construções, planejava semanalmente quais seriam os próximos cenários, preparava tarefas e materiais extras quando necessário, mediava as discussões sobre os elementos matemáticos presentes na construção dos cenários, além de auxiliar os alunos durante os encontros e incentivar sua participação.

Até 2018, somente uma turma de alunos participava da pesquisa. Em 2019, a pesquisa foi ampliada por meio de outras pesquisas de iniciação científica e envolvendo outros dois graduandos. Dessa forma, até julho de 2020 havia três pesquisas sendo desenvolvidas, cada uma com seus objetivos, mas todas envolviam a construção de cenários animados por alunos com indicativo de AH/SD (BUENO; BASNIAK, 2019; SANTOS; BASNIAK, 2021; BASNIAK; CARNEIRO, 2021).

Os encontros presenciais com os alunos com indicativo de AH/SD ocorreram até novembro de 2019. Em 2020 não houve encontros com os alunos por causa da pandemia da COVID-19.

Com base em pesquisas realizadas (BUENO; BASNIAK, 2020), identificou-se que com as construções de objetos matemáticos no software podem emergir investigações, explorações e discussões sobre as características e peculiaridades das ferramentas matemáticas envolvidas, bem como acerca dos conteúdos e conceitos matemáticos que estão sendo representados. As reflexões e apontamentos durante o processo de construção dos cenários contribuíram de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos desses alunos (BASNIAK, 2020).

No decorrer da última pesquisa de iniciação científica (2019-2020), a autora deste trabalho teve o primeiro contato com a abordagem instrumental (RABARDEL, 1995). Por meio desta pesquisa em particular, foi possível identificar que as construções dos cenários animados no GeoGebra favoreceram e mobilizaram conhecimentos matemáticos de um aluno, assim como foram evidenciadas as dimensões da gênese instrumental durante a construção do cenário animado (BUENO; BASNIAK, 2020).

Nomenclaturas e definições de cenários animados: mudanças necessárias

Em 2017 e 2018, as construções eram denominadas apenas *animações* no software GeoGebra (BORUCH; BASNIAK, 2018), pois alguns elementos criados no software deveriam estar relacionados ao controle deslizante para ter o movimento desejado, não era necessário haver contexto ou um cenário. Com o desenvolvimento da pesquisa de iniciação científica, em 2019, as construções sofreram modificações: tinham características das animações, mas deveria haver um cenário ao fundo e um contexto real na construção final, como um submarino submergindo e depois emergindo do fundo do mar, ou um balão subindo, voando e depois descendo ao chão, por exemplo. Nesse sentido, as construções passaram a ser chamadas de animações e cenários (BUENO; BASNIAK, 2019).

Nos encontros semanais com os alunos no período em que a autora deste trabalho desenvolvia as pesquisas de iniciação científica, após apresentar a construção que seria feita na aula, os alunos eram incentivados para que construíssem suas versões da animação usando sua criatividade e imaginação. Assim, algumas produções dos alunos não representam mais situações cotidianas ou reais, pois eles criavam versões imaginárias e espontâneas para o cenário apresentado inicialmente. Entretanto, mesmo que as construções tivessem sofrido algumas mudanças/alterações durante o período, a definição para as novas construções pouco tinha mudado.

Além disso, quando as pesquisas eram apresentadas em eventos ou discutidas com colegas, surgiam algumas questões como: essas animações também são simuladores? Um jogo que tenha um controle deslizante seria um cenário animado? Qualquer construção que tem objetos que estão relacionados ao controle deslizante é um cenário animado?

Para responder à primeira questão, apoiadas em Clark *et al.* (2009, *apud* NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2011), definimos que as nossas construções não eram simulações, pois segundo os autores, as simulações computacionais representam situações ou fenômenos naturais, tanto reais como hipotéticos; e conforme Plass, Homer e Hayward (2009, *apud* NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2011), contam com a possibilidade de que os parâmetros da simulação sejam alterados pelos usuários; logo, é favorecida a interação de ambos. Nesse sentido, o usuário, ao manipular a simulação, tem a vantagem de poder observar, explorar, investigar as situações e prever o futuro de alguns fenômenos (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2011).

Assim, sucederam algumas reflexões em relação às nossas pesquisas, pois as construções a que nós nos referimos não eram pensadas/planejadas para exibirem acontecimentos reais ou para que fossem simuladores de um fenômeno real, até porque existem muitos elementos a serem considerados nesses casos, como a gravidade, massa dos objetos, estruturas físicas dos elementos, velocidade e tantas outras questões. Quando os alunos desenvolviam as construções, eles usavam a imaginação e criatividade, e não necessariamente olhavam para o cenário como a simulação de algo real para reproduzir algo semelhante.

Com relação à questão de as animações serem consideradas como jogos, poderíamos afirmar que não seriam, pois segundo National Research Council (2011, p. 9, tradução nossa), “[...] jogos são jogados de forma espontânea”, e os cenários não eram programados para que fossem feitas jogadas, mas para que, ao final, se constituíssem como uma cena com movimento. Outras indicações que nos levam a alegar que jogos não poderiam ser considerados como cenários são: o cenário não retorna um feedback ao usuário, como acontece normalmente nos jogos (CLARK *et al.*, 2009, *apud* NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2011) e os cenários não incentivam situações de competições, como os jogos normalmente fazem. O principal objetivo e foco dos cenários é possibilitar que os conteúdos matemáticos sejam abordados e trabalhados por meio das construções.

Sendo assim, durante as iniciações científicas, precisávamos rever o nome do objeto central das pesquisas e a definição, pois *animação* é algo comum, considerando o contexto de construções no software GeoGebra e, no caso de nossas pesquisas, apenas ter o movimento não era suficiente para caracterizar as construções que nós realizamos no referido software.

Depois de reflexões e discussões com colegas que desenvolviam pesquisas sobre o tema, o nome do objeto central passou a ser *cenários animados no software GeoGebra*. Sua definição ainda está sendo (re)formulada, tomando como base o que já foi desenvolvido durante as iniciações científicas e as atuais pesquisas sobre o tema. Até o momento foi definido que um cenário animado é uma construção no software GeoGebra, em que elementos matemáticos são relacionados ao controle deslizante (BUENO; BASNIAK, 2020). Os cenários podem ter personagens, representar situações reais ou imaginárias, mas os elementos matemáticos devem ser programados/definidos para que, ao final da construção, se movam sozinhos e constituam uma cena animada.

Outro elemento de destaque nas construções finalizadas é que o controle deslizante deve ser programado para que, ao final, produza movimento contínuo, ou caso exista mais de um controle deslizante na animação, eles devem ser animados concomitantemente ou na sequência um do outro, dependendo do caso. Não deve ser necessária a interferência do usuário sobre a cena final, além de clicar nos botões para dar início à cena animada ou colocar o controle deslizante para animar.

Inquietações e justificativas desta pesquisa

Como as pesquisas de iniciação científica eram relacionadas a alunos com indicativo de AH/SD, uma questão que era recorrente em apresentações em eventos, e até mesmo em conversa com outros colegas ou professores sobre as pesquisas, era: será que os cenários animados foram produtivos e são uma alternativa para trabalhar somente com os alunos das salas de recurso multifuncional II, pois eles têm indicativo de AH/SD?

Para responder a essa questão, tínhamos apenas suposições, pois alguns alunos que haviam participado dos encontros tinham indicativo de AH/SD em outras áreas do conhecimento, como linguagem (BUENO; BASNIAK, 2021; BORUCH, BASNIAK, 2018), e conseguiam construir os cenários animados assim como os demais. Contudo, como as pesquisas até então tinham sido desenvolvidas com esse grupo de alunos em particular, não poderíamos afirmar nada além disso, visto que não havia como sustentar nossas justificativas.

Nesse sentido, esta pesquisa prevê que a construção dos cenários animados seja proposta a alunos de uma sala de aula do Ensino Fundamental, para que possamos verificar os dados produzidos não apenas por um grupo específico de alunos.

Como muitos conteúdos podem ser abordados por meio das construções dos cenários animados, neste trabalho optamos por abordar a função, pois seu estudo, segundo Caraça

(1951), serve de modelo para representar muitos fenômenos naturais e, por meio dele, é possível representar a relação entre duas grandezas variáveis. No caso deste trabalho, o enfoque foi dado à função afim, pois geralmente é o primeiro tipo de função com o qual os alunos têm contato formal no processo escolar.

Embora esse conteúdo esteja previsto para ser estudado no 9º ano do Ensino Fundamental (PARANÁ 2021; BRASIL, 2018), considerando nossa intenção em investigar alunos que ainda não tivessem estudado formalmente o conteúdo nas aulas de matemática, que os encontros com os alunos foram associados a um projeto de extensão, como explicado melhor adiante, e que os alunos já deveriam ter algum desenvolvimento no campo da álgebra, as intervenções ocorreram com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Considerando que a construção de cenários animados envolve o uso do GeoGebra, que é um objeto tecnológico, é possível mencionar que ocorrem constantes interações entre sujeito e software durante a construção, mesmo que essa relação seja implícita para os envolvidos, e por vezes passe despercebida ou seja considerada algo natural. Além disso, para que sejam construídos os cenários animados no GeoGebra, é preciso que o sujeito desenvolva e empregue técnicas no software.

Nesse sentido, para discutir a relação instrumental entre aluno e o GeoGebra e as técnicas empregadas pelo aluno no referido software para a construção dos cenários animados, tomamos como base teórica a Aproximação Instrumental (AI) (ARTIGUE, 2011; TROUCHE, 2016) e o que Trouche (2005) propõe sobre técnicas instrumentadas. Tanto AI como técnicas instrumentadas são discutidas com mais profundidade no Capítulo 1 desta dissertação.

Objetivo geral

A presente pesquisa tem por objetivo investigar a relação instrumental entre as características da função afim e as técnicas instrumentadas empregadas no GeoGebra na construção de cenários animados por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Fundamentos metodológicos

Para responder à questão principal de pesquisa, são usados os pressupostos metodológicos da Pesquisa de Desenvolvimento, que é formada tanto por métodos qualitativos como quantitativos (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014). Ela possibilita investigar a

integração de tecnologias na educação em contextos reais a fim de criar soluções práticas, contando com a parceria e colaboração entre os participantes e pesquisadores.

Conforme Mckenney e Reeves (2012), citados por Matta, Silva e Boaventura (2014), há cinco características da Pesquisa de Desenvolvimento: *teoricamente orientada, intervencionista, colaborativa, fundamentalmente responsiva e iterativa*. Ao longo do texto, apresentamos cada uma das cinco características e relacionamos com as ações que foram desenvolvidas para a realização da pesquisa.

Tecnologia e a Aproximação Instrumental

Por ser *teoricamente orientada*, “as teorias são ponto de partida, de chegada e de investigação” (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014, p. 26). Nesse sentido, foi realizado um estudo teórico sobre as tecnologias e sobre a AI para delimitação do quadro teórico.

Com tudo que já foi desenvolvido pela humanidade, temos à disposição muitos recursos tecnológicos, que foram planejados e criados para auxiliar e satisfazer os desejos humanos considerando diferentes situações (BASNIAK, 2014). Portanto, podemos inferir que a tecnologia sempre esteve presente na vida do homem e em sua evolução. Logo, neste trabalho, apoiados em Vieira Pinto (2005), compreendemos a tecnologia como produção humana.

Segundo o autor, em cada fase da história, a tecnologia foi desenvolvida com base nas exigências sociais sentidas pelos sujeitos, então nenhuma tecnologia é nova ou velha, mas reflete as demandas e carências sentidas pela sociedade em determinada época. Sendo assim, o autor alega que, antes de a tecnologia ser útil para os indivíduos, ela precisa ser necessária.

Como a maioria das ações que os sujeitos desenvolvem depende de algum tipo de tecnologia, podemos observar que existe uma relação entre sujeitos sociais e objetos técnicos, em que é necessário o domínio de habilidade técnicas por parte do sujeito para utilizar o objeto técnico (PEIXOTO, 2015).

Do ponto de vista do determinismo, a tecnologia impõe-se à sociedade, influenciando seu contexto e alegando que é a força motora da mudança social e cultural (PEIXOTO, 2015). Porém, seu uso é limitado ao *modus operandi*, como se os usuários não tivessem capacidade de ação sobre ela. Um exemplo oposto a isso é o uso que se faz do software GeoGebra, pois existem diferenças entre o objetivo inicial idealizado pelo criador e o que é desenvolvido por meio dele efetivamente.

Graças à criatividade do ser humano, é possível que o recurso seja usado de diferentes formas e para diferentes fins, proporcionando novas experiências e conhecimentos. Através de

adaptações, o objeto pode ter tantos usos quanto usuários dele se apropriarem. No caso deste trabalho, apresentamos e discutimos uma forma diferente de uso do software GeoGebra de que nos apropriamos.

Para a análise dos dados, esta pesquisa tem como aporte teórico a AI (ARTIGUE, 2011; TROUCHE, 2016), que é uma teoria criada por meio da articulação entre a abordagem instrumental (RABARDEL, 1995; 2002) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999). A AI é discutida com mais profundidade no Capítulo 1 desta dissertação, em que damos atenção especial às tarefas (CHEVALLARD, 1999), técnicas instrumentadas, esquemas de ação instrumentada (TROUCHE, 2005), e às dimensões da gênese instrumental - instrumentação e instrumentalização (RABARDEL, 1995; 2002).

Pesquisas atuais sobre os cenários animados

Esta pesquisa fez parte de uma investigação maior, intitulada *A construção de cenários animados, simuladores no software GeoGebra e o Ensino e a Aprendizagem de Matemática por meio de tarefas exploratórias* (2019-2022), que contou com o apoio do CNPq.

Além desta pesquisa de mestrado que envolve a construção de cenários animados, no ano de 2022 havia um projeto de extensão e outra investigação em desenvolvimento.

A segunda pesquisa também era de mestrado e estava sendo realizada pela colega que auxiliou nas intervenções desta pesquisa. Contudo, em cada caso, por meio de objetivos e bases teóricas, são previstas atividades e encaminhamentos distintos/próprios.

O projeto de extensão intitulado *Desenvolvimento de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio com indicativo de Altas Habilidades/Superdotação e a construção de cenários animados no software GeoGebra* foi um projeto do Universidade Sem Fronteiras¹ (USF), que contou com quatro alunos da graduação em Licenciatura em Matemática e uma aluna recém-formada, no caso, a autora desta pesquisa. Todos os integrantes do projeto desenvolvem as atividades previstas, entre elas, propor a construção de cenários animados a alunos com indicativo de AH/SD das escolas de União da Vitória e região e promover um curso sobre as construções dos cenários voltado para professores de Matemática e das salas de recurso multifuncionais.

¹ É um programa de extensão que visa a articular o ensino e a pesquisa, a capacitação e a produção tecnológica, cultural e desenvolvimento social. O foco é voltado para a inovação e a melhoria da qualidade de vida da população paranaense.

Intervenção

Outra característica que a Pesquisa de Desenvolvimento prevê é ser *intervencionista*, pois considera o diálogo com o contexto de aplicação e pretende produzir produtos educacionais (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014).

Assim, foram realizadas intervenções/encontros com os alunos de duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental de um colégio de União da Vitória - PR para propor a construção de cenários animados no software GeoGebra envolvendo o conteúdo de função afim. As intervenções foram associadas ao projeto do USF, como descrito a seguir.

Planejamento

Considerando que o projeto de extensão tinha por objetivo atender alunos com indicativo de AH/SD e as intervenções desta pesquisa seriam relacionadas ao projeto, a professora do Atendimento Educacional Especializado Integral (AEE-I), antes professora da SRM II, fez a mediação com o professor da rede estadual de ensino que lecionava para alunos do Ensino Fundamental no colégio que funciona no mesmo prédio da Universidade.

Como nas turmas do 8º ano havia alunos inclusos (com indicativo de AH/SD e outros com autismo), optou-se por propor que as intervenções fossem desenvolvidas com esses alunos, pois é um trabalho diferente do tradicional, e a professora do AEE-I poderia avaliar o desenvolvimento desses alunos em particular. Assim, contaríamos com o acompanhamento dela durante a realização dos encontros.

O professor das duas turmas do 8º ano, denominadas como A e B, solicitou que as intervenções fossem desenvolvidas com ambas as turmas, e disponibilizou aulas para que pudessem ser propostas as construções dos cenários animados aos alunos.

Os alunos desse colégio estudam em período integral e têm 6 aulas de matemática por semana. Como contávamos com a colaboração dos quatro integrantes do USF e da colega de mestrado, tivemos a possibilidade de desenvolver as intervenções com as duas turmas do 8º ano. Nesse sentido, o projeto possibilitou trabalhar com uma grande quantidade de alunos.

Então, ficou combinado com o professor que as intervenções com cada turma seriam no tempo de duas aulas conjugadas por semana, sendo de 1h40min ao total. As aulas aconteceriam durante os meses de maio, junho e começo de julho do ano de 2022, antes do recesso escolar. As aulas de quinta-feira seriam com os alunos do 8º ano A; e as aulas de sexta-feira, com os alunos do 8º ano B, ambas no período matutino. Ao todo seriam 9 encontros com cada turma.

Pelo fato de a escola ser no mesmo prédio da universidade, teríamos à disposição o Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE) e o Laboratório de Informática do curso de Licenciatura em Matemática (LIM), ambos com boa infraestrutura para realizar os encontros com os alunos, realidade adversa dos laboratórios de informática de algumas escolas.

Paralelamente, demos início ao planejamento das aulas com a escolha e elaboração dos cenários animados que seriam propostos aos alunos, visando às possíveis discussões do conteúdo de função afim durante as construções.

Para a escolha, elaboração dos cenários e planejamento das aulas com os alunos, foram realizadas reuniões semanais, nos meses de março e abril, e contamos com a participação e ajuda da colega de mestrado e dos quatro graduandos e integrantes do projeto USF. Além deles, um professor do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática também participou e colaborou durante as reuniões.

Em conversas para o planejamento, foi decidido pela organização apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 - Planejamento das aulas

Encontro	Cenário Animado	Objetivo
1º	Barco e chuva ¹	Para a familiarização dos alunos com o software, suas ferramentas, interface e dinâmica de construção.
2º, 3º e 4º	A Princesa e o Sapo ²	Para abordar principalmente a função afim, caracterizada como crescente e decrescente, e que os alunos investigassem/explorassem sobre a taxa de variação e o coeficiente linear da já mencionada função afim.
5º e 6º	Abelha simples ³	Para abordar função afim, que já estava presente na construção anterior, e função por partes.
7º	Questões sobre as características da função afim	Para ter registro por escrito das respostas dos alunos sobre as características da função afim presentes na construção do cenário animado <i>Abelha simples</i> .
8º	Abelha completa ⁴	Para verificar o que os alunos compreenderam sobre função afim, além de investigar quais formas de construção seriam mobilizadas para finalizar o cenário em questão.
9º	Cenário próprio	Para incentivar os alunos a criar suas próprias cenas animadas utilizando o conteúdo de função afim. Para isso, eles deveriam criar algum cenário animado novo ou tomar como inspiração algum outro cenário existente. A construção deveria ser feita pelos alunos, sendo auxiliados pelos integrantes das equipes, e deveria envolver o conteúdo de função afim.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Para cada cenário proposto aos alunos, foram estruturados roteiros em que elencamos o processo de construção planejado por nós, de forma que envolvesse o conteúdo de função afim.

¹ O cenário *Barco e chuva* pode ser visto em: <https://www.geogebra.org/m/ptazpyqa>.

² O cenário *A Princesa e o Sapo* pode ser visto em: <https://www.geogebra.org/m/xxzb5ufg>.

³ O cenário *Abelha simples* pode ser visto em: <https://www.geogebra.org/m/zqpwwwt>.

⁴ O cenário *Abelha completa* pode ser visto em: <https://www.geogebra.org/m/hxuztw9g>.

Tomando como base os roteiros, foram gravados vídeos tutoriais¹ sobre a construção de cada cenário selecionado/escolhido. Também foram estruturados roteiros de discussão (Apêndices I, II, III, IV e V) sobre os conteúdos matemáticos envolvidos em cada ação de construção do cenário, que deveriam ser feitas com os alunos durante as aulas. Nos roteiros de discussão também foram incluídos: objetivos de construção, conteúdos matemáticos que poderiam ser abordados, sugestões de questionamentos que poderiam ser feitos aos alunos para que refletissem e participassem da construção, assim como explicações para justificar o processo desenvolvido e problemas técnicos que poderiam ocorrer.

Esse material elaborado para as intervenções serviu de apoio para todos os graduandos que são integrantes do USF e as mestrandas durante as aulas. Todos da equipe de intervenção deveriam estudar esses materiais antes de cada aula para que se preparassem e soubessem: o objetivo da construção, os conteúdos matemáticos abordados por meio dela, as estratégias usadas para a construção do cenário; como deveriam mediar/intervir a/na construção; como poderiam ajudar os alunos; os possíveis problemas técnicos da construção e os possíveis questionamentos antes ou depois de cada etapa de construção.

Além dos roteiros das construções dos cenários, os integrantes do USF também tiveram acesso às questões sobre as características da função afim (Apêndice VI).

Organização das aulas de intervenção

Antes de iniciar as intervenções com os alunos, a pesquisadora participou de uma aula com cada turma para conhecer sua realidade. Nessa aula também foi explicado aos alunos como seriam os encontros para a construção dos cenários animados e foi entregue a eles o termo de consentimento, para que os pais ou responsáveis assinassem e eles pudessem participar da pesquisa.

Para o desenvolvimento das aulas, por mais que a escola contasse com laboratório de informática equipado, elas ocorreram em laboratórios de informática da universidade, pois poderia ocorrer de o laboratório da escola estar sendo usado por alguma outra turma durante as aulas de intervenção.

Como a turma do 8º ano A era composta por 28 alunos e o 8º ano B por 29 alunos², para que as aulas pudessem ocorrer de forma tranquila e em um ambiente que comportasse todos os

¹ Os vídeos tutoriais podem ser acessados em:

https://drive.google.com/drive/folders/11HF_DCqDZqQnJtmPspwNgoAf0bJ4h4n5?usp=sharing

² A quantidade de alunos variou bastante durante as aulas da intervenção, pois alguns saíram da escola e outros eram novos nela.

alunos, cada uma das turmas foi dividida em dois grupos, considerando critérios estabelecidos pelo professor regente da turma e pela professora do AEE-I quanto ao melhor rendimento para trabalhar em grupos. Assim, cada aluno teria um computador à sua disposição para construir o cenário. Os alunos podiam e eram incentivados a colaborar uns com os outros.

Para atender os alunos e desenvolver as construções dos cenários, havia duas equipes assistentes (EA): a EA1, que trabalhou no LIFE, era composta pela autora deste trabalho e dois graduandos que são integrantes do USF; e a EA2, que utilizou o LIM, era formada pela colega de mestrado e por outros dois graduandos que são integrantes do USF.

O LIFE dispõe de 10 computadores de mesa; e o LIM, 13. Para as aulas também tínhamos à disposição 4 notebooks que poderiam ser usados nos dois ambientes. Todos os computadores e notebooks possuíam o software GeoGebra instalado. Em cada laboratório há um quadro branco e projetor. Assim, ambos os laboratórios possuíam boa estrutura para o desenvolvimento das aulas.

Mesmo em ambientes diferentes, as construções e encaminhamentos das aulas para os dois grupos de cada turma eram semelhantes, pois seguiam o mesmo planejamento. Em ambos os espaços, cada aluno tinha um computador ou notebook à sua disposição, e o professor responsável pela turma acompanhava as aulas juntamente com os alunos.

Em todas as aulas, as EA de cada laboratório organizaram-se para desenvolver as construções dos cenários animados com os alunos da seguinte forma: um graduando e integrante do USF ficou responsável por conduzir a construção do cenários animados conforme o processo elaborado e descrito nos roteiros (os alunos não receberam os roteiros, apenas os integrantes das EA); as mestrandas ficaram responsáveis por mediar as discussões dos conteúdos matemáticos envolvidos em cada etapa da construção e pela explicação das estratégias de construção; e o outro graduando e integrante do USF ficou responsável por ajudar no desenvolvimento da aula, estando à disposição para atender a dúvidas pontuais e problemas técnicos. Todos os integrantes das equipes auxiliavam os alunos quando havia dificuldades na construção (usar ferramentas e digitar comandos na caixa de entrada, por exemplo), faziam questionamentos individuais sobre o conteúdo durante as explorações, incentivavam os alunos a participar e, antes de seguir para as próximas etapas da construção, verificavam se todos os alunos haviam feito os passos anteriores para dar continuidade. Os integrantes de ambas as equipes foram alertados para que, quando os alunos questionassem algo sobre as construções e que fosse relacionado ao conteúdo, não deveriam dar respostas apenas indicando certo ou errado, mas completar, provocando os alunos a refletir sobre sua pergunta e lembrar das discussões feitas durante as aulas, caso fosse oportuno.

Efetivação da intervenção

Antes de desenvolver a construção dos cenários, no primeiro encontro com cada turma, foi explicado aos alunos sobre a dinâmica das aulas e solicitada sua participação.

Elencamos, no quadro 2, as informações sobre o que ocorreu durante cada encontro, considerando as mudanças necessárias.

Quadro 2 - Efetivação da intervenção - parte I

Encontro	Cenário e data da aula		Contexto
	8º ano A	8º ano B	
1º	Barco e chuva (12/05/2022)	Barco e chuva (06/05/2022)	Foi desenvolvido o processo de construção com os alunos para que eles conseguissem concluir a construção, compreendessem as estratégias utilizadas e os conteúdos matemáticos envolvidos. Os alunos acabaram tendo dificuldades para encontrar imagens adequadas, e foi necessário utilizar um período da próxima aula para a finalização.
2º	Barco e chuva e A Princesa e o Sapo (19/05/2022)	Barco e chuva e A Princesa e o Sapo (13/05/2022)	Após finalizar a construção da aula anterior, o cenário A Princesa e o Sapo foi iniciado. Antes de desenvolver a construção, foi passada aos alunos a cena do filme que inspirou a criação do cenário. Conforme o planejamento, seria feito todo o processo de construção com os alunos e propostas investigações, principalmente sobre o que a taxa de variação e o coeficiente linear alteram na representação gráfica da função. Após criar cada função afim para compor o trajeto dos sapos, as características da referida função seriam discutidas. Entretanto, nessa aula foi construída apenas a função afim caracterizada como crescente para formar o caminho para que os sapos subissem. Ao propor as discussões sobre essa função, percebemos que os alunos não participaram como esperado e não retornaram respostas aos questionamentos feitos oralmente. Alguns alunos também demonstraram dificuldades em compreender o que estava sendo explicado sobre a construção.
3º	A Princesa e o Sapo (26/05/2022)	A Princesa e o Sapo (20/05/2022)	Foi feito o processo de construção da parte em que os sapos sobem. Foi construído o caminho, depois limitado, e unida a imagem dos sapos à função por partes por meio do controle deslizante. Também foram feitas explicações e propostas investigações sobre como cada elemento na lei de formação interfere na representação gráfica da função, assim como sobre os intervalos para o domínio da função e sobre como unir uma figura à representação gráfica de uma função por meio do controle deslizante.
4º	Sistematização (02/06/2022)	Sistematização (1 aula) (02/06/2022)	Alguns alunos estavam com dificuldades em compreender a construção; então, antes de seguir para a próxima etapa do cenário, em que os sapos caem, foi proposta uma sistematização para os alunos do 8º ano A sobre o que havia sido desenvolvido. Nesse momento também foi conversado com os alunos sobre como seguir a construção. Como a sistematização não estava no planejamento inicial e para não atrasar as demais construções, a sistematização com a turma do 8º ano B ocorreu na sala de aula deles, em apenas uma aula (50min). Nesse dia, a turma do 8º ano B não desenvolveu nenhuma construção. Depois da sistematização, foi entregue aos alunos um material impresso com definições sobre função afim, com explicações e exemplos para que os alunos tivessem material de apoio e conhecessem as definições, os termos matemáticos e pudessem ir se

			apropriando deles. Nenhuma outra sistematização foi desenvolvida até o final dos encontros.
5º	A Princesa e o Sapo e Abelha simples (09/06/2022)	A Princesa e o Sapo (03/06/2022)	Percebemos que, ao incentivar ou desafiar os alunos a tentar desenvolver as próximas etapas da construção sozinhos, dando dicas ou orientações, eles se sentiam motivados e participavam. Então, saindo novamente do planejado, para a etapa da construção em que os sapos descem, os alunos foram desafiados para que tentassem desenvolver sozinhos, tomando como base o que foi realizado anteriormente e sendo auxiliados pelos integrantes das EA. Os alunos do 8º ano A iniciaram a construção do próximo cenário nesse encontro.
6º	Abelha simples (23/06/2022)	A Princesa e o Sapo e Abelha simples (10/06/2022)	Após finalizar a construção da aula anterior, o cenário Abelha simples foi iniciado com a turma do 8º ano B, e os alunos do 8º ano A deram continuidade à construção. O planejamento inicial para essa construção previa que o desenvolvimento do cenário fosse feito com os alunos e ocorressem discussões sobre os conteúdos. Contudo, tomando como base a construção anterior, em que os alunos foram construindo de forma mais autônoma, considerou-se a mesma estratégia para a construção desse cenário. Para que todos os alunos acompanhassem a construção, eles eram incentivados a desenvolver cada etapa da construção sozinhos ou com os colegas próximos. Os alunos eram auxiliados pelos integrantes da EA. Alguns alunos do 8º ano A não estavam conseguindo desenvolver a construção da Abelha simples. Então, após cada etapa da construção realizada por eles, os alunos eram incentivados a relatar como haviam feito sua construção, para que aqueles que ainda não haviam feito conseguissem construir. Em seguida, eram promovidas discussões sobre os conteúdos, tomando como base o que e como haviam feito em sua construção. Eram feitos questionamentos para que os alunos refletissem sobre suas afirmações ou revissem suas estratégias de construção.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Depois desse momento, o planejamento das aulas com cada turma mudou, e foram realizadas atividades diferentes em cada uma delas, como pode ser observado no quadro 3.

Quadro 3 - Efetivação da intervenção - parte II

Encontro	Turma	Cenário e data da aula	Contexto
7º	8º ano B	Abelha simples (24/06/2022)	Para a construção da Abelha simples com os alunos do 8º ano B, foi usada a mesma estratégia dos alunos do 8º ano A, e após cada etapa da construção, eles eram incentivados a relatar como haviam feito. Em seguida, eram promovidas discussões sobre os conteúdos e feitos questionamentos para que refletissem sobre suas afirmações ou revissem suas estratégias de construção.
8º	8º ano B	Questões sobre as características da função afim (27/06/2022)	As questões foram impressas, entregues aos alunos e solicitado que respondessem, tomando como base a construção do cenário Abelha simples. Contudo, ao propor para a turma do 8º ano B, os alunos tiveram muitas dificuldades em responder, e considerou-se que não foram tão produtivas como o esperado. Então, o planejamento para cada turma foi alterado. Os alunos do 8º ano B desenvolveram a construção do cenário próprio no 9º encontro e não desenvolveram a construção Abelha completa. O cenário próprio pode ser um cenário idealizado e construído pelo aluno ou um cenário construído pelo aluno, mas que foi inspirado em outro cenário existente; em ambos os casos, o cenário pode representar um desenho

			animado, cena de um filme, uma situação do cotidiano, por exemplo. Os alunos do 8º ano A não responderam às questões nem desenvolveram a construção do cenário próprio, mas o cenário Abelha completa.
7º e 8º	8º ano A	Abelha completa (28/06/2022 e 30/06/2022)	A construção do cenário Abelha completa seguiu o planejamento inicial, pois indicava que os alunos desenvolvessem sozinhos a construção desse cenário, enquanto os integrantes das EA os auxiliavam e os questionavam sobre as estratégias adotadas para a construção e sobre o conteúdo de função afim.
9º	8º ano B	Cenário próprio (01/07/2022)	Os alunos foram auxiliados pelos integrantes das EA em suas construções individuais. Eles foram orientados para que usassem o conteúdo de função afim. Além disso, caso algum deles quisesse, poderia apresentar sua construção aos demais.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Durante as discussões coletivas, principalmente nas primeiras construções, os alunos eram questionados sobre o que haviam investigado durante as explorações, e era solicitado que explicassem aos demais o que tinham observado para que, ao relatar, contribuíssem com seu processo de construção do conhecimento. Ainda, nas construções finais, os alunos eram questionados sobre como pensavam em fazer cada parte da construção, e caso houvesse dúvidas ou dificuldades, os integrantes das EA auxiliavam os alunos.

Um fator que atrapalhou, principalmente os últimos encontros planejados para as intervenções, foram os eventos da escola, como festa junina, formação de professores, conselho de classe e dia do cinema, pois esses eventos não estavam previstos e coincidiam com os dias de aulas em que eram realizadas as intervenções. Por esse motivo foi solicitado ao professor de matemática e a professores de outras disciplinas que, se possível, disponibilizassem mais algumas aulas para finalizar o planejamento, como havia sido previsto inicialmente.

Em todas as aulas, foi usado um gravador para captar o áudio dos alunos desenvolvendo a construção dos cenários animados no GeoGebra e interagindo com os colegas. Em particular, no nono encontro, em que os alunos desenvolveram os cenários próprios, equipamentos de filmagens (áudio e vídeo) foram utilizados para captar a apresentação de um dos alunos.

Em todas as aulas que ocorreram nos laboratórios de informática a imagem das telas dos computadores dos alunos foram gravadas, algumas em áudio e vídeo, e outras apenas vídeo, pois não havia fones de ouvido suficientes para captar o áudio de todos os computadores. Entretanto, algumas gravações foram perdidas pelas seguintes causas: alguns computadores, por problemas técnicos, desligavam sozinhos durante as aulas; alguns alunos não colocavam para gravar a tela no início da aula; e alguns arquivos das gravações foram corrompidos no momento de salvar.

Para selecionar as gravações para as análises apresentadas nesta dissertação, levamos em consideração: a qualidade das gravações, dando prioridade para aquelas que eram compostas por imagem e áudio; a participação dos alunos durante as aulas; as anotações da

pesquisadora e da colega de mestrado que estava no outro laboratório; e os relatos da EA que participou das aulas.

Mesmo que nos dois ambientes houvesse um gravador de mesa e os fones nos computadores, ao lado de um dos laboratórios (LIM) fica o pátio do colégio, então todo barulho no pátio, no momento de ensaios para apresentações nas festas juninas, foi captado pelo gravador e interferiu nas gravações. Isso prejudicou a coleta de dados, pois em alguns momentos não é possível ouvir nitidamente o que é falado/discutido durante a aula.

Colaboração

Como há outra pesquisa e projeto sendo desenvolvidos para investigar questões referentes às construções dos cenários animados no GeoGebra, como mencionado anteriormente, está presente outra característica da Pesquisa de Desenvolvimento, a de ser *colaborativa*. Nesse contexto, houve um trabalho colaborativo entre a autora deste trabalho, alunos de graduação e participantes do USF, colega de mestrado, professores da universidade, professora do AEE-I, professor de Matemática das turmas dos 8º anos e os próprios alunos, que colaboraram por meio do diálogo e participação na pesquisa. Além disso, contamos com a colaboração e sugestões dos integrantes do grupo de pesquisa GEPTEMatE¹ durante o desenvolvimento da pesquisa.

Reuniões semanais

Outra característica da Pesquisa de Desenvolvimento é de ser *fundamentalmente responsiva*, de forma que, durante o desenvolvimento da pesquisa, deve haver “[...] diálogo entre a sabedoria dos participantes, o conhecimento teórico, suas interpretações e advindos da literatura, e pelo conjunto dos testes e validações diversas realizadas em campo” (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014, p. 27).

Nesse sentido, durante todo o período de intervenção foram realizadas reuniões semanais entre a autora deste trabalho, sua colega de mestrado, a orientadora de ambas, os graduandos e integrantes do USF e o professor da universidade que participou no período de planejamento. Nessas reuniões eram compartilhados relatos sobre como foi o desenvolvimento

¹ Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística, composto por pesquisadores preocupados com a Educação Matemática, cujos estudos abarcam três linhas de pesquisa.

da aula com cada turma, quais as dificuldades dos alunos, em que etapa da construção do cenário haviam chegado e quais discussões haviam sido feitas.

Nesse momento também era relatada com frequência a diferença de participação dos alunos, pois alguns desenvolviam rapidamente os passos necessários para a construção, muitas vezes sozinhos, enquanto outros, mesmo sendo auxiliados por algum integrante da equipe, tinham muita dificuldade na construção e em utilizar o computador.

Nas reuniões também eram pensadas/idealizadas estratégias para os próximos encontros e feita a preparação de materiais que seriam entregues aos alunos, em momentos que fosse necessário. Essas reuniões foram fundamentais para troca de ideias e para o (re)planejar das aulas seguintes.

Logo, os conhecimentos foram sendo moldados em estreita relação com a prática, os saberes dos participantes e os ajustes foram sendo feitos durante o processo, por meio de diálogos e validações.

Iterativa

A última característica da Pesquisa de Desenvolvimento é ser *iterativa*. Segundo Matta, Silva e Boaventura (2014), ela busca por soluções práticas. Nesse sentido, durante o desenvolvimento desta pesquisa, após cada encontro com os alunos, as próximas ações eram (re)planejadas e melhoradas, considerando o diálogo entre as pessoas envolvidas na pesquisa e nos encontros, para que, de forma contínua, se construíssem soluções adequadas e necessárias.

Além disso, propusemos compartilhar os resultados obtidos por meio das publicações para que, a partir de nossas experiências, outras possam ser desenvolvidas e melhoradas conforme cada iteração.

Na seção seguinte apresentamos o modelo escolhido para esta dissertação e como o trabalho está organizado.

Escolha pela opção *Multipaper* e organização da pesquisa

O trabalho segue o modelo *multipaper*, que é alternativo e diferente da dissertação tradicional. Segundo Duck e Beck (1999 *apud* BARBOSA, 2015), o modelo *multipaper* é uma coleção de artigos científicos que formam o relatório de pesquisa, e cada artigo é formado/composto por todos os elementos necessários para que sejam publicados.

Normalmente, teses, dissertações e monografias são “[...] compostas por uma *única obra publicável*, a qual possui início, um desenvolvimento e um fim, com um fio condutor único para o texto” (BARBOSA, 2015, p. 356, grifos do autor). Geralmente são trabalhos extensos, que precisam ser resumidos/sintetizados para que possam ser publicados em periódicos, livros e até mesmo em anais de eventos, para que alcance mais leitores. Por outro lado, como o modelo *multipaper* é composto por vários artigos, cada um tem seu próprio início, meio e fim, não é preciso eliminar partes do trabalho para a possível publicação.

Um desafio destacado por Estevam (2015, p. 173) nesse modelo de trabalho é “[...] delinear objetivos ou questões específicas que sustentem artigos consistentes, que guardem relação com o objetivo geral e evidenciem claramente suas contribuições para o objetivo geral do estudo”. Assim, o objetivo principal do trabalho e os objetivos de cada artigo específico devem se conectar, ao serem reunidos na dissertação, para que respondam à questão de pesquisa.

Além dos três artigos, este relatório de pesquisa é composto por um capítulo introdutório, um capítulo teórico sobre a AI e outro de considerações finais. A organização e informações gerais sobre os artigos que compõem esta pesquisa estão presentes no quadro 4. Destacamos que os artigos 02 e 03 seguem a ordem dos encontros, mas não precisam necessariamente ser lidos em sequência, pois abordam dialéticas diferentes.

Quadro 4 - Organização dos artigos que compõem a pesquisa

Artigo	Cenário Animado	Objetivo de pesquisa
Função afim e suas características abordadas por meio do cenário animado Abelha no GeoGebra	Abelha simples	Discutir as características da função afim por meio da construção de um cenário animado elaborado no GeoGebra a partir dos elementos da Aproximação Instrumental (tarefa, técnica, esquemas e as dimensões da instrumentação e instrumentalização).
Cenário animado e a dialética esquema-técnica	Abelha simples	Investigar, a partir da dialética esquema-técnica, características da função afim manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra.
As dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização na construção do cenário animado Balão	Cenário próprio (Balão)	Investigar, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, características da função afim manifestadas por um aluno do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O primeiro artigo é teórico, no qual discutimos uma forma de construção do cenário animado *Abelha simples* utilizando o conteúdo de função afim e elencando suas características. Essa construção foi desenvolvida a partir dos elementos da AI. Assim, no decorrer do trabalho, indicamos as tarefas de construção, as técnicas instrumentadas empregadas por nós no

GeoGebra para resolver a tarefa de construção, e os esquemas de ação instrumentada considerados por meio dos invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) e esquemas de uso. Também destacamos as dimensões da instrumentação e instrumentalização durante o processo de construção do cenário animado.

No segundo artigo, tomando como base a relação dialética esquema-técnica proposta dentro da AI e usando as gravações das telas dos computadores dos alunos, relatamos e discutimos as técnicas instrumentadas empregadas efetivamente por eles para construir o cenário animado *Abelha simples* utilizando o conteúdo de função afim. Também buscamos identificar os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), que são parte dos esquemas de ação instrumentada, nas discussões após cada etapa da construção.

Nos dois primeiros artigos discute-se o mesmo cenário, *Abelha simples*. Em cada um deles olhamos para ele de forma diferente, visto que os objetivos são outros. No caso do primeiro artigo, discutimos como nós construímos o cenário; e no segundo, como os alunos o construíram. Além disso, destacamos que essa construção foi escolhida para ser discutida nos artigos por envolver diferentes noções sobre função afim e não ser uma construção extensa. A partir desse cenário é possível discutir sobre taxa de variação, coeficiente linear, domínio, intervalo e variável, assim como caracterização da função afim como crescente, decrescente, constante e função por partes. Outros conteúdos, como desigualdade, plano cartesiano, coordenadas de pontos e expressões algébricas também podem ser abordados por meio dela.

No terceiro artigo, a partir da construção do cenário animado próprio desenvolvido pelos alunos, buscamos verificar como o artefato se tornou instrumento durante a construção. No início da aula, antes de os alunos construírem os cenários próprios, foram mostrados a eles cenários animados prontos para que tomassem de inspiração. Tiago¹ inspirou-se no cenário animado *Balão* para construir o seu cenário. Após finalizar a construção em seu computador, o aluno se dispôs a apresentar aos colegas o que havia construído.

Como destacado anteriormente, as intervenções foram relacionadas ao projeto de extensão, e umas das atividades desenvolvidas no âmbito do projeto foi propor um curso sobre as construções dos cenários voltado para professores de Matemática e das salas de recurso multifuncionais. Como o aluno havia desenvolvido sua construção e apresentado aos colegas, ele foi convidado a apresentar sua construção às professoras da Educação Básica que participavam do curso.

¹ O nome do aluno é fictício para preservar sua identidade.

Dessa forma, como Tiago desenvolveu grande parte do seu cenário animado próprio sozinho durante a aula, solicitando ajuda aos integrantes da EA em apenas alguns momentos, apresentou sua construção em dois momentos e a gravação da tela do seu computador contava com imagem e áudio, optamos por analisar a construção dele no Capítulo 4 (artigo 03).

Assim, nesse artigo é relatado e discutido o processo de construção e apresentação do cenário animado próprio construído por um aluno, em que buscamos identificar as dimensões da gênese instrumental, instrumentação e instrumentalização, e como o artefato se tornou instrumento, ambos por meio de processos dialéticos.

Portanto, ao articular os elementos da AI com a construção do cenário animado (artigo 1), verificamos como os elementos são desenvolvidos pelos alunos do Ensino Fundamental durante o processo de construção (artigo 2), e como ocorreu o processo de instrumentação e instrumentalização, identificando como o artefato se transformou em diferentes instrumentos para um aluno (artigo 3). A partir dos três artigos, discutimos as relações instrumentais estabelecidas entre as características da função afim e as técnicas instrumentadas empregadas pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, ao construírem cenários animados, nas considerações finais desta dissertação.

Por fim, ressaltamos que, principalmente nos artigos 02 e 03, além de links para acessar as gravações das telas dos computadores dos alunos, inserimos os próprios vídeos sobre as situações descritas no decorrer do texto. Como no texto não é possível que eles sejam executados, pode-se clicar sobre ele, nesse caso, como imagem, e será aberta uma janela na tela ou uma nova guia/aba no navegador que leva até vídeo. Assim, não é necessário que o leitor se dirija até a nota de rodapé, copie o link, abra uma aba do navegador e cole o link do vídeo para vê-lo. Entretanto, é necessário acesso à internet para poder carregar e visualizar o vídeo. No caso deste trabalho, para indicar quais figuras remetem aos vídeos, foram inseridas notas de rodapé indicando se a figura dá acesso ao vídeo.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, año 6, n. 8. p. 1-15. 2011.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. In: D'AMBRÓSIO, B. S; LOPES, C. E. (Org.) **Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática**. 1ª ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015, v. 1, p.347-367.

BASNIAK, M. I. **Políticas de tecnologias na educação: o Programa Paraná Digital**. 210f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 43-58, 2020.

BASNIAK, M. I.; CARNEIRO, E. B. A comunicação na construção de cenários animados por alunos com indicativo de altas habilidades/superdotação. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis – SC, v. 16, p. 01-22, 2021.

BORUCH, I. G.; BASNIAK, M. I. Animações no GeoGebra e o Ensino de Matemática: uma experiência com alunos com altas habilidades/superdotação. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología)**, v. extra, p. 1-8, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - Ensino Fundamental**. Brasília, DF, 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Ensino de Matemática a alunos com Altas Habilidades/ Superdotação e a construção de animações e cenários no GeoGebra. In: IV Encontro Anual De Iniciação Científica (EAIC). **Anais**. Campus de Campo Mourão - PR, 2019.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/ superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895>

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Cenários animados no GeoGebra e o estudo de funções por alunos com altas habilidades/superdotação. **Tangram**, v. 4, p. 134-154, 2021.

CARAÇA, B. J. Estudo matemático das leis naturais. In: CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1.ed. Lisboa: Gradiva, 1951. p. 107-139.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, n.2, p.221-265. 1999.

ESTEVAM, E. J. G. **Práticas de uma Comunidade de Professores que ensinam Matemática e o Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística**. 192f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEBA – Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, p.23-36, 2014.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Learning science through computer games and simulations**. HONEY, M. A.; HILTON, M (Eds). Board on Science Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academies Press. 2011.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2021.

PEIXOTO, J. Relações entre sujeitos sociais *e objetos técnicos** uma reflexão necessária para investigar os processos educativos mediados por tecnologias. **Revista Brasileira de Educação**, v. 20 n. 61, p. 317-332, 2015.

RABARDEL, P. **L’homme et les outils contemporains**. Paris: A. Colin, 1995.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia**: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos. Université paris 8. hal-01020705, 2002.

SANTOS, L. P.; BASNIAK, M. Construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação como atividade Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-20, 2021.

SCALDELA, D. O Software GeoGebra. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. (Org.). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica**. 1ed. Curitiba: Íthala, 2014, cap. 1, p. 13-23.

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**: Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. p.137-162, 2005.

TROUCHE, L. Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (Org.). **Tools and Mathematics**: Instruments for Learning. Springer, 2016. p. 219-256. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0_10

VIEIRA PINTO, A. **O conceito de tecnologia**. Rio de Janeiro: Contraponto, v. 1, 2005.

1 CAPÍTULO TEÓRICO

1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar e delimitar o quadro teórico que utilizamos como base nesta pesquisa. Inicialmente, discutimos elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1992) e ampliada por colaboradores, mais precisamente as praxeologias, que são compostas por (tipo de) tarefas, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria. Em seguida, apoiados em Rabardel (1995a; 2002), debatemos conceitos da abordagem instrumental: artefato, instrumento, gênese instrumental, instrumentação e instrumentalização. Por fim, argumentamos sobre a Aproximação Instrumental (ARTIGUE, 2007; TROUCHE, 2016), que articula a TAD e a Teoria da Instrumentação, a qual é usada como fundamento teórico neste trabalho.

1.2 Teoria Antropológica do Didático

Considerando a atividade matemática como atividade humana, desenvolvida em contextos sociais e culturais, os objetos matemáticos não podem ser vistos como absolutos, mas com origem nas práticas institucionais, dependentes dos contextos sociais e culturais (ARTIGUE, 2002; PEDREROS, 2012). Nesse sentido, não existe manipulação de conhecimento matemático apenas em instituições escolares, de modo que o campo da Didática da Matemática precisa considerar outras instituições em que ocorrem essas manipulações (PEDREROS, 2012).

Nesse contexto, a fim de compreender a relação entre sujeito, instituição e saber, e tomando como base a Teoria da Transposição Didática e a Teoria das Situações Didáticas, Chevallard (1992; 1999) e colaboradores deram origem à Teoria Antropológica do Didático (TAD). A TAD agrega o termo *antropológico*, pois “[...] situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e instituições sociais” (CHEVALLARD, 1999, p. 1, tradução nossa).

Bosch e Chevallard (1999) indicam que o conhecimento matemático é resultado da ação humana, porque além de produzir, utilizar e ensinar, é transposto para as instituições. Os autores também destacam que um objeto só existe se algum sujeito ou instituição o (re)conhece como objeto.

Conforme Chevallard (1999), dentro da TAD admite-se que toda e qualquer atividade humana pode ser expressada/descrita em termos de uma organização praxeológica ou praxeologia. Essa organização proposta permite modelar tanto as práticas sociais como a atividade matemática, e é composta por quatro noções: (tipo de) tarefas, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria (BOSCH; CHEVALLARD, 1999), como discutimos a seguir.

1.2.1 *Tarefa*

Qualquer prática institucional desenvolvida pode ser analisada como uma tarefa (BOSCH; CHEVALLARD, 1999), e dentro da TAD há tarefa (t) e tipo de tarefas (T), de forma que uma tarefa (t) pertence a um grupo maior (T) (CHEVALLARD, 1999). Nesse sentido, “[...] a noção de tarefa, ou melhor, de tipo de tarefas, supõe um objeto relativamente preciso” (CHEVALLARD, 1999, p. 224, tradução nossa).

Essas tarefas são referentes a qualquer atividade, como por exemplo: fechar uma porta, varrer a sala, derivar uma função, dançar tango, pegar um ônibus, subir uma escada, dividir um inteiro por outro, lavar uma roupa, tocar piano, fazer um curso de grego antigo, e assim por diante (CHEVALLARD, 1999; BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

As tarefas citadas acima são expressas por meio de um verbo de ação: varrer, dividir, derivar e subir, por exemplo. Entretanto, somente indicar o verbo de comando de cada tarefa não é suficiente, pois ele tem significado amplo, não estabelece o conteúdo e não indica um complemento do que se deve fazer para atingir o objetivo da tarefa proposta (SANTOS, 2020). Chevallard (1999, p. 224, tradução nossa) ressalta que “subir escadas é um tipo de tarefa; mas, subir não. Da mesma forma, calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa; mas calcular, simplesmente, é o que chamaremos de um gênero de tarefa, que exige um determinado substantivo”.

Para que qualquer tarefa seja realizada, é necessária a implementação de uma técnica, como indicado no segundo postulado proposto por Bosch e Chevallard (1999), discutido a seguir.

1.2.2 *Técnica*

As técnicas (τ) são maneiras de fazer, modos de realizar uma tarefa, as quais não precisam seguir um processo estruturado, metódico ou com algoritmo (BOSCH; CHEVALLARD, 1999; CHEVALLARD, 1999), embora sejam empregados em alguns casos.

Entretanto, “axiomatizar uma determinada área da Matemática, pintar uma paisagem, fundar uma família são tipos de tarefas para as quais não existe necessariamente uma técnica algorítmica” (CHEVALLARD, 1999, p. 225, tradução nossa). Nesses exemplos, para cada tarefa há alguma técnica particular de resolução.

Ao usar certa técnica, podemos obter sucesso em alguns casos e em outros nem tanto, pois ela é específica de cada caso, e para os tipos de tarefas em determinada instituição, há ao menos uma técnica reconhecida, enquanto em outra instituição, diferentes técnicas podem ser desenvolvidas e usadas para as mesmas tarefas (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

De acordo com Bosch e Chevallard (1999, p. 85, tradução nossa, grifos dos autores) para uma instituição, quando as tarefas são rotineiras, “[...] a técnica utilizada para sua realização, embora um dia tenha sido construída, foi *rotinizada*, ao ponto de já não aparecer como tal – usar essa técnica para realizar essa tarefa já é óbvio e não apresenta mais nenhum problema”.

Entretanto, nesse contexto, Artigue (2002) enfatiza que, durante o processo de naturalização das técnicas, é necessário ter atenção, pois elas perdem sua *nobreza* matemática e podem vir a se tornar apenas processos. Isso reduz o trabalho matemático e influencia a visão da matemática e da aprendizagem matemática.

Em outros casos, quando surge um tipo de tarefa nova e não existe nenhuma técnica apropriada, então há a necessidade de constituir uma técnica que possa ser usada para resolver a tarefa, e essa técnica pode ser adaptada de uma técnica antiga ou criada (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Para toda técnica, seja rotineira, adaptada ou nova, é necessário que haja um discurso que justifique sua utilidade e validade (PEDREROS, 2012), e isso nos conduz à noção de tecnologia da técnica dentro da TAD.

1.2.3 Tecnologia

Conforme Bosch e Chevallard (1999, p. 85-86, tradução nossa),

O terceiro postulado antropológico diz respeito à ecologia de tarefas e técnicas, ou seja, as condições e restrições que permitem sua produção e uso em instituições. Supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve parecer algo compreensível, legível e justificado. [...] Esse constrangimento ecológico implica, então, a existência de um discurso descritivo e justificador das tarefas e técnicas, que chamamos de tecnologia da técnica.

Nesse sentido, em uma instituição, qualquer tarefa que seja resolvida por uma técnica é sempre acompanhada por ao menos um resquício de tecnologia (CHEVALLARD, 1999). Para o autor, a tecnologia da técnica (θ) deve dar suporte teórico à técnica, explicá-la e torná-la inteligível, descrever e explicitar o motivo de ser assim, indicando fundamentos e justificativas. Assim, entendemos por tecnologia um discurso racional (*logos*) sobre a técnica (*tekhnê*), que visa a justificá-la e a assegurar porque ela possibilita atingir os objetivos da tarefa (CHEVALLARD, 1999).

1.2.4 Teoria

Toda tecnologia da técnica precisa ser justificada (BOSCH; CHEVALLARD, 1999), porque contém afirmações que podem ser questionadas (CHEVALLARD, 1999). A teoria (Θ) é o que a justifica e, conforme Chevallard (1999), está em um nível superior de justificação, explicação e produção.

Pedrerros (2012, p. 39, tradução nossa, grifo da autora) destaca a teoria como “[...] um ‘discurso’ matemático suficientemente amplo para justificar e interpretar a tecnologia da técnica (junto com muitas outras)”. Essas afirmações teóricas normalmente são abstratas (CHEVALLARD, 1999), como teoremas, demonstrações ou definições, por exemplo, porque ajudam a produzir novas tecnologias (SANTOS; FREITAS, 2013).

A tecnologia da técnica e a teoria da técnica constituem elementos teóricos da prática [θ , Θ] (ARTIGUE, 2011), e conforme Chaachoua e Bittar (2019), são denominados por bloco tecnológico-teórico.

Sendo assim, para cada tarefa há uma técnica de resolução, que é justificada por uma tecnologia e amparada por uma teoria. Esse conjunto de elementos forma uma praxeologia, como discutimos a seguir.

1.2.5 Praxeologia

Conforme Bosch e Chevallard (1999), o termo praxeologia é composto por *práxis* e *logos*, sendo a *práxis* referente à atividade, à prática realizada, ao saber-fazer, e envolve dois elementos: tipos de tarefas e técnicas que são usadas. O termo *logos*, conforme os autores, é relacionado à parte descritiva, à justificativa e ao discurso racional, envolvendo tecnologia e teoria. A união desses dois termos e seus significados compõem uma praxeologia dentro da TAD (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Bosch e Chevallard (1999) descrevem que, para

determinada tarefa, há um conjunto de técnicas, tecnologias e teorias que formam uma praxeologia.

Para certo tipo de tarefas, Chevallard (1999) denota a praxeologia como $[T, \tau, \theta, \Theta]$ e designa que nela há um bloco prático-técnico $[T, \tau]$ (tipo de tarefas e técnica) e um bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ (tecnologia da técnica e teoria da tecnologia).

Portanto, a praxeologia estabelece que, ao resolver uma tarefa, será necessária uma técnica, que é amparada por uma tecnologia que, por sua vez, é estruturada e justificada por uma teoria (SANTOS; FREITAS, 2017). Logo, “[...] qualquer bloco de tarefa/técnica vem sempre acompanhada de algum vestígio de tecnologia” (ALMOULOU, 2007, p. 116), e toda atividade desenvolvida pode ser enunciada por meio de uma tarefa, também, toda tarefa necessita de uma técnica (BITTAR, 2017).

Gascón e Nicolás (2021, p. 11) enfatizam que os dois blocos que compõem a praxeologia evoluem juntos:

O bloco de logos condiciona a práxis, pois acaba determinando as técnicas que se justificam e seu alcance de validade, bem como o tipo de tarefas que podem ser enfrentadas com as técnicas disponíveis e os resultados admissíveis. Além disso, entre as funções desempenhadas pelo discurso tecnológico está a construção de novas técnicas e a articulação entre elas. Reciprocamente, o desenvolvimento da práxis constrói um corpus de resultados que, a longo prazo, podem ser integrados ao bloco do logos, enriquecendo-o por meio de novas noções e novos discursos teórico-tecnológicos que surgem para descrever, justificar e interpretar as variações sucessivas das técnicas.

Bosch e Chevallard (1999), considerando os elementos da praxeologia, chamam a atenção para o fato de que as noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria são particulares de cada instituição. Logo, o que é considerado um tipo de tarefas para determinada instituição, pode não ser para outra.

Essa Teoria será retomada ao tratarmos da Aproximação Instrumental, que articula a TAD e a abordagem instrumental, apresentada a seguir.

1.3 Abordagem instrumental

No campo da Ergonomia Cognitiva¹, Rabardel (1995a; 2002), seguindo estudos de Vygotsky e apoiando-se nos conceitos da psicologia, discute a relação entre homens e objetos,

¹ A Abordagem Ergonômica, segundo Rabardel (1995a, p. 36, tradução nossa), “[...] é a adaptação do trabalho ao homem”.

por meio de uma perspectiva antropocêntrica¹. Conforme Rabardel (1995a, p. 47-48, tradução nossa), o enfoque instrumental busca “[...] uma compreensão em profundidade de uma das formas de relação com objetos técnicos: a relação de uso, de utilização, a partir do estudo das relações instrumentais que os sujeitos mantêm com os artefatos na ação”. O autor ressalta que, quando o sujeito interage com a máquina, não ocorrem apenas trocas de informações, mas dois processos: um na máquina e outro no cérebro do sujeito; nesse caso, o operador (RABARDEL, 1995a).

A abordagem instrumental proposta por Rabardel não é específica para o âmbito educacional, pois foi desenvolvida visando olhar para a ação com instrumentos no campo social e científico (BITTAR, 2011). Entretanto, Trouche (2003, p. 15, tradução nossa) destaca que “essa abordagem é particularmente frutífera para estudar os processos de aprendizagem da matemática em ambientes tecnológicos complexos”. Além dele, outros autores, como Drijvers e Gravemeijer (2005), também usam o enfoque instrumental como quadro teórico, em algumas de suas pesquisas, para analisar relações instrumentais de alunos com objetos como, por exemplo, a calculadora simbólica TI-89.

Dentro da abordagem instrumental, usando a definição de esquema proposta por Piaget e ampliada por Vergnaud (1990), Rabardel (1995a; 2002) distingue conceitos, como artefato, instrumento, gênese instrumental, instrumentação e instrumentalização para estudar a ação do sujeito ao usar um artefato.

O conceito de esquema aparece em diferentes quadros teóricos e não se limita apenas à psicologia cognitiva (RABARDEL, 1995a), mas neste trabalho, iremos discuti-lo tomando a mesma base proposta por Rabardel (1995a), que se apoia em Piaget e no que foi ampliado por Vergnaud (1990). Assim, em seguida, apresentamos o que Rabardel (1995a) discute de esquema de utilização (uso e ação instrumentada) e o que Trouche (2003; 2005), em pesquisas mais recentes, propõe.

1.3.1 *Esquemas*

Segundo a teoria piagetiana, o esquema está presente na formação do conceito, além de ser considerado uma ideia central (RABARDEL, 1995a; 2002). Para Piaget (1936), citado por Rabardel (1995a), os esquemas são os meios que possibilitam ao sujeito assimilar os objetos e

¹ Conforme Rabardel (1995a), na perspectiva antropocêntrica, o homem ocupa a posição central, diferentemente da perspectiva tecnocêntrica, em que o homem ocupa uma posição residual.

os contextos com os quais é confrontado. É por meio da assimilação reprodutiva que são constituídos os esquemas que, de fato, começam a existir, quando são esquematizados por meio de um esforço repetitivo (RABARDEL, 1995a). Conforme Piaget e Beth (1961, apud RABARDEL, 2002, p. 55-56), “o esquema de ação é, portanto, um conjunto estruturado de características de ação generalizáveis, ou seja, aquelas que permitem a repetição da mesma ação ou sua aplicação a novos conteúdos”.

Logo, para Piaget, o esquema é uma estrutura que vai sendo gradualmente transformada, quando se adapta a outros contextos, e generalizada, conforme o conteúdo envolvido (RABARDEL, 1995a). Segundo Rabardel (1995a, p. 150, tradução nossa), “a evolução dos esquemas e do sujeito segue, assim, dois processos complementares: um incorpora coisas ao sujeito, o processo de assimilação; o outro está se adaptando a elas”. Nesse sentido, o esquema é constituído por elementos mutuamente dependentes.

Vergnaud (1990; 1996), apoiando-se no conceito de esquema de Piaget, define esquema como “uma totalidade dinâmica que organiza a ação do sujeito para uma determinada classe de situações”, sendo, “[...] portanto, um conceito fundamental em psicologia cognitiva e didática” (VERGNAUD, 1990, p. 142, tradução nossa). Conforme Vergnaud (2009), o esquema é voltado para uma classe de situações. Além disso, ele

[...] é composto por *regras de ação* e de *antecipações*, uma vez que gere uma sequência de ações para atingir um determinado objetivo, nem sempre se reconhece que também é composto, de uma forma essencial, por *invariantes operacionais* (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) e *inferências*. As inferências são indispensáveis para a implementação do esquema em cada situação particular (VERGNAUD, 1990, p. 142, tradução e grifos nossos).

Assim, o conceito de esquema deve ser analisado por meio desses quatro componentes (VERGNAUD, 1985). As *regras de ação* formam a parte geradora do esquema e são relacionadas ao desenrolar de procedimentos, gerando uma sequência de ações do sujeito; as *antecipações* ou *previsões* referem-se ao objetivo, ao efeito a ser obtido, que se divide em subobjetivos sequenciais; *inferências* possibilitam ao sujeito avaliar suas ações, tomando como base as informações fornecidas pela situação; e *invariantes operatórios* são os conceitos-em-ação, teoremas-em-ação e processos que permitem que as informações pertinentes da situação tratada sejam coletadas (VERGNAUD, 1985; 1990; 2002; 2009).

Os *invariantes operatórios* podem ser de três tipos: “[...] proposições: suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, por exemplo, os teoremas-em-ação”; “[...] função proposicional: não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas e são indispensáveis para a construção de

proposições)”; ou “[...] argumento: função proposicional e proposição como argumentos” (VERGNAUD, 1990, p. 142-144).

Rabardel (2002, p. 61, tradução nossa) ampara-se na noção de esquema proposta por Vergnaud (1990) como “[...] a organização imutável do comportamento do sujeito para uma classe de situações, tanto em termos de ação quanto de atividade simbólica”. Além disso, Rabardel (1995a; 2002) discute que os esquemas que se relacionam com a utilização de um artefato são denominados *esquema de utilização*, e são relacionados a dois tipos de tarefas: primárias e secundárias. Padilha e Bittar (2013, p. 6, grifos dos autores) citam, como exemplo, a situação em que

[...] o sujeito utiliza um *software* para plotar o gráfico de uma função e para melhorar a visualização de detalhes deste gráfico ajusta o *zoom* da imagem. A plotagem do gráfico é a atividade principal para a qual o sujeito utiliza o *software* e o ajuste do *zoom* da imagem é uma atividade secundária disponibilizada por uma determinada característica do *software* cuja função de possibilitar uma visão com maior ou menor detalhamento do gráfico plotado.

Conforme Rabardel (1995a), os esquemas de utilização são definidos por dois níveis: de uso e de ação instrumentada.

Os esquemas de uso são relacionados a tarefas secundárias correspondentes às ações e atividades específicas, ligadas diretamente ao uso ou funcionamento do artefato (RABARDEL, 1995a; 2002), por exemplo, ligar o equipamento (BITTAR, 2011).

Os esquemas de ação instrumentada (mediada por instrumentos) são referentes às tarefas primárias, ligadas ao objeto, e com o objetivo de realizar transformações no objeto da atividade (RABARDEL, 1995a; 2002). Bittar (2011, p. 161) cita como exemplo que, se o objetivo de uma tarefa “[...] é usar um editor de textos, então ao aprender a usar as ferramentas do aplicativo para realizar essa tarefa (o objetivo da ação do sujeito), este estará desenvolvendo um esquema de ação instrumentada”.

Esses dois tipos de esquema, de uso e de ação instrumentada, são conectados, pois um esquema de ação instrumentada, que objetiva realizar determinada tarefa, é constituído por um conjunto de esquemas de uso e de invariantes operatórios (TROUCHE, 2005). Nesse sentido, “compreender a função de um esquema de uso requer que ele seja considerado não isoladamente, mas como um componente de um esquema de ação instrumentado envolvido na execução de uma determinada tarefa” (TROUCHE, 2005, p. 151, tradução nossa).

Conforme Rabardel (1995a, p. 175, tradução nossa), os esquemas de utilização são multifuncionais, e são caracterizados de acordo com algumas funções: “epistêmicas focadas na

compreensão de situações; funções pragmáticas focadas na transformação da situação e obtenção de resultados; funções heurísticas que orientam e controlam a atividade¹”.

Rabardel (1995a) também discute que os esquemas de utilização não são aplicados diretamente, visto que devem ser adaptados às características de cada situação. Eles são, então, implementados e adequados conforme as particularidades de cada ocasião. Assim, na abordagem instrumental, quando nos referimos aos esquemas, “estamos pensando no sujeito que age sobre alguma coisa. Desta forma, um esquema tem uma característica dinâmica, o que é fundamental para a definição e diferenciação entre artefato e instrumento” (BITTAR, 2011, p. 160), conforme propõe Rabardel (1995a; 2002), e que discutimos adiante.

Trouche (2003), ao conectar o esquema da abordagem psicológica de Vergnaud à técnica da abordagem antropológica de Chevallard, sugere que “o estudo dos esquemas localiza o olhar sobre o *sujeito em ação*, o estudo das técnicas localiza o olhar sobre o *sujeito e sua relação com a instituição*, com as tarefas e ações que ela propõe” (TROUCHE, 2003, p. 14, tradução nossa, grifos do autor). Trouche (2003) alega que lhe parece vantajoso conceber as duas abordagens como complementares. Além disso, “o estudo dos esquemas é uma *construção*, a partir da observação do sujeito e das *regularidades* de sua ação; o estudo das técnicas é um *estudo* das ações e da *lacuna* entre as ações *prescritas* e as ações *realizadas* no interior de uma organização praxeológica” (TROUCHE, 2003, p. 15, tradução nossa, grifos do autor)².

Nesse contexto, para o autor, “um esquema é a construção de um observador a partir dos diferentes traços de atividade de um sujeito (ações, antecipações, inferências, etc.)”, e “descrever a atividade em termos de esquemas de ação instrumentados exige a consideração de invariantes operatórios” (TROUCHE, 2005, p. 152, tradução nossa). Nesse caso, Trouche (2005, p. 149, tradução nossa), apoiando-se em Vergnaud (1996), considera os invariantes operatórios como “[...] conhecimento implícito contido nos esquemas, que podem ser conceitos-em-ação, ou seja, conceitos considerados implicitamente relevantes; e teoremas-em-ação, [...] proposições consideradas verdadeiras” para o sujeito. Nesse sentido, os invariantes emergem durante a ação do sujeito no momento de resolver determinada tarefa, e não precisam

¹ Ressaltamos que a função heurística não é exclusiva do esquema, pode também ser atribuída ao artefato. Então é o instrumento como um todo que pode participar da gestão que o sujeito faz a si mesmo. Como Béguin (1994), consideramos que é uma verdadeira mediação heurística.

² O autor define “[...] uma ação como a parte observável de um esquema de uso” (TROUCHE, 2005, p. 151, tradução nossa). Além disso, conforme Trouche (2005, p. 151, tradução nossa), ao realizar uma ação, “[...] existe um esquema de utilização, com conhecimentos associados. Buscar esse conhecimento envolve considerar a ação não como um ato isolado, mas integrado a um esquema de ação instrumentado empregado pelo aluno para resolver determinadas tarefas”.

ser necessariamente verdadeiros, pois são as conclusões, conjecturas ou ideias que o sujeito mobilizou para a situação. Os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são relacionados e não há um sem o outro (TROUCHE, 2005), pois “[...] os conceitos podem ser encarados como ingredientes dos teoremas e os teoremas como geradores de conceito” (ALMEIDA; OLIVEIRA, 2009, p. 90).

Conforme o que foi apresentado sobre esquemas, concluímos que Rabardel (1995a) e Trouche (2003; 2005) apoiam-se na definição de Vergnaud sobre esquemas. Nesta pesquisa, ressaltamos que tomamos como base o que Trouche (2005) propõe sobre os esquemas, visto que nosso olhar está voltado para os esquemas com relação aos invariantes operatórios, porque temos interesse em dar atenção às técnicas instrumentadas, que são “articuladas com um ou vários instrumentos [...], a parte visível de um esquema de ação instrumentada” (TROUCHE, 2005, p. 151, tradução nossa)¹.

Para tanto, o autor propõe um exemplo considerando o cálculo de limite que um aluno faz no ambiente da calculadora gráfica. A tarefa dada foi: a função dada tem um limite infinito quando x tende a $+\infty$?

A partir disso, julgamos importante, para elucidar nossa compreensão de esquema de ação instrumentada, embora seja uma transcrição longa, o que Trouche (2005, p. 153, tradução nossa) descreve:

Se simplesmente descrevermos as ações da técnica instrumentada, diremos que o aluno pega sua calculadora, insere a função estudada no editor de função [aqui função refere-se a uma função da calculadora, e não a função matemática], depois usa a tabela de valores para observar o comportamento da função para grandes valores da variável, e infere a resposta, observando os valores tomados por $f(x)$, pois x assume valores grandes.

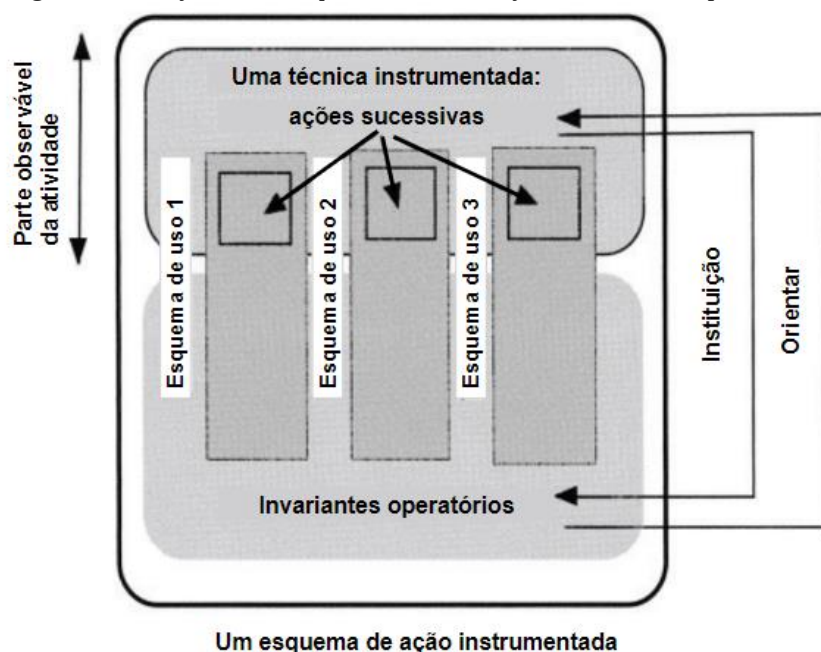
Se estivermos interessados no esquema de ação instrumentada, buscaremos identificar os invariantes operacionais [conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação] que orientam essa técnica. A busca por eles depende de observar o aluno realizando outras tarefas do mesmo tipo, e pedir-lhe que explique suas escolhas. Esse aluno explica que não usa o aplicativo gráfico, porque definir uma janela ‘certa’ para representar graficamente a função em grande escala é muito difícil. Portanto, ele usa a tabela de valores da calculadora e, na medida do possível, infere o comportamento da função. Ele conclui, assim, os seguintes casos: “se $f(x)$ for muito maior que x , ou se a função aumentar muito rapidamente, tudo bem. Por outro lado, se a função começa a diminuir ou oscilar, então não serve”. Consequentemente, pode-se supor que o esquema do aluno integra teoremas-em-ação do seguinte tipo: “se $f(x)$ toma valores muito maiores que x , então o limite de f é infinito”; “se a função aumentar muito fortemente, então o limite de f é infinito”; “se o limite de f é infinito, então f é necessariamente crescente”. De todas essas propriedades, emerge um conceito-em-ação do tipo: “ f tem um limite infinito, significa que, quando x é grande, $f(x)$ é muito grande, cada vez maior”.

¹ Conforme Trouche (2005), as ações são consideradas um padrão de uso, entram na constituição de um conjunto de técnicas e têm relação com os esquemas de uso.

Conforme o exemplo dado, o autor indica que “existe uma relação dialética entre as ações executadas e os invariantes operatórios”, visto que “os invariantes *orientam* as ações” e possibilitam a realização da tarefa por meio dos processos de investigação, inferências e justificativas (TROUCHE, 2005, p. 154, tradução nossa, grifos do autor). Ainda, segundo Trouche (2005, p. 154-155, tradução nossa, grifos do autor), concomitantemente a isso, pela atividade são *instituídos* os invariantes por meio das ações, pois “[...] os teoremas-em-ação permitem orientar o desempenho da tarefa que eles naturalmente estenderão seu domínio de validade, aumentarão sua operacionalidade e constituirão [...] um *conceito*, um elemento de um campo conceitual”. Logo, “[...] as ações estabelecem invariantes operatórios” (TROUCHE, 2005, p. 154-155, tradução nossa).

O autor propõe um modelo para representar a dialética (Figura 1).

Figura 1 - Relações entre esquema e técnica, ação e invariantes operatórios



Fonte: Trouche (2005, p. 155, tradução nossa).

Portanto, assim como Vergnaud, Trouche (2005) reconhece que o esquema é uma totalidade dinâmica e foca nos invariantes operatórios para olhar para os instrumentos que são formados pelos alunos.

A seguir, discutimos outros elementos da abordagem instrumental, iniciando pela diferenciação entre artefato e instrumento.

1.3.2 Artefato

Rabardel (1995a; 1995b; 2002) usa o termo artefato para definir um objeto, material ou abstrato, que é usado como meio de ação, destinado a dar sustento à atividade do sujeito para realizar determinada tarefa.

O autor relata que inicialmente o termo *objeto material fabricado* havia sido escolhido para indicar o objeto, termo com a intenção de ser neutro, e não antecipar a análise a ser empregada. Entretanto, a expressão foi considerada pesada e, então, a palavra escolhida para substituí-la foi artefato (RABARDEL, 1995a; 2002).

Segundo Rabardel (2002, p. 32, tradução nossa, grifo do autor),

Na antropologia, a noção de artefato designa qualquer coisa que tenha sofrido uma transformação, ainda que mínima, da origem humana. É, portanto, compatível com um ponto de vista antropocêntrico. Outra vantagem é que não restringe o significado às coisas materiais (do mundo físico). Também pode ser aplicado a sistemas simbólicos [...]. Assim, a partir de agora usaremos o termo artefato, um termo “neutro”, que não especifica um tipo particular de relação com o objeto.

Nesse contexto, o artefato pode ser um objeto técnico, como uma calculadora, um compasso, um computador, um software, um martelo, um piano e assim por diante, ou pode ser um objeto abstrato/simbólico, como uma notação, um algoritmo, gráficos, tabelas ou métodos, por exemplo (RABARDEL, 1995a; 2002).

Os artefatos, tanto físicos como abstratos, “[...] existem em atividade e são constantemente transformados por atividades”, e “[...] não devem ser analisados como coisas, mas como mediadores de uso” (RABARDEL, 1995a, p. 78, tradução nossa).

Drijvers *et al.* (2010) chamam a atenção para o fato de que não é trivial a forma como o artefato é usado. No exemplo referente à ação de usar um editor de texto, citado anteriormente, se o sujeito não tem conhecimento sobre o significado das letras, os recursos do editor de texto são artefatos inúteis para ele (DRIJVERS *et al.*, 2010). Segundo os autores, quando o sujeito aprende a escrever à caneta, que antes era usada apenas para desenhar, passa a ser um artefato usado para escrever. Nesse sentido, a caneta e as habilidades em desenvolvimento do sujeito formam um instrumento para escrever, e “isso nos leva à construção psicológica do instrumento sendo mais do que um artefato” (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 108, tradução nossa).

1.3.3 Instrumento

Rabardel (1995a; 2002) propõe considerar o instrumento como uma entidade mista composta por um artefato, material ou simbólico (pode ser um artefato, uma parte de um artefato ou um conjunto de artefatos) e um ou vários esquemas de utilização. Nessa perspectiva, a definição de instrumento proposta pelo autor “[...] não associa apenas o artefato à ação do sujeito para a execução de uma tarefa, mas também os esquemas de utilização. O conjunto artefato e esquemas constituem o instrumento” (RABARDEL, 1995a. p. 11, tradução nossa). Assim, o instrumento não pode ser reduzido apenas ao artefato.

Conforme Rabardel (1995a; 2002), os dois elementos, artefato e esquemas, são associados para constituir o instrumento e, mesmo que cada um tenha suas características, ambos têm uma relação de independência relativa. Assim,

Um mesmo esquema de utilização pode ser aplicado a uma variedade de artefatos pertencentes à mesma classe (como esquemas de direção de um carro transpostos pelo sujeito de um carro para outro) [...]. Por outro lado, é possível que um artefato seja integrado a uma variedade de esquemas de utilização, que às vezes atribui diferentes significados e funções [...], como a associação do esquema “golpe” com uma chave inglesa, transformando-a em um instrumento com a mesma função de um martelo (RABARDEL, 2002, p. 68, tradução nossa, grifo do autor).

O autor também evidencia que o instrumento só é instituído para o sujeito como tal, quando o sujeito lhe confere status de meio para atingir os objetivos de sua ação, ou seja, quando ele o incorpora na realização de suas atividades (RABARDEL, 2002). Nesse contexto, há um instrumento quando “[...] existe uma relação significativa entre o artefato e o usuário para um tipo específico de tarefa” (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 108, tradução nossa).

Drijvers *et al.* (2010), tomando como base os estudos de Rabardel, propõem que o instrumento, além de ser composto pelos esquemas e pelo artefato, também envolve técnicas que o usuário desenvolve e aplica quando usa o referido artefato. Assim, estabelecem que “Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa” (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 108, tradução nossa).

O instrumento estabelecido pode ser momentâneo, ligado apenas a situações e condições particulares vivenciadas pelo sujeito, ou pode ser de natureza permanente e mantido como um meio disponível para ações futuras (RABARDEL, 2002).

Como um mesmo artefato pode ser usado de diferentes formas e para diferentes fins, “[...] pode ter status instrumentais muito diferentes, dependendo dos assuntos [...], dependendo da situação e até de momentos diferentes dessa situação” (RABARDEL, 2002, p. 67, tradução

nossa). Além disso, conforme o autor, o instrumento não é dado ao sujeito, mas é o resultado da combinação do artefato e da sua ação para realizar determinada tarefa.

Bittar (2011, p. 160-161, grifo da autora) destaca três ideias principais na definição dinâmica de instrumento:

- cada sujeito constrói seus próprios esquemas de utilização, portanto, seu próprio instrumento, que difere do instrumento do “outro”;
- a medida que o sujeito continua a manipular o instrumento, vai construindo novos esquemas que vão transformando o instrumento. Estes esquemas são modificados pelo sujeito de acordo com suas necessidades;
- um mesmo artefato dá origem a diferentes instrumentos construídos por diferentes sujeitos.

De forma complementar, destacamos que Trouche (2005) cita que uma calculadora simbólica pode se constituir em um conjunto de instrumentos para determinado aluno, podendo ser usada para resolver equações, para estudar a variação de função, por exemplo. Além disso, cita que duas calculadoras iguais para dois alunos podem se constituir em instrumentos diferentes (TROUCHE 2003).

Bittar (2011, p. 162) destaca que “[...] o instrumento não é algo pronto e acabado; ele pode ser elaborado e reelaborado pelo sujeito ao longo das atividades realizadas com o artefato, agora um instrumento, uma vez que já sofreu a ação do sujeito”. Desse modo, o artefato vai sendo enriquecido conforme as situações em que esteve envolvido, dando origem a diferentes instrumentos para os sujeitos (RABARDEL, 1995a; 2002). Logo, conforme Rabardel (1995a; 2002), sem o artefato não há instrumento.

O processo de um determinado artefato se tornar instrumento para o sujeito é denominado por Rabardel (1995a; 2002) como gênese instrumental.

Antes de apresentar mais informações sobre esse processo, apoiados em Rabardel (1995b), ressaltamos que, principalmente considerando o contexto de ensino, os instrumentos são, por vezes, vistos como auxiliares, neutros, e não influenciáveis na construção do conhecimento dos alunos. Rabardel (1995a, p. 321, tradução nossa, grifo do autor) chama a atenção para o fato de que “[...] os instrumentos não são conceitualmente neutros. Eles contêm uma ‘visão de mundo’ que se impõe em menor ou maior grau aos usuários, influenciando, assim, o desenvolvimento de suas competências”.

Desse modo, o instrumento constituído pelo sujeito é formado por um conjunto de potencialidades e limitações que ele identifica, compreende e gerencia durante a realização de tarefas (RABARDEL, 1995b). “Nesse sentido, o uso de um instrumento aumenta a capacidade de assimilação do assunto e contribui para a abertura do campo de suas possíveis ações”

(RABARDEL, 1995b, p. 62, tradução nossa), não se limitando apenas a ser um auxiliador na execução de tarefas.

1.3.4 *Gênese Instrumental*

O processo complexo e dinâmico de construção de um instrumento para o sujeito a partir de um artefato, denominado gênese instrumental, é o conceito central da abordagem instrumental proposta por Rabardel (1995a; 2002). A gênese instrumental é um processo realizado pelo sujeito, necessita de tempo e tem influência das particularidades do artefato, das vivências e atividade do sujeito (TROUCHE, 2005).

Nessa perspectiva, Trouche (2018a, p. 2, tradução nossa), apoiado em Rabardel (2002), destaca que “a relação entre um artefato e um instrumento, então, é dialética: o instrumento se constitui a partir de um determinado artefato, mas também o próprio artefato pode ser transformado pela gênese instrumental”.

Bellemain e Trouche (2019, p. 109, grifo dos autores), amparados em Rabardel, discutem que o termo *gênese*: “[...] não significa ‘nascimento de uma entidade’, mas ‘desenvolvimento’ dessa entidade. Os instrumentos são entidades vivas, que se desenvolvem durante a atividade dos alunos: este desenvolvimento passa por fases de estabilidade, e por fases de evolução”. Logo, os instrumentos não são neutros (RABARDEL, 1995), mas são aprimorados e adaptados de acordo com as necessidades de cada sujeito, tomando como princípio o seu contexto, a tarefa e os conhecimentos matemáticos.

Conforme Trouche (2018b, p. 4, tradução nossa, grifo do autor), “[...] na raiz de cada gênese instrumental existem dois ‘protagonistas’: um artefato e um sujeito”. Nesse sentido, Rabardel (1995a; 2002) aponta que a gênese instrumental é composta por duas dimensões, cada uma com suas características, mas intimamente interligadas: a instrumentalização (direcionado para o artefato) e a instrumentação (direcionado ao sujeito), como discutimos a seguir.

1.3.5 *Instrumentalização*

Conforme Rabardel (1995a, p. 211, tradução nossa), a instrumentalização é relacionada “[...] ao surgimento e evolução dos componentes artefato do instrumento: seleção, reagrupamento, produção e instituição de funções, [...] transformação do artefato (estrutura, funcionamento, etc.) que prolongam as criações e realizações de artefatos”. O autor também

destaca que essa dimensão pode ser definida como aquela em que o sujeito enriquece as características do artefato.

A instrumentalização tem como base as características e propriedades intrínsecas do artefato, tendo status condizente com a atividade e com o contexto. Entretanto, essa dimensão também pode envolver uma mudança de uso, de forma que a função do artefato pode ser transformada para se adaptar à situação e ter status de função adquirida (função extrínseca) (RABARDEL, 2002). Rabardel (2002, p. 81, tradução nossa) cita como exemplo a massa da chave inglesa substituir um martelo:

[...] a massa, que é uma propriedade intrínseca da chave inglesa, não está no centro da função original desse artefato (que é claramente central para o martelo). No entanto, o sujeito usa a massa da chave inglesa para lhe conferir novas funções (por exemplo, martelar um prego). Essas novas funções, quando mantidas, têm o status de propriedades extrínsecas do artefato instrumentalizado.

Assim, de acordo com Rabardel (2002), além das propriedades intrínsecas do artefato (peso da chave inglesa), outras funções podem ser adicionadas, como propriedades extrínsecas (a chave inglesa ser usada como martelo), que são atribuídas pelo sujeito ao artefato para constituir um instrumento para a situação. Essas propriedades extrínsecas visam a enriquecer as funções do artefato e podem ser momentâneas ou duradouras (RABARDEL, 2002). O autor evidencia que não há transformação física do artefato.

Segundo Trouche (2005), a instrumentalização envolve diferentes etapas, como descoberta, seleção, personalização e transformação, muitas vezes até as que não foram planejadas pelos criadores, como a criação de atalhos no teclado, por exemplo.

Sendo assim, “a instrumentalização é a expressão de uma atividade específica do sujeito: para que o usuário pensa que a ferramenta foi projetada e como ela deve ser utilizada: *a elaboração de um instrumento ocorre em seu uso*” (TROUCHE, 2005, p. 148, tradução nossa, grifos do autor).

Com relação ao uso do software Grafeq para realizar uma tarefa, Padilha e Bittar (2013, p. 9, grifo dos autores) indicam que alguns atos de uma professora são relacionados à instrumentalização: “[...] investiga o menu de comandos; seleciona o comando novo gráfico no menu; fecha a janela de ‘botões fáceis’; etc.”.

1.3.6 Instrumentação

A dimensão instrumentação, direcionada ao sujeito, refere-se “[...] ao surgimento e à evolução dos esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu

funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação, [...] e assimilação recíproca, assimilação de novos artefatos e esquemas já constituídos,” entre outros (RABARDEL, 1995a, p. 211, tradução nossa).

Segundo Rabardel (1995a), o processo de o sujeito descobrir as propriedades intrínsecas do artefato é seguido pela acomodação de seus esquemas, mas também pela mudança de significado do instrumento, visto que há a associação do artefato com novos esquemas.

Quando o sujeito implementa esquemas com os quais já têm familiaridade, eles podem receber um novo significado e formar outro esquema (RABARDEL, 1995a). Rabardel (1995a) ressalta que, em situações que necessitem de artefatos para ser solucionadas, o instrumento será composto pelos esquemas que o sujeito tem familiaridade e pelos artefatos. Nesse sentido,

[...] esses esquemas não têm somente uma gênese, e igual aos artefatos, podem adquirir novos significados. A gênese desses esquemas, a assimilação de novos artefatos aos esquemas (dando, assim, um novo significado aos artefatos), a acomodação dos esquemas (contribuindo para suas mudanças de significado), constituem a segunda dimensão da gênese instrumental: processos de instrumentação (RABARDEL, 1995a, p. 221, tradução nossa).

De acordo com Trouche (2005), a instrumentação é relacionada a como as funcionalidades do artefato, sejam potencialidades ou restrições, moldam o sujeito. Ainda conforme o autor, a instrumentação continua por meio do surgimento e evolução de esquemas no decorrer da realização de certo tipo de tarefa.

Padilha e Bittar (2013, p. 9), observando as descrições de uma professora ao usar o software Grafeq para realizar uma tarefa, indicam como exemplos da instrumentação “[...] inserir uma nova relação, digitar a função $y = \text{sen}(x)$ e plotar seu gráfico; editar a função $y = \text{sen}(x)$ transformando-a em $y = x$ e plotar seu gráfico; etc.”

As duas dimensões que constituem a gênese instrumental, instrumentalização e instrumentação, são entrelaçadas e são realizadas pelo sujeito (TROUCHE, 2018b). Elas “se diferenciam pela orientação da atividade”, na “instrumentação, a atividade está direcionada para o sujeito”, e na “instrumentalização, a atividade é orientada para o componente artefato do instrumento” (RABARDEL, 1995a, p. 12-13, tradução nossa).

A seguir, apresentamos o nascimento e desenvolvimento da Aproximação Instrumental, que articula a TAD e a Teoria da Instrumentação.

1.4 Aproximação Instrumental

Artigue (2007, p. 14, tradução nossa), em sua palestra na XII Conferência Interamericana de Educação Matemática, evidencia que “há mais de vinte anos, o primeiro estudo proposto pela Comissão Internacional para o Ensino de Matemática (ICMI) teve como tema a influência dos computadores na matemática e seu ensino”, relacionando tecnologia e educação.

Com o passar dos anos, os conhecimentos avançaram, alguns recursos tecnológicos, como os computadores, foram aperfeiçoados e outros foram criados, como é o caso dos softwares. Entretanto, mesmo depois de anos, com pesquisas e discussões, segundo Artigue (2007), esses objetos provocam problemas para o sistema educacional, ainda que proporcionem novas maneiras de interação didática e social.

No início dos anos de 1990, quando Artigue trabalhou colaborando com um grupo de professores especialistas no uso de calculadoras e programas de computador para investigar e identificar o potencial desses recursos para o ensino e a aprendizagem da matemática dos alunos, percebeu descompassos entre o que era exposto, tanto pelos especialistas como na literatura, sobre o potencial dos programas de computador de cálculo e o que foi observado nas aulas (ARTIGUE, 2007).

Nesse sentido, Artigue (2007) relata que foi necessário tomar consciência dessa diferença, além da subestimação das questões instrumentais. Assim, esses contrastes se tornaram questões de pesquisas, durante as quais as equipes de pesquisadores optaram por se distanciar do discurso habitual e dos quadros cognitivos usados até o momento (ARTIGUE, 2007).

Considerando os obstáculos das pesquisas, uma das hipóteses levantadas pelos membros desses projetos refere-se à multiplicidade e fragmentação dos quadros teóricos usados para analisar o potencial das tecnologias para a aprendizagem matemática (ARTIGUE, 2007).

Corroborando com esta ideia, Trouche (2016), referindo-se à proliferação de ferramentas no âmbito da educação, como calculadoras gráficas, destaca o surgimento de novos fenômenos dentro de sala de aula. Assim, considerando a influência do seu uso, Trouche (2016) discute o potencial desses materiais para a educação matemática, ressaltando que novos referenciais teóricos eram necessários para analisá-los.

Nesse contexto, Artigue (2007) relata que se procurou articular quadros teóricos e abordagens para desenvolver um referencial que levasse em consideração também o uso dessas tecnologias. Isso porque, enquanto pesquisadores, necessitavam de um discurso que “[...]”

permitisse considerar conceitos e técnicas em suas relações dialéticas, um discurso menos centrado no aluno, e que tratasse de questões de integração em sua dimensão sistemática”, que permitisse “[...] considerar a dimensão instrumental no processo de aprendizagem” (ARTIGUE, 2011, p. 18, tradução nossa).

Conforme Trouche (2016, p. 245, tradução nossa), “em uma comunidade científica viva, uma nova aproximação raramente emerge da iniciativa de um único pesquisador: ela emerge para responder às necessidades práticas”. Sendo assim, por meio da interação mútua entre pesquisadores como Artigue, Trouche, Guin, Lagrange e Defouad, por exemplo, as reflexões sobre as questões instrumentais começaram a se desenvolver e a amadurecer. Esse foi o início da Aproximação Instrumental, proposta principalmente por Artigue (2011) e Trouche (2016), considerando os novos fenômenos didáticos (ARTIGUE, 2002). Como os pesquisadores eram familiarizados com a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard (1992; 1999), e acostumados a colaborar com pesquisas no campo da Ergonomia Cognitiva (RABARDEL, 1995a; 2002), surgiu a ideia da articulação entre as duas bases teóricas para formar um novo referencial, a Aproximação Instrumental (ARTIGUE, 2007).

A TAD, sensível às normas e valores institucionais e como eles influenciam os processos de ensino e de aprendizagem, reconhecendo os conhecimentos matemáticos como objetos relativos a cada instituição e dando atenção ao trabalho técnico, por meio da noção de praxeologias, como discutido anteriormente, forneceu um arcabouço macroteórico (ARTIGUE, 2002; 2007). Além disso, oferece ferramentas potentes e complementares que consideram a integração dialética entre a atividade matemática técnica e conceitual (ARTIGUE, 2002).

Desse modo, Artigue (2007, p. 20, tradução nossa) destaca que a TAD foi considerada “[...] um quadro conceitual, capaz de enfrentar as necessidades teóricas que vivenciamos”, pois prevê “[...] uma ampla análise sistêmica que vai além do aluno, sensível ao papel que as técnicas desempenham nas práticas humanas, ao desenvolvimento conceitual que delas emergem e às ferramentas dessas práticas”.

A TAD, por ser uma teoria didática, foi desenvolvida para analisar a atividade humana, especificamente a atividade de fazer matemática, e se volta para as questões do processo de ensino e de aprendizagem, mas não foi ampliada para pensar na dimensão da instrumentação (ARTIGUE, 2002; 2011).

Levando em conta que era necessário um referencial que abordasse as questões instrumentais, os pesquisadores consideraram a abordagem instrumental, no campo da Ergonomia Cognitiva (TROUCHE, 2016).

Essa não é uma abordagem específica do âmbito da educação, pois considera os “[...] processos de aprendizagem profissional que ocorrem em ambientes tecnologicamente complexos, como a formação de pilotos de avião” (ARTIGUE, 2002, p. 250, tradução nossa). Entretanto, foram desenvolvidas noções conceituais que podem ser adaptadas para outros contextos, como o educacional.

Nesse sentido, a abordagem instrumental forneceu elementos “[...] para estudar o papel que as tecnologias digitais desempenham nos processos de aprendizagem” (ARTIGUE, 2007, p. 20, tradução nossa), pois faz distinção entre artefato e instrumento e dá atenção ao processo de gênese instrumental composto pelas duas dimensões: instrumentação e instrumentalização, como apresentado anteriormente. Ademais, reconhece que ferramentas usadas nas atividades modelam os processos e os saberes, permitindo agir sobre o mundo (função pragmática), compreendê-lo (função epistêmica) e influenciando a forma como são organizadas e desenvolvidas nossas ações (função heurística) (ARTIGUE, 2007).

De acordo com Trouche (2016), com a atividade reorganizada para ser desenvolvida com o uso de instrumentos, novas condições e possibilidades de ação são oferecidas ao sujeito. Nesse contexto, conforme o autor,

Parece bastante natural que a educação matemática tenha emprestado da ergonomia cognitiva formas de pensar processos de apropriação de artefatos. Esses conceitos basicamente distinguem, por um lado, o que foi dado ao sujeito (artefatos, situados historicamente e culturalmente); e por outro, o que foi construído pelo sujeito (os instrumentos) durante a finalização da atividade (TROUCHE, 2016, p. 246, tradução nossa).

No decorrer da sua atividade, o sujeito desenvolve o longo e complexo processo da gênese instrumental, assim como procedimentos de forma eficiente para manipular o artefato, adquirindo conhecimentos (TROUCHE, 2016).

Sendo assim, a abordagem instrumental proposta por Rabardel “[...] pareceu particularmente útil para entender tanto a ação desses artefatos sobre o comportamento dos alunos ([...] instrumentação) quanto as ações dos alunos sobre esses artefatos ([...] instrumentalização)” (TROUCHE, 2018a, p. 3, tradução nossa).

Como destacado, a abordagem instrumental não se volta para os problemas existentes nos sistemas educacionais, e apenas ter validade científica e social não lhe garante validade didática (ARTIGUE, 2002; 2007).

Portanto, Artigue (2007, p. 21, tradução nossa) revela que “[...] a articulação dessas duas abordagens”, TAD e abordagem instrumental, “pareceu potencialmente produtiva” para ser usada de forma a revelar o potencial da tecnologia digital para a aprendizagem de matemática.

As primeiras pesquisas usando a perspectiva ergonômica e a antropológica contribuíram para avanços nas reflexões dos pesquisadores (ARTIGUE, 2002). Como exemplo, a tese de Luc Trouche (1997) e a de Defouad (2000), orientadas por Artigue. Por meio da realização desses trabalhos, emergiu a distinção sobre a equivalência entre o valor pragmático e epistêmico das técnicas, como discutimos adiante.

1.4.1 *Técnicas instrumentadas e seus valores*

Trouche (2005, p. 151, tradução nossa) descreve que a atividade humana pode ser descrita em termos de técnicas, e as compreende como “[...] conjuntos de ações realizadas por um sujeito para realizar uma determinada tarefa”. As técnicas englobam noções teóricas, como apresentamos anteriormente.

Considerando as reflexões das pesquisas realizadas, visando à Aproximação Instrumental, as técnicas começaram a ser observadas e analisadas em termos de valor pragmático e epistêmico (ARTIGUE, 2007). O valor pragmático é relacionado ao potencial produtivo como, por exemplo, eficiência, custo e campo de validade, visando a produzir resultados, permitindo transformar (ARTIGUE, 2002; 2007; TROUCHE, 2003). O valor epistêmico refere-se à contribuição para a compreensão dos objetos envolvidos e mobilizados durante a realização da tarefa (ARTIGUE, 2002; 2007; TROUCHE, 2003).

Conforme Trouche (2005, p. 151, tradução nossa), quando a técnica envolve ao menos um, ou vários artefatos, indica-se como técnica instrumentada, e se refere à “[...] parte observável de um esquema de ação instrumentado”. Nesse sentido, as técnicas que são instrumentadas por tecnologias são modificadas, e isso muda seu valor pragmático e epistêmico (ARTIGUE, 2002).

Com a introdução das tecnologias digitais na sala de aula, perturbam-se os equilíbrios tradicionais entre os dois valores das técnicas, que foram sendo estabelecidos progressivamente na cultura de papel e lápis (ARTIGUE, 2007). Conforme a autora, para que esse desequilíbrio seja superado e seja assegurado o potencial epistêmico das técnicas instrumentadas, novas tarefas são necessárias. Ela também ressalta que não se trata de apenas adaptar tarefas que foram estabelecidas para serem resolvidas usando lápis e papel, porque ao fazer isso, reforça-se apenas a componente pragmática (ARTIGUE, 2002).

1.4.2 *Diferenças entre técnicas no papel e lápis e técnicas usadas nos artefatos tecnológicos*

Quando um novo conteúdo matemático começa ser explorado em sala de aula e são usados recursos como lápis e papel, geralmente algumas técnicas são apresentadas aos alunos pelo professor (ARTIGUE, 2002). Com o passar do tempo e do treinamento dessas técnicas, em diferentes contextos, elas acabam se tornando oficiais (ARTIGUE, 2002). Essas técnicas, que são as formas de resolução, são constituídas por um conjunto de raciocínio e prática, e levam em consideração os conhecimentos que os alunos já possuem (ARTIGUE, 2002).

No entanto, quando um objeto tecnológico, como uma calculadora, pode ser usado para auxiliar a resolução de uma tarefa, há “[...] uma explosão de técnicas possíveis que podem ser usadas” (ARTIGUE, 2002, p. 260, tradução nossa). A autora cita, como exemplo, o “[...] número de comandos de zoom diferentes oferecidos no aplicativo gráfico da calculadora, nos diferentes esquemas que podemos usar para obter o sinal de uma expressão, ou para verificar uma equivalência algébrica” (ARTIGUE, 2002, p. 260, tradução nossa).

Artigue (2002) também explica a diferença entre usar recursos como lápis e papel ou usar uma calculadora. Por exemplo, ao inserir uma expressão na calculadora, o resultado é dado automaticamente ao sujeito; além disso, a expressão final fornecida pelo objeto tecnológico é diferente do que foi digitado inicialmente (ARTIGUE, 2002). Ao usar lápis e papel exige-se um trabalho manual, em que o sujeito deve desenvolver um passo a passo e tem acesso às expressões intermediárias que produziu (ARTIGUE, 2002).

Quando é usado algum objeto tecnológico, como calculadoras ou softwares, na sala de aula, é favorecida a visualização e manipulação de diferentes representações do mesmo objeto matemático. Diferentemente do “[...] que é usual no trabalho em sala de aula com papel e lápis, em que as formas representacionais são cuidadosamente escolhidas e as transformações entre elas são cuidadosamente codificadas” (ARTIGUE, 2002, p. 265, tradução nossa).

Sendo assim, podemos observar que as técnicas usadas com lápis e papel são diferentes das técnicas instrumentadas pelas tecnologias digitais. Entretanto, Artigue (2002) chama a atenção para o fato de que ambos os tipos de técnicas requerem um discurso teórico de acompanhamento que justifique a técnica. Para a autora, os discursos para as técnicas oficiais, de lápis e papel, “[...] são enquadrados pelos programas, livros didáticos e outros recursos educacionais”, sendo mais conhecidos (ARTIGUE, 2002, p. 261, tradução nossa). No entanto, “um discurso tem que ser construído para técnicas instrumentadas”, e nesse caso, “[...] as dificuldades são óbvias, porque esse discurso vai evocar conhecimentos que vão além da cultura

matemática padrão. Ele necessariamente entrelaçará o conhecimento matemático padrão e o conhecimento sobre o artefato” (ARTIGUE, 2002, p. 261, tradução nossa).

Nesse contexto, compreender o potencial das tecnologias digitais para ensinar matemática demanda uma profunda reflexão sobre o possível valor epistêmico das técnicas instrumentadas (ARTIGUE, 2002). Esse valor, conforme Artigue (2002), depende das situações e contextos, tanto cognitivos como institucionais. As tarefas que serão propostas aos alunos e que possam ser usadas tecnologias digitais em sua resolução devem ser planejadas visando ao uso e ser apenas adaptações do que se produz via papel e lápis (ARTIGUE, 2002).

Considerações

Por meio do que foi apresentado e discutido neste artigo, compreendemos que a inserção das tecnologias digitais na sala de aula causou desequilíbrio no sistema educacional que, até o momento, usava recursos como lápis e papel. Nesse sentido, a Aproximação Instrumental surgiu da emergência e necessidade para analisar os novos fenômenos didáticos que ocorrem no ambiente escolar com o uso de tecnologias digitais.

Considerando que essa demanda surgiu do anseio de mais de um pesquisador, Trouche (2016, p. 248, tradução nossa) relata que “a Aproximação Instrumental foi discutida no Terceiro Simpósio de Álgebra Computacional em Educação Matemática realizado em Reims, em 2003, e essa discussão deu origem a dois artigos (HOYLES *et al.*, 2004; TROUCHE, 2004)”. Dessa forma, mais pesquisadores poderiam ter contato com a articulação dos referenciais teóricos propostos por Artigue e Trouche, além de observarem a importância das questões instrumentais no processo de ensino e de aprendizagem.

A articulação entre a TAD e a abordagem instrumental permitiu compreender melhor as questões de integrar os recursos tecnológicos no ambiente escolar, como esses objetos influenciam a aprendizagem dos alunos e o trabalho do professor.

A partir de todas essas discussões e considerando o desenvolvimento desta pesquisa, ressaltamos que tomamos como base o que Chevallard (1999) e Bosch e Chevallard (1999) propõem sobre tarefa e o que Trouche (2005) discute acerca de técnicas instrumentadas, visto que as tarefas que são discutidas ao longo desta pesquisa devem ser realizadas com o uso do artefato GeoGebra. Nesse sentido, destacamos que, fundamentados em Rabardel (1995a; 2002), entendemos que o software GeoGebra pode possuir status de artefato (antes de ser utilizado pelo sujeito) ou de instrumento (quando o sujeito o usa para realizar atividades e se apropria das ferramentas e/ou recursos disponíveis) durante a construção de cenários animados.

Com relação aos esquemas, elemento que também compõe o instrumento, amparamo-nos no que Trouche (2005) discute, pois como já explicitado, pretendemos olhar para os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) dando atenção às técnicas instrumentadas.

Também, por meio das dimensões da gênese instrumental, como estabelece Rabardel (1995a; 2002), buscamos identificar como o sujeito afeta o artefato do instrumento, direcionando nosso olhar para o artefato (instrumentalização), e como o artefato afeta o sujeito, direcionando a atenção para o sujeito (instrumentação).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. C.; OLIVEIRA, H. O processo de gênese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. **Quadrante**, vol. XVIII, nº 1 e 2, p. 87-118, 2009.

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba. Ed. UFPR. 2007.

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS environment: the Genesis of a reflection about Instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal for Computers in Mathematical Learning**, v.7, p. 245-274, 2002.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. In: **XII Conferência Inter-Americana de Educación Matemática**, Querétaro – México, p. 13-33, 2007.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, año 6, n. 8. p. 1-15, 2011.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2019.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas - SP, v. 25, n. 3, p.364-387, set./dez. 2017. <https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640>

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n.1, p. 77-124, 1999.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 29-44, 2019.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n. 1, p.77-111, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, n.2, p.221-266, 1999.

DEFOUAD, B. Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S. **Tese de doutorado**, Université Paris 7, 2000.

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**, Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer, 2005, p. 163-196. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_8

DRIJVERS, P. *et al.* Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, C.; LAGRANGE, J. B. C. (Ed.). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**, New York: Springer, 2010, p. 89-133. http://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4419-0146-0_7

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. **Educación Matemática**, vol. 33, núm. 1, abril, 2021, p. 7-40. DOI: 10.24844/EM3301.01

PADILHA, L. C. S.; BITTAR, M. Apropriação por professores de matemática para fins pedagógicos: uma Abordagem Instrumental. In: **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM**. Curitiba - PR. 2013.

PEDREROS, M. P. **Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Instrumental**. 236f. Dissertação (Mestrado em Educación Matemática) - Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, 2012.

RABARDEL, P. **Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. Universidad Industrial de Santander, 1995a.

RABARDEL, P. **Qu'est-ce qu'un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation**. Les dossiers de l'ingénierie éducative, n. 19, p. 61-65, 1995b.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos**. Université paris 8. hal-01020705, 2002.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. As organizações praxeológicas no ensino de geometria: análise da prática pedagógica de uma professora indígena. **XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba – PR. 2013.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. **Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Amazônia, v.13, n.27, p.51-66, set 2017. <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v13i27.4281>

SANTOS, S. dos P. **A Teoria Antropológica do Didático: condições e restrições reveladas pelas teses e dissertações defendidas no Brasil na área da Educação Matemática**. 171f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

TROUCHE, L. A propos de l'apprentissage de fonctions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. **Tese de doutorado**, Université de Montpellier, 1997.

TROUCHE, L. **Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques**: nécessité des orchestrations. Université Paris VII, 2003. hal-00190091

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: GUIN, K.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The didactical challenge of symbolic calculators**: Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. p.137-162, 2005.

TROUCHE, L. Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (Org). **Tools and Mathematics**: Instruments for Learning. Springer, 2016. p. 219-256. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0_10

TROUCHE, L. Instrumentalization in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. N.Y.: Springer. 2018a. DOI: 10.1007/978-3-319-77487-9_100013-1

TROUCHE, L. Instrumentation in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. N.Y.: Springer. 2018b. DOI: 10.1007/978-3-030-15789-0_80

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, Tradução de Maria Lucia Faria Moro, revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares, 30, p. 245-252, 1985.

VERGNAUD, G. A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Conférence à la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti. In A. Bessot (Ed.), **Formation des enseignants et Étude Didactique de l'Enseignant**. Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti, p. 3-19. Tradução de Camila Rassi, revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares. Grenoble: CNRS/INPG/UJF, 2002.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; Muniz, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 13-26.

2 FUNÇÃO AFIM E SUAS CARACTERÍSTICAS ABORDADAS POR MEIO DO CENÁRIO ANIMADO ABELHA NO GEOGEBRA¹

Adrieli Cristine Bueno
Maria Ivete Basniak
Daysi Julissa García-Cuéllar

Resumo: Este artigo teórico objetiva discutir características da função afim por meio da construção de um cenário animado elaborado no GeoGebra a partir dos elementos da Aproximação Instrumental (AI). A AI é usada para revelar o potencial da tecnologia digital para a aprendizagem de matemática. Os resultados indicam que, através de técnicas empregadas e dos invariantes operatórios dos esquemas considerados, é possível vislumbrar características da função afim ao utilizar esses elementos matemáticos para construir o cenário animado. Assim, elementos da AI auxiliaram a evidenciar características da função afim, como crescente e decrescente, ao construir o cenário animado Abelha no GeoGebra.

Palavras-chave: Aproximação Instrumental. Tecnologias na Educação Matemática. Técnica instrumentada. Invariantes operatórios.

Affine function and its characteristics approached through bee animated scenario in GeoGebra

Abstract: This theoretical paper aims at discussing affine function characteristics through building an animated scenario elaborated in GeoGebra from elements of Instrumental Approach (IA). IA is used to reveal digital technology potential for mathematics learning. Findings indicate that through techniques used and operative invariants of considered schemes is possible envision affine function characteristics when using these mathematical elements to build the animated scenario. Therefore, IA elements helped to highlight affine function characteristics, such as crescent and decrescent, when building the bee animated scenario in GeoGebra.

Keywords: Instrumental Approach. Technologies in Mathematics Education. instrumented technique. Operative invariants.

Función afín y sus características abordadas por medio del escenario animado abeja en GeoGebra

Resumen: Este artículo tiene el objetivo de discutir características de función afín por medio de la construcción de un escenario animado en GeoGebra, desde los elementos de Aproximación Instrumental (AI). AI es utilizada para revelar el potencial de la tecnología digital para aprendizaje de matemáticas. Los hallazgos indican que, a través de técnicas utilizadas e invariantes operativas de esquemas considerados, es posible observar características de función afín cuando se utilizan elementos de las matemáticas para construir el escenario animado. Por tanto, elementos de la AI ayudaron a hacer evidentes características de función afín, como crecente y decreciente, cuando se construyó el escenario abeja en GeoGebra.

Palabras clave: Aproximación Instrumental. Tecnologías en Educación Matemática. Técnica Instrumentada. Invariantes operativas.

¹ Este artigo foi aceito para ser publicado na revista PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática.

2.1 Introdução

A inserção de tecnologias digitais no âmbito educacional, iniciada nos anos 1990, suscitou problematizações no campo da Educação Matemática. Segundo Bellemain e Trouche (2019), houve mudanças conceituais importantes que provocaram reflexão sobre os novos fenômenos na sala de aula, referentes ao processo de ensino e de aprendizagem quando há interação com tecnologias.

Considerando que os avanços tecnológicos afetam não apenas o campo educacional, mas outras áreas, como a do trabalho humano, apoiado no campo da Ergonomia Cognitiva, Rabardel (1995) começou a discutir sobre os homens e a tecnologia. Rabardel (1995, p. 47, tradução nossa) estruturou a abordagem instrumental para compreender “[...] uma das formas de relação com objetos técnicos [...] a partir do estudo das relações instrumentais que os sujeitos mantêm com os artefatos na ação”.

Embora a abordagem instrumental não tenha sido concebida no campo educacional, pesquisadores utilizam-na para compreender fenômenos que existem e interferem no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos ao utilizar recursos tecnológicos (ARTIGUE, 2011).

Relacionado à educação, com o objetivo de determinar como ocorre a apropriação do conhecimento pelos alunos a partir dos elementos presentes no processo de ensino, mas sem preocupação com o uso de tecnologias, Chevallard (1992) e colaboradores estruturam a Teoria Antropológica do Didático (TAD), fundamentada na Teoria da Transposição Didática e na Teoria das Situações Didáticas.

Entretanto, Artigue (2011) e Trouche (2016) necessitavam de uma base teórica que articulasse a relação e a interação entre alunos e tecnologia, e considerasse as técnicas mobilizadas e os conceitos matemáticos envolvidos nesse processo. Como conheciam a TAD (CHEVALLARD, 1992) e habituados a trabalhar e colaborar com pesquisadores em Ergonomia Cognitiva (RABARDEL, 2002), Artigue (2011) e Trouche (2016) impulsionaram a articulação entre a TAD e a abordagem instrumental para formar um novo quadro teórico: a Aproximação Instrumental (AI). Segundo García-Cuellar e Salazar (2020, p. 46), apoiadas em Artigue (2011), a AI é a “[...] teoria necessária, quando se interage com tecnologias digitais”, que é o caso desta pesquisa, que propõe a construção de um cenário animado no software GeoGebra.

Um cenário animado é uma construção no GeoGebra em que os elementos matemáticos são relacionados a ferramentas do software que proporcionam movimento à construção, produzindo, ao final, uma cena animada (BUENO; BASNIAK, 2020a). Segundo Bueno e

Basniak (2021, p. 2), “os cenários animados podem envolver personagens e/ou situações do cotidiano ou não, mas é necessário haver movimento”. O cenário animado não precisa representar fielmente algum fenômeno ou simular um acontecimento real, pois não é seu principal objetivo.

Por meio dos cenários animados, vários conteúdos matemáticos podem ser abordados, mas para este trabalho, focamos especialmente o conteúdo de função, pois muitos alunos, e até mesmo professores de matemática, apresentam dificuldades em compreendê-lo (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020; ROSSINI, 2007). Apesar de o estudo desse conceito ser complexo (BERNARDINO; GARCIA; REZENDE, 2019) e ser julgado desafiador, Santos e Barbosa (2017, p. 28) alegam: “o conceito de função tornou-se uma das noções fundamentais da matemática contemporânea. Por esse motivo, ele tem um papel central na estruturação dos conteúdos da matemática escolar, perpassando vários níveis de ensino”.

Sendo assim, este artigo tem por objetivo discutir as características da função afim por meio da construção de um cenário animado elaborado no GeoGebra a partir dos elementos da Aproximação Instrumental (tarefa, técnica, esquemas e as dimensões da instrumentação e instrumentalização). Para esclarecer os elementos usados nas análises, discutimos alguns pressupostos da AI na próxima seção. Salientamos que a estruturação da AI tomou elementos mais complexos do que os que são aqui discutidos, mas considerando o objetivo deste trabalho, focado no uso de recursos diferentes de lápis e papel no estudo de funções, abordamos tarefa, técnica, esquemas e as dimensões da instrumentação e instrumentalização.

2.2 Aproximação Instrumental

Artigue (2011) descreve que sentiu necessidade de elucidar que exista uma diferença entre o que professores especialistas no uso de tecnologias e a literatura alegavam sobre o uso e o potencial de um programa de computador para a aprendizagem de matemática e a realidade do que ocorria, de fato, nas aulas.

Trouche (2016) destaca que a proliferação e o uso de calculadoras gráficas na sala de aula desencadearam vários debates na comunidade da Educação Matemática, pois estavam frente a um novo fenômeno¹. O autor revela que essa questão o levou a refletir sobre o potencial das ferramentas tecnológicas para a Educação Matemática.

¹ Esse fenômeno é baseado no contexto europeu.

Então, enquanto pesquisadores, necessitavam de um discurso que “[...] permitisse considerar conceitos e técnicas em suas relações dialéticas, um discurso menos centrado no aluno e que tratasse de questões de integração em sua dimensão sistemática” (ARTIGUE, 2011, p. 18, tradução nossa). Também “[...] deveria permitir considerar a dimensão instrumental no processo de aprendizagem” (ARTIGUE, 2011, p.18, tradução nossa).

Nesse sentido, esses pesquisadores impulsionaram a articulação entre a TAD e a abordagem instrumental para estruturar a Aproximação Instrumental (AI) (ARTIGUE, 2011; TROUCHE, 2016).

Na TAD existe a noção de praxeologia, que articula as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria, que possibilitam modelar toda e qualquer atividade humana (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Entretanto, considerando a AI e as análises deste trabalho, centramo-nos em tarefas e técnicas que podem ser empregadas para desenvolver a construção do cenário animado proposto.

As tarefas são relativas a qualquer atividade (CHEVALLARD, 1999) e normalmente são enunciadas por um verbo de ação que determina um gênero de tarefa¹. Já tipos de tarefas explicitam o conteúdo que será abordado, por exemplo, construir o gráfico de uma função (ROSSINI, 2007).

Para resolver uma tarefa, o aluno deve utilizar ou desenvolver algum procedimento, e isso nos conduz à noção de técnica. De acordo com Bosch e Chevallard (1999), as técnicas são maneiras de fazer, formas de resolver a tarefa e, conseqüentemente, toda tarefa necessita de uma técnica.

A TAD foi estabelecida como “[...] uma estrutura conceitual capaz de enfrentar as necessidades teóricas” para realizar “[...] uma ampla análise sistemática, que vai além do aluno, sensível ao papel desempenhado pelas técnicas nas práticas humanas e ao desenvolvimento conceitual que emerge delas e as ferramentas dessas práticas” (ARTIGUE, 2011, p. 20, tradução nossa). Logo, a TAD volta-se para as questões do processo de ensino e aprendizagem, e não se preocupa com questões instrumentais (ARTIGUE, 2011), as quais encontram apoio na abordagem instrumental.

A abordagem instrumental estabelece distinção entre artefato e instrumento (RABARDEL, 1995; 2002).

¹ Segundo Chevallard (1999, p. 224, tradução nossa), “[...] calcular o valor de uma função num ponto é um tipo de tarefa; mas calcular, simplesmente, é o que chamamos de gênero de tarefa, que exige um determinado substantivo”.

O artefato é um objeto, material ou simbólico, destinado a dar sustentação à atividade do sujeito na execução de um certo tipo de tarefa (RABARDEL, 1995; 2002). Pode ser um software, uma calculadora ou um conceito, por exemplo.

Já o instrumento é o que o sujeito constrói a partir do artefato, por meio da sua ação (RABARDEL, 2002). O instrumento é definido como uma entidade mista, que se forma para o sujeito quando ele, ao realizar uma tarefa usando o artefato, aplica técnicas e desenvolve esquemas (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019). Para definir esquemas, Rabardel (2002) apoiou-se na definição proposta Piaget e ampliada por Vergnaud (1990), que os caracteriza como organização invariante da conduta do sujeito para uma classe determinada de situações.

Para Rabardel (2002), o instrumento não existe sozinho: ele é o resultado da ação do sujeito sobre o artefato. Segundo Drijvers *et al.* (2010), “Instrumento = Artefato + Esquemas¹ e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa” (p. 108).

Nesse sentido, a abordagem instrumental estuda a transformação de um artefato em instrumento que, “para Rabardel, [...] é o resultado de um processo, a gênese instrumental” (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019, p. 108).

Quando é usado algum artefato para a execução de certa tarefa, há constantes interações entre sujeito e artefato, o que possibilita evidenciar duas dimensões, uma direcionada ao sujeito e outra para o artefato, que são discutidas e diferenciadas por Rabardel (2002) como instrumentação e instrumentalização, respectivamente.

A instrumentação está relacionada a como o artefato interfere e molda o pensamento e o comportamento do sujeito, enquanto a instrumentalização refere-se a como o pensamento do sujeito afeta o artefato (BASNIAK; ESTEVAM, 2018). Para Bellemain e Trouche (2019), a instrumentação e a instrumentalização são independentes, mas entrelaçadas. Contudo, segundo os autores, é possível diferenciá-las no processo de análise, identificando como a integração de um novo artefato modifica a atividade do aluno (voltando o olhar para o aluno), e como o artefato contribui para a atividade e criatividade do aluno (voltando o olhar para o artefato).

Na AI, a abordagem instrumental é considerada uma “[...] ferramenta teórica que permite investigar o papel que as tecnologias digitais desempenham nos processos de aprendizagem” (ARTIGUE, 2011, p. 20, tradução nossa). Além disso, possibilita compreender como os alunos interagem e se apropriam das tecnologias digitais nesse processo (GARCÍA-

¹ Conforme Trouche (2005, p. 125, tradução nossa) “um esquema é a construção de um observador a partir dos diferentes traços de atividade de um sujeito (ações, antecipações, inferências, etc.)”.

CUÉLLAR; SALAZAR, 2020). Porém, ela não se preocupa com os problemas que podem ocorrer durante o processo escolar (ARTIGUE, 2011).

Assim, justifica-se a articulação das duas lentes teóricas (ARTIGUE, 2011) como meio para revelar o potencial da tecnologia digital para a aprendizagem de matemática.

Neste trabalho, como nos interessam as técnicas empregadas por nós no GeoGebra para construir o cenário animado Abelha, consideramos não apenas a técnica com base na TAD, mas a técnica instrumentada, entendida como “[...] um conjunto de regras e métodos em um ambiente tecnológico que é usado para resolver um tipo específico de problema [...]. A técnica instrumentada diz respeito à parte externa, visível e manifesta do esquema de ação instrumentado” (DRIJVERS; GRAVEMEIJER, 2005, p. 169, tradução nossa).

Conforme Trouche (2005, p. 152, tradução nossa), “descrever a atividade em termos de esquemas de ação instrumentados exige a consideração de invariantes operatórios” e dos esquemas de uso. Tomando como base o que Vergnaud (1996) propõe, Trouche (2005, p. 149 p. 152, tradução nossa) considera os invariantes operatórios como o “[...] conhecimento implícito contido nos esquemas, que podem ser conceitos-em-ação, ou seja, conceitos considerados implicitamente relevantes, e teoremas-em-ação, [...] proposições consideradas verdadeiras”.

Assim, com a construção do cenário animado Abelha e o objetivo deste trabalho, compreendemos: tarefa - a ação desenvolvida por nós para construir cada parte do cenário animado; técnica instrumentada - a ação empregada no software para resolver a tarefa; esquemas de ação instrumentada - ações conclusivas a partir de invariantes operatórios e dos esquemas em uso; instrumentação - direcionada ao sujeito; e instrumentalização - direcionada ao artefato. Todos os elementos da AI estão relacionados às principais características da função afim, que são discutidas na seção que segue. Também são apresentadas algumas dificuldades que podem emergir durante o estudo desse conteúdo.

2.3 Função afim e o GeoGebra

Caraça (1951) e Tinoco (2002) destacam que alguns fenômenos naturais apresentam comportamentos iguais quando as condições iniciais são as mesmas. Então, pode-se determinar padrões e fazer previsões. Considerando o ser humano e seu desejo de dominar a natureza, a possibilidade de “*repetir e prever é fundamental*” (CARAÇA, 1951, p. 119, grifos do autor). Conforme Caraça (1951, p. 127, grifos do autor), se “*queremos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos*”.

A história e o desenvolvimento desse instrumento denominado função foram lentos e marcados por processos de controvérsias e ajustes para atender as necessidades de cada época (ROSSINI, 2007; MACIEL; CARDOSO, 2014). Neste trabalho, apoiamo-nos na definição proposta por Caraça (1951, p. 129):

Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é uma função de x e escreve-se $y=f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.

Partindo disso, para chegar nas definições atuais de função, foi necessária a elaboração de outros elementos matemáticos, como domínio, contradomínio, imagem, variável, dependência e regularidade (CARAÇA, 1951; MACIEL; CARDOSO, 2014), como discutimos a seguir.

Lima *et al.* (2006, p. 38, grifos dos autores), considerando dois conjuntos, X e Y , e uma função $f: X \rightarrow Y$, destacam que “o conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f ”. Conforme os autores, para se referir à função, deve-se apenas indicar a função f , pois o termo $f(x)$ é reservado para a imagem do elemento $x \in X$ pela função f (LIMA *et al.* 2006).

Com relação ao conceito de variável, Caraça (1951, p. 127, grifos do autor) explica: “Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer um dos seus elementos por um símbolo, por exemplo x . *A este símbolo, representativo de qualquer elemento do conjunto (E), chamamos variável*”. Compreender a ideia de variável é considerada difícil, pois ela representa qualquer número de um conjunto, mas não é nenhum número desse conjunto (CARAÇA, 1951; TINOCO, 2002).

A dependência está diretamente ligada ao conceito de função, pois em uma relação funcional entre dois conjuntos quaisquer, uma grandeza variável envolvida é univocamente determinada pela variação da outra grandeza (TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006). Sendo assim, uma das variáveis é independente, enquanto a outra é dependente (TINOCO, 2002; BERNARDINO; GARCIA; REZENDE, 2019).

Tinoco (2002, p. 6) também destaca que “[...] o reconhecimento de regularidade em situações reais, em sequências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial” para a construção do conceito de função.

Considerando que nesta pesquisa damos atenção especial à função afim, primeiro tipo de função que normalmente se tem contato formal no processo escolar, apresentamos uma definição: “uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ” (LIMA *et al.*, 2006, p. 87, grifos dos autores). Alguns exemplos particulares de funções *afim* são as *funções lineares* ($f(x) = ax$) e as *funções constantes* ($f(x) = b$) (LIMA *et al.*, 2006).

A função afim é caracterizada conforme a taxa de crescimento, indicada pelo coeficiente a , sendo: crescente (coeficiente a é positivo); decrescente (coeficiente a é negativo); constante (coeficiente a é nulo) (LIMA *et al.*, 2006). Lima *et al.* (2006, p. 92) discutem que, normalmente, o número a é denominado por coeficiente angular, mas segundo eles, “o nome mais apropriado [...] é taxa de variação (ou taxa de crescimento)”, justificando que “tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta”.

Outro alerta feito pelos autores é com relação ao termo *função do primeiro grau*, também usado para se referir à função afim. Eles propõem a seguinte reflexão: “o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau.)” (LIMA *et al.*, 2006, p. 92), indicando equívocos com relação à nomenclatura.

Além de confusões em relação aos termos, algumas pesquisas apontam que o conceito de função, mesmo sendo um dos mais importantes da Matemática, não é fácil de ser compreendido pelos alunos de todos os níveis de ensino, e até mesmo por professores de matemática que já lecionaram esse conteúdo (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020; TENÓRIO; OLIVEIRA; TENÓRIO, 2015; ROSSINI, 2007). Algumas das dificuldades apontadas pelos autores são relacionadas às representações gráficas das funções e à criação da lei de formação da função.

Uma forma dinâmica e interativa para abordar a função afim é usando softwares educacionais. Soares (2012) indica o GeoGebra, pois ele representa os mesmos objetos matemáticos de diferentes formas (algébrica, gráfica e geométrica). Além disso, ele oferece recursos que favorecem a dinamicidade nas construções, permitindo a alteração dos elementos criados.

No caso da função afim, o GeoGebra auxilia na observação e no estudo sobre os coeficientes da função, suas relações com a representação gráfica (SOARES, 2012), e otimiza o tempo para que discussões sobre o conteúdo ocorram. É diferente do que ocorre com o uso de lápis, papel e régua, em que as construções dos gráficos, por exemplo, dependem de cálculos (mentais ou não) para que sejam determinadas as coordenadas de alguns pontos para que, então, seja esboçada uma parte do gráfico da função. Nesse sentido, há “[...] implicações positivas do uso do GeoGebra nas atividades de aprendizagem matemática” (SOARES, 2012, p. 77).

Partindo desses pressupostos, consideramos a construção de cenários animados no GeoGebra como uma tarefa para discutir as características de função, especificamente neste trabalho, função afim. Na seção seguinte, apresentamos os pressupostos metodológicos que norteiam o desenvolvimento desta pesquisa.

2.4 Pressupostos metodológicos

Neste trabalho teórico de cunho qualitativo interpretativo, apresentamos e discutimos uma possibilidade de construção do cenário animado Abelha, elaborado no GeoGebra, que aborda principalmente o conteúdo de função afim. Esse cenário animado (Figura 2), adaptado do cenário animado Abelha proposto por Bueno e Basniak (2020b), foi selecionado por apresentar potencialidades para a discussão das seguintes características relacionadas à função afim: taxa de crescimento (positiva, negativa ou constante), coeficiente linear, função por partes, domínio e intervalo.

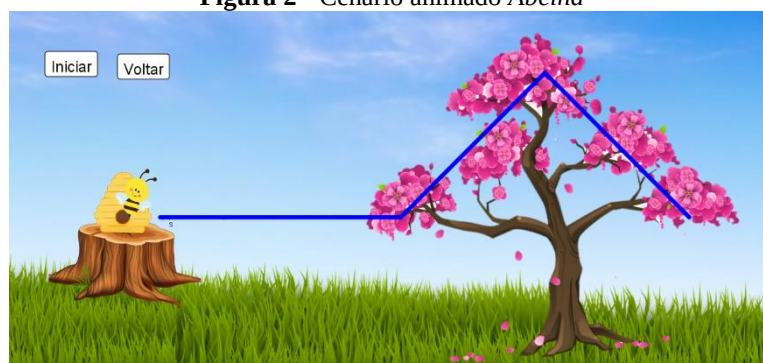
Considerando a *tarefa principal*, que pede para construir o cenário animado Abelha no software GeoGebra, tomando como base as estratégias utilizadas pelas autoras deste trabalho no processo de construção e hipóteses de teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, na seção das análises, divididas em três partes, buscamos explicitar a *tarefa* em cada etapa da construção, articulando as *técnicas instrumentadas* empregadas para realizar a tarefa aos *esquemas de ação instrumentada* possíveis de serem manifestados. Ao longo do texto, também discorreremos brevemente sobre a *instrumentação* e a *instrumentalização* consideradas durante nossa construção. Esclarecemos que essa não é a única forma de construção, mas nossa análise, aqui, parte da construção final, e assim, salientamos que vários testes e conjecturas foram realizados por nós até chegar ao cenário final. Isso é o que embasa nossas análises, especialmente quanto aos esquemas de ação instrumentada expostos.

2.5 Cenário animado Abelha construído utilizando prioritariamente função afim

A animação Abelha¹ inicia quando o usuário clica no botão *Iniciar*. Então, a abelha começa a voar, saindo da colmeia e indo em direção à árvore, percorrendo o caminho destacado na Figura 2. Quando o usuário clica no botão *Voltar*, a abelha retorna para a posição inicial e permanece estática até que o usuário acione o botão *Iniciar*.

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/zqpwwvwt>.

Figura 2 - Cenário animado *Abelha*



Fonte: Dados da Pesquisa, 2022.

Para a construção do cenário animado *Abelha*, como apresentado na Figura 2, foi utilizado o conteúdo de função afim e criadas três funções afim: uma constante, uma crescente e uma decrescente, as quais são discutidas na primeira parte das análises.

Na segunda parte, apresentamos e discutimos como os gráficos das funções tiveram seus domínios restringidos e unidos em uma função por partes para formar o percurso para a abelha percorrer. Por fim, na terceira parte das análises, relatamos sobre a animação do cenário em questão.

2.5.1 Criando a base para o trajeto da abelha

Para construir a primeira parte do trajeto, em que a abelha faz um movimento horizontal, foi considerada a tarefa: construir uma função para que a abelha saia da colmeia e vá até a árvore. Para realizar a tarefa usando o GeoGebra, a técnica instrumentada empregada foi construir uma função afim constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja expressão analítica é $f(x) = 2$, digitando na caixa de entrada do software $f(x) = 2$ e clicando em *Enter*¹.

Por meio dessa ação, consideramos os possíveis teoremas-em-ação: o gráfico da função constante é paralelo com o eixo x ; o gráfico da função constante não tem inclinação; na lei de formação da função constante há apenas um valor ($f(x) = b$); e o valor na lei de formação da função constante indica a posição em que o gráfico da função intercepta o eixo y ; associados aos seguintes conceitos-em-ação: taxa de crescimento nula, paralelismo e gráfico da função.

Nessa etapa da construção, entendemos que a instrumentalização é referente a compreender o funcionamento do GeoGebra, que: não tem a ferramenta função, sendo necessário digitar, na caixa de entrada, a lei de formação da função; possibilita alterar a lei de

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/shcmkw9n>.

formação da função na janela algébrica; exibe a representação gráfica da função na janela de visualização, e a representação algébrica na janela algébrica.

Considerando o desenvolvimento da tarefa no software, quando é inserida a lei de formação da função no GeoGebra, entendemos que há instrumentação, pois são mobilizados esquemas de uso dos recursos do software e esquemas de ação instrumentada sobre o conhecimento matemático.

Continuando a construção, foi necessário complementar o caminho. Na segunda parte do trajeto da abelha, observamos que ela faz um movimento de ir até a parte de cima da árvore. Para isso, foi considerada a tarefa: construir uma função para que a abelha saia da extremidade dos galhos, à esquerda, e suba até a parte superior da árvore.

Para realizar a tarefa usando o GeoGebra, a técnica instrumentada empregada foi construir uma função afim caracterizada como crescente $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja expressão analítica é $g(x) = x - 1$, digitando na caixa de entrada do software $g(x) = x - 1$ e clicando em *Enter*¹.

Por meio dessa ação, consideramos os possíveis teoremas-em-ação: a taxa de crescimento da função afim é positiva, então a função é caracterizada como crescente; o gráfico da função afim caracterizada como crescente não é paralela ao eixo x ou ao eixo y ; quanto maior é o valor que acompanha o x na lei de formação da função afim, maior é a inclinação do gráfico da função em relação ao eixo x ; o gráfico da função afim caracterizada como crescente não é coincidente com o eixo y ou com o eixo x ; a lei de formação geral dessa função pode ser escrita na forma $g(x) = ax + b$; o valor de b (coeficiente linear) na lei de formação da função afim indica em que posição o gráfico intercepta o eixo y ; e quando o valor de b , na lei de formação da função afim, é diferente de zero, o gráfico não cruza a origem do plano cartesiano. Com relação aos conceitos-em-ação, consideramos: taxa de crescimento positiva, gráfico da função, números inteiros, reta numérica, coeficiente linear e plano cartesiano.

Na execução dessa tarefa no GeoGebra, ao inserir a função afim caracterizada como crescente que irá formar a segunda parte do caminho da abelha e, caso seja necessário, alterar os valores de a e b na lei de formação da função, entendemos que há instrumentação, pois são mobilizados esquemas de uso do artefato e esquemas de ação instrumentada.

A instrumentalização é referente a compreender que o software representa a função de forma algébrica e gráfica nas janelas do software, como discutido anteriormente, e dispõe da possibilidade de alterar a lei de formação da função na janela algébrica para ajustar a representação gráfica da função, caso necessário. Isso favorece a identificação das respectivas

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/tfcjt6bh>.

mudanças gráficas da função afim caracterizada como crescente, quando os valores dos coeficientes são alterados, assim como diferenças entre as duas funções já construídas (constante e crescente).

No último momento, a abelha faz o movimento de ir da parte de cima da árvore até os galhos à direita. Para isso, foi considerada a tarefa: construir uma função para que a abelha desça da parte superior da árvore até a outra extremidade dos galhos, à direita.

Para realizar a tarefa usando o GeoGebra, a técnica instrumentada empregada foi construir uma função afim caracterizada como decrescente $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja expressão analítica é $h(x) = -x + 11$. Para isso, digitamos na caixa de entrada do software $h(x) = -x + 11$ e clicamos em *Enter*¹.

Por meio dessa ação, consideramos os possíveis teoremas-em-ação: a taxa de crescimento da função afim é negativa, então a função é caracterizada como decrescente; o gráfico da função afim caracterizada como decrescente não é paralelo ao eixo x ou ao eixo y ; quanto menor é o valor que acompanha o x na lei de formação da função afim, maior é a inclinação do gráfico da função em relação ao eixo x ; o gráfico da função afim caracterizada como decrescente não é coincidente com o eixo y ou eixo x . Com relação aos conceitos-em-ação, consideramos: taxa de crescimento negativa, gráfico da função, números inteiros, reta numérica e coeficiente linear.

As dimensões da instrumentação de instrumentalização são análogas às citadas na construção da função constante e da função crescente.

Evidenciamos que as técnicas instrumentadas usadas para criar cada função no software são semelhantes: digitar a lei de formação da função na caixa de entrada e clicar em *Enter*. Contudo, além de diferenças entre representação gráfica e algébrica de cada função afim criada, como destacamos, existem diferenças em relação à regularidade de cada uma delas, por exemplo, ao plotar um ponto sobre o gráfico de cada função e movimentá-lo², observamos que:

- Na função constante, o valor da coordenada y , ou seja, o valor de $f(x)$ do ponto sobre o gráfico, permanece o mesmo, enquanto a coordenada x varia;
- Na função crescente, ambas as coordenadas do ponto sobre o gráfico variam quando ele é movimentado. É possível observar que, conforme os valores da coordenada x aumentam, os valores de $g(x)$ também ficam cada vez maiores; e

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/canascqs>.

² Acesso em <https://www.geogebra.org/m/wbtwqvt6>.

- Assim como na função crescente, a função decrescente também tem as coordenadas do ponto alteradas quando ele é movimentado. Entretanto, é possível observar que, conforme os valores da coordenada x aumentam, os valores de $h(x)$ diminuem, ao contrário da função crescente.

Logo, cada uma das funções tem suas particularidades, definições próprias e características que as diferem em suas representações.

Além disso, por meio da técnica instrumentada empregada no software para a construção de cada função, é possível destacar como a instrumentalização e instrumentação são independentes, mas entrelaçadas (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019). Quando o usuário digita a expressão analítica da função na caixa de entrada do software, mobilizando esquemas de uso e de ação instrumentada, o software encarrega-se de criar as representações gráficas. É preciso apenas que o usuário informe ao software a lei de formação da função que ele deseja.

Contribuindo com a realização da atividade, evidenciamos, ainda, que o software retorna imediatamente à representação gráfica da função solicitada pelo usuário durante a elaboração do cenário animado. Entretanto, ele representa apenas o que foi digitado, e caso represente algo diferente do esperado ou não represente nada, existe algum erro no comando digitado pelo usuário.

Nesse sentido, é preciso atenção à técnica instrumentada empregada ao digitar as expressões ou comandos na caixa de entrada, e verificar se o que o software retornou era o desejado, ou se há algum problema com a estrutura da linguagem usada.

Outro fator que se destaca ao utilizar essa técnica instrumentada no software é a possibilidade de manipular/alterar a lei de formação da função na janela algébrica, e instantaneamente visualizar as alterações decorrentes na representação gráfica. O software possibilita dinamicidade às explorações, assim como investigações sobre o que cada elemento na expressão analítica da função interfere na sua representação gráfica e vice e versa, caracterizando as dimensões instrumentalização e instrumentação e realçando como são entrelaçadas.

Com o uso do software, não é necessário empregar a técnica de criar uma tabela com os valores das coordenadas que pertencem à função e depois esboçar seu gráfico em uma malha quadriculada para estudar suas características. Além disso, geralmente, quando a técnica de criar ou preencher a tabela é usada, são selecionados valores inteiros para completá-la, e isso limita a compreensão dos valores assumidos por x , pois se pode admitir erroneamente que esses valores devem ser sempre inteiros. Utilizando o software, não há limitação para a quantidade

de pontos a serem utilizados, ou demora e erros em cálculos que podem gerar dificuldades epistemológicas da compreensão do conceito devido a obstáculos didáticos.

2.5.2 Restringindo o domínio de cada função e função por partes

Até o momento, o gráfico de cada função afim construída é infinito. Contudo, nessa construção feita no GeoGebra, considerando a variação do controle deslizante, que não é infinita, de alguma forma precisamos limitar a representação gráfica de cada função, visto que a abelha passará apenas por uma parte de cada uma delas. Assim, selecionamos um intervalo para a variação de x para poder compor o trajeto percorrido pela abelha, como na Figura 2. Nesse sentido, cada função terá seu domínio restrito e não será mais todo o conjunto dos números reais, mas um intervalo dele, e consequentemente, a representação gráfica de cada função também será limitada.

Para essa parte da construção, a tarefa considerada é a seguinte: construir cada função com o domínio restringido para que a abelha percorra apenas uma parte de cada um dos gráficos no GeoGebra.

Antes de apresentar a técnica instrumentada empregada no software para resolver essa tarefa, destacamos que, para restringir o domínio de qualquer função no GeoGebra, o usuário deve encontrar uma forma de comunicar ao software que ele deseja que apenas uma parte do gráfico da função seja considerada, e não todo ele infinitamente. Uma possibilidade para fazer isso é através do comando “Se(<Condição>, <Então>)”, em que é necessário que o usuário informe o intervalo desejado para o domínio da função e a qual objeto matemático quer que seja aplicada essa condição. Esses encaminhamentos são relacionados à instrumentalização e à instrumentação, visto que são referentes a ter conhecimento sobre os recursos oferecidos pelo software e saber como usá-los para atingir o objetivo da tarefa.

Para conseguir que o GeoGebra retornasse o gráfico da função da forma solicitada pela tarefa, a técnica instrumentada empregada foi considerar f dentro do intervalo $[-2, 3)$ ¹, g dentro do intervalo $[3, 6)$ e h dentro do intervalo $[6, 9]$. Para isso, digitamos “Se” na caixa de entrada do software e selecionamos a opção “Se(<Condição>, <Então>)”; dentro dos parênteses, substituímos “<Condição>” pelo intervalo desejado para o domínio da função constante, nesse caso: $-2 \leq x < 3$ ou $3 > x \geq -2$. Ainda dentro dos parênteses, substituímos “<Então>”

¹ Segundo Lima *et al.* (2006, p. 71), considerando os números reais a e b , tal que $a \leq b$, tem-se: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou “[a, b] é um intervalo fechado”; $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou “(a, b) é aberto”; $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou “[a, b) é fechado à esquerda”; $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou “(a, b] é fechado à direita”.

pelo nome da função, nesse caso, f , para nos referirmos ao elemento matemático que estamos aplicando a expressão. Depois, clicamos em *Enter*.

A mesma técnica instrumentada foi utilizada para restringir a representação gráfica da função g e a representação gráfica da função h . As expressões finais são “Se $(-2 \leq x < 3, f)$ ”; “Se $(3 \leq x < 6, g)$ ”; “Se $(6 \leq x \leq 9, h)$ ”¹.

Nesse processo de construção, consideramos os possíveis teoremas-em-ação: o domínio de cada função, nesse caso, é definido em um intervalo dos números reais; o menor valor do intervalo indica a posição que a representação gráfica da função inicia; o maior valor do intervalo indica a posição em que o gráfico da função termina; há diferentes tipos de intervalos (aberto, fechado, aberto à esquerda e fechado à direita, e fechado à esquerda e aberto à direita). Tomando como base esses teoremas-em-ação, consideramos os conceitos-em-ação: domínio, variável, igualdade, desigualdade, intervalo, gráfico da função e reta numérica.

Nessas ações desenvolvidas para resolver a tarefa, destacamos a instrumentação, quando cada elemento é digitado no comando, usando os símbolos e nomes dos elementos matemáticos definidos pelo software para que ele consiga interpretá-los, mobilizando esquemas de uso e de ação instrumentada.

Instantaneamente, após finalizar cada comando, o software retorna uma nova função e um novo gráfico com o intervalo restringido e com a mesma lei de formação da função, que pode ser observado na janela algébrica.

Destacamos, também, a instrumentalização, referente a: compreender que o GeoGebra não oferece nenhuma ferramenta para restringir o domínio, mas é preciso digitar o comando na caixa de entrada e indicar os elementos; investigar os componentes do GeoGebra (ferramentas, comandos, etc.) e verificar suas funcionalidades; possibilidade de alterar os elementos do comando na janela algébrica para ajustar a representação gráfica, caso necessário.

Porventura, se o usuário digitar o intervalo desejado de forma incorreta, o software não irá retornar o gráfico da função com o domínio restringido como esperado, pois existirá alguma inconsistência matemática, ou talvez algum erro de digitação que o programa não compreende, e então, não consegue executar. O software só executa o comando com a linguagem correta e veracidade matemática.

Nesse contexto, quando o gráfico retornado não é como esperado, destacamos novamente a instrumentação, considerando que será necessário que o usuário interprete as informações e representações fornecidas pelo software e identifique os equívocos cometidos no

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/ma4s4ve6>.

momento de empregar a técnica instrumentada. Então, será preciso que o usuário reveja o que digitou no software, mobilizando seus conhecimentos matemáticos, e encontre o erro cometido para eliminá-lo. Logo, o usuário deve reeditar o comando e verificar se o problema foi solucionado, sinalizando, mais uma vez, a instrumentalização e a instrumentação.

Continuando a construção, é necessário unir as representações gráficas das três funções, que estão com os domínios limitados, em uma única função para formar o caminho final para a abelha percorrer. Para isso, é preciso construir uma função por partes, que seja formada por uma parte da representação gráfica de cada função.

Para isso, a tarefa seria: construir um único caminho para a abelha percorrer no GeoGebra.

Novamente, o usuário deve comunicar ao GeoGebra, por meio de uma linguagem que o programa compreenda, que agora não desejamos apenas restringir o domínio de uma só função, também pretendemos restringir o domínio de cada função criada e uni-las em uma só.

Uma possibilidade de realizar essa tarefa no software é por meio do comando “Se(<Condição>, <Então>, <Senão>)”, em que o *Senão* é um complementar de *Se*, indicando o que deve ocorrer caso as condições anteriores falhem. Novamente, identificamos a instrumentalização e a instrumentação, dado que o usuário deve conhecer as possibilidades e potencialidades do software para que consiga desenvolver a tarefa.

Para que o GeoGebra criasse um único caminho, a técnica instrumentada empregada foi construir uma função por partes, que fosse formada pelas funções: f com intervalo real $[-2, 3)$ como domínio, g com intervalo real $[3, 6)$ como o domínio; e h com o intervalo real $[6, 9]$ como domínio. Assim, digitamos na caixa de entrada do software o comando “Se” e selecionamos a opção “Se (<Condição>, <Então>, <Senão>)”; dentro dos parênteses, substituímos “<Condição>” pelo intervalo de domínio da função constante $f: -2 \leq x < 3$; substituímos “<Então>” pelo nome da função, f ; e no <Senão>, os outros dois intervalos com suas respectivas funções, g e h . Assim, a expressão final é “Se $(-2 \leq x < 3, f, 3 \leq x < 6, g, 6 \leq x \leq 9, h)$ ”. Depois, clicamos em *Enter*. Esse comando gerou a função por partes s^1 .

Nessas ações, identificamos, mais uma vez, a instrumentação referente a digitar o comando e indicar os elementos/símbolos que o compõem, mobilizando esquemas de uso e de ação instrumentada.

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/xmpg5cda>.

Como na restrição do domínio de cada função, a instrumentalização, aqui, também é referente a compreender que o GeoGebra não oferece nenhuma ferramenta para construir a função por partes: é preciso digitar o comando na caixa de entrada e indicar os elementos.

Deve-se tomar cuidado ao digitar os intervalos para cada função, pois se houver algum erro, o software não irá retornar à representação gráfica como o esperado, visto que existem incoerências matemáticas. O software produz a representação gráfica condizente com o comando e não retorna uma explicação ao usuário; então, o usuário deve estar atento ao comando e à sua validade matemática. Logo, se faz necessária a interpretação do sujeito para verificar se o que digitou está correto.

Por meio desse processo de construção, consideramos os possíveis teoremas-em-ação: a função por partes é formada pelas partes de funções; são necessárias ao menos duas partes de funções para compor uma função por partes; para formar um caminho contínuo para a abelha, as funções escolhidas devem ser contínuas e selecionadas de forma que o extremo direito de uma coincida com o extremo esquerdo da outra; na função por partes, quando há a interseção de dois intervalos (ou parte dele) para funções distintas, somente uma delas é considerada no intervalo de interseção para que esteja de acordo com a definição de função; essa função por partes tem sua representação gráfica finita; o gráfico da função por partes não apresenta apenas um comportamento de uma função afim, nesse caso, é constante, crescente e decrescente. Tomando como base esses teoremas-em-ação, consideramos os conceitos-em-ação: função por partes, domínio, variável, igualdade, desigualdade, intervalo, continuidade, gráfico da função e reta numérica.

2.5.3 Animação do cenário

Voltando à construção, em seguida inserimos a figura¹ da abelha na janela de visualização do software, atrelando-a a dois pontos, A e B , que controlam a posição e o tamanho da figura. Na janela algébrica do software, aparecem as coordenadas assumidas pelos pontos².

Nesses encaminhamentos, evidenciamos que a instrumentalização é referente ao conhecimento sobre os recursos do software para inserir a figura da abelha na janela de visualização; e a instrumentação é referente à inserção efetiva da figura no plano, visto que o sujeito mobiliza esquemas de uso do artefato.

¹ Para inserir a figura no GeoGebra, clique na penúltima caixa de ferramentas, selecione a opção *Inserir Imagem* e clique em *Escolher Arquivo*. Busque a imagem em seu computador, clique sobre ela e depois em *Abrir*.

² Acesso em <https://www.geogebra.org/m/txntbawz>.

A tarefa considerada por nós para essa etapa da construção seria: fazer com que a figura da abelha se mova em relação ao caminho criado no GeoGebra.

Para essa etapa da construção, foi necessário desenvolver uma estratégia para que a alteração nos valores das coordenadas dos pontos acontecesse de forma mecânica, sem que fosse necessária a ação do usuário para mover a figura ou seus pontos. Como parte da técnica instrumentada para animar a figura da abelha no cenário, criamos um controle deslizante¹ a que pode assumir diversos valores dentro de um determinado intervalo².

Em seguida, precisávamos conectar representação gráfica da função por partes s , figura da abelha e controle deslizante para que, conforme o controle fosse animado, a figura da abelha se movesse em relação ao caminho formado pela função por partes.

Com a disponibilidade da ferramenta controle deslizante, foi possível que o ponto ganhasse movimento e, para isso, a técnica instrumentada empregada foi alterar a definição do ponto à direita da figura, B , da seguinte forma: $(a, s(a))$ ³.

Nessas ações, a instrumentalização é referente a compreender a funcionalidade do controle deslizante e a ter conhecimento da possibilidade de alterar as coordenadas x e y de cada ponto.

Com relação à instrumentação, compreendemos que é referente a alterar a definição do ponto conectando função por partes, controle e ponto da figura, mobilizando, além dos esquemas de uso, os esquemas de ação instrumentada. Dessa forma, ao configurar o controle para animar, o ponto se desloca sobre a representação gráfica da função s .

Os possíveis teoremas-em-ação considerados são: um ponto qualquer no plano 2D tem duas coordenadas (x, y) ; um ponto que pertence ao gráfico da função é definido da forma $(x, s(x))$; o intervalo do controle deslizante deve ser definido conforme os valores do domínio da função por partes para que o ponto B exista; quando o controle deslizante é animado, o ponto B se move sobre a representação gráfica da função; o controle deslizante representa diferentes valores dentro de determinado intervalo; e as coordenadas do ponto B são definidas por expressões algébricas. Com relação aos conceitos-em-ação, destacamos: ponto, domínio, função por partes, ponto que pertence ao gráfico da função, variável, intervalo, gráfico da função e expressão algébrica.

¹ Para criar um controle, clique na penúltima caixa de ferramentas, selecione a opção *Controle Deslizante* e clique em qualquer local na janela de visualização. Na caixa na tela, coloque o nome do controle de a , o valor *min* -2 , o *max* 9 e o incremento 0.1 . Após, clique em *Ok*.

² Acesso em <https://www.geogebra.org/m/bnvk6mh>.

³ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/wqfgd7ze>.

Com relação à construção, apenas um dos pontos da figura (B) se movia sobre o gráfico. Então, era preciso alterar as coordenadas do ponto à esquerda da figura da abelha também, A , para que fosse criada a impressão da figura estar se movendo sobre o plano. Para tanto, apenas repetir a técnica instrumentada e definir o ponto A da mesma forma que o ponto B não seria válido, pois com a mesma definição, os pontos se tornariam coincidentes; logo, não haveria figura para se mover.

Entretanto, como os dois pontos da figura deveriam se mover, ambos deveriam ser atrelados ao controle deslizante para ter animação. Para isso, foi usada a técnica instrumentada de deixar apenas o ponto B sobre o gráfico da função, e o ponto A acompanharia o ponto B .

Sendo assim, precisamos colocar o controle deslizante na definição do ponto A , mas diferente da definição do ponto B , para que houvesse uma distância entre os pontos em relação ao eixo x . Então, a técnica instrumentada empregada foi alterar a coordenada do ponto A , deixando da seguinte forma: $(a - 1, s(a))$, para se ter a impressão de movimento da abelha no cenário animado¹.

Com relação à instrumentalização e à instrumentação, ressaltamos que são semelhantes àquela descrita na ação de alterar a definição do ponto B . Destacamos que, nesse caso, a instrumentação é referente à alteração da definição do ponto que se desloca com relação à função s , e não necessariamente sobre o seu gráfico.

Além dos possíveis teoremas-em-ação considerados na ação anterior, acrescentamos os seguintes: quando a definição dos pontos é a mesma, eles se tornam coincidentes; para que exista figura no plano, deve haver uma distância entre os pontos atrelados a ela; para que a figura não deforme a distância entre os pontos deve ser fixa; quando deve haver distância entre dois pontos no sentido horizontal, a coordenada x deles tem que ser diferente; o ponto A também pertence à função por partes, mas para não se mover sobre o gráfico da função, para isso, é necessário somar algum valor junto à coordenada x do ponto; como, nesse caso, a figura não pode ficar torta, a coordenada y dos dois pontos atrelados a ela deve ser a mesma, portanto, $(s(a))$. Com relação aos conceitos-em-ação, destacamos: ponto, pontos coincidentes, plano cartesiano, distância entre dois pontos, função por partes, pontos que pertencem ao gráfico da função, coordenada x , coordenada y , expressão algébrica, gráfico da função e variável.

Evidenciamos que, nessa parte da construção, podemos efetivamente destacar a ideia de variável, pois é possível visualizar a variação de valores nas coordenadas x e y dos pontos A e

¹ Acesso em <https://www.geogebra.org/m/aqpm249p>.

B atrelados à figura e que se movem com relação ao gráfico da função. Isso só é possível no software, visto que essa manipulação instantânea e mecânica não pode ser feita em outros meios, como a folha de papel, em que as representações são estáticas¹.

2.6 Considerações finais

As primeiras pesquisas que usaram a AI como base teórica para discutir o potencial da tecnologia no âmbito educacional, buscaram olhar para situações de interação entre alunos e calculadoras ou programas de computador (ARTIGUE, 2011), recursos que não foram idealizados especificamente para serem usados na sala de aula. No caso desta pesquisa, buscamos olhar para uma situação semelhante, mas considerando o GeoGebra, software idealizado e desenvolvido para ser usado como recurso educacional.

Visando a atender ao objetivo deste trabalho, apresentamos e discutimos a construção do cenário animado Abelha. Para construir o cenário, propusemos dividir a construção em três partes principais, para que pudéssemos nos concentrar em aspectos semelhantes da construção e relacionar com o conteúdo em questão.

Em cada etapa de construção, tomando como base a AI, discutimos a tarefa, técnica instrumentada, esquemas de ação instrumentados, e as dimensões instrumentalização e instrumentação, que consideramos e identificamos, levando em conta o conteúdo e nossos conhecimentos sobre o software.

Conforme discutido anteriormente, as tarefas geralmente iniciam com um verbo de ação. Contudo, no caso das tarefas relacionadas à construção do cenário animado, o verbo de ação indicado no início da maioria delas é *construir*, o que demanda maior atividade cognitiva por parte do sujeito, pois requer que ele articule recursos do software, criatividade e imaginação ao conhecimento matemático.

Ressaltamos que, como existem diversas ferramentas e comandos disponíveis no software, é possível utilizar diferentes técnicas instrumentadas para a construção de um cenário animado. Neste artigo, focamos nosso olhar na discussão daquelas que vislumbramos ao construir o cenário animado Abelha para discutir função afim. Entretanto, outros conteúdos e técnicas instrumentadas poderiam ser estabelecidos, dependendo do objetivo da tarefa.

¹ Para criar os botões, clique na penúltima caixa de ferramenta, selecione a opção *Botão*. Clique em qualquer local na janela de visualização. Na caixa na tela, coloque na legenda *Iniciar*. Na caixa *Código GeoGebra*, digite *IniciarAnimação[a,true]*, e na segunda linha, *DefinirValor[a,-2]*. Após, clique em *Ok*. Para o botão *Voltar*, repita o processo, mas na legenda, coloque *Voltar*; e na caixa de *Código GeoGebra: IniciarAnimação[a,false]*; e na segunda linha, *DefinirValor[a,-2]*. Após, clique em *Ok*.

Referente aos esquemas de ação instrumentadas, consideramos hipóteses de teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação relacionando a técnica instrumentada empregada por nós em cada tarefa, a observação das representações fornecidas pelo software e os nossos conhecimentos sobre o conteúdo de função afim. Os teoremas-em-ação de cada etapa da construção foram apresentados em forma de proposição e se tornaram base para a identificação dos principais conceitos-em-ação.

Nas análises, também destacamos a instrumentação presente nas ações de construção do cenário a partir das técnicas instrumentadas implementadas no software, dos esquemas de uso e de ação instrumentada. O mesmo ocorreu para a instrumentalização, dado que, para o desenvolvimento da construção, é necessário compreender funcionalidades, recursos, limitações e potencialidades do software.

Assim, por meio da pesquisa, identificamos elementos da AI ao usar o artefato GeoGebra, e destacamos a possibilidade de usar a construção de cenários animados para abordar características da função afim.

2.7 Agradecimentos

Agradecemos ao PRPGEM e à Capes/PROAP pelo auxílio financeiro na realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, ano 6, n. 8. p. 13-33, 2011.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. **VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – Foz do Iguaçu, Paraná. 2018.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 105-144. 2019.

BERNARDINO, F.; GARCIA, W. F. D. G.; REZENDE, V. Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do ensino fundamental e ensino médio. **ACTIO: Docência em Ciências**, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 127-147, mai./ago. 2019.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n.1, p. 77-124. 1999.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construção de cenários animados em contexto de sala de aula do Ensino Fundamental. **XXV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, Campina Grande – PB. 2021.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/ superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020A. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895>

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Ensino de matemática a alunos com altas habilidades/superdotação por meio da construção de cenários animados no GeoGebra. **X Congresso Internacional sobre enseñanza de las matemáticas**, Lima – Perú. 2020B.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. J. Estudo matemático das leis naturais. In: CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1.ed. Lisboa: Gradiva, 1951. p. 107-139.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, n.2, p.221-265. 1999.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n. 1, p.77-111. 1992.

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**, Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. 2005. p. 163-196. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_8

DRIJVERS, P., *et al.* Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, C.; LAGRANGE, J. B. C. (Ed.). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**, New York: Springer, 2010. p. 89-133. http://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4419-0146-0_7

GARCÍA-CUÉLLAR, D. J.; SALAZAR, J. V. F. Aproximação Instrumental: sua origem e seu desenvolvimento no Peru. In: BASNIAK, M. I. RUBIO-PIZZORO, S. (Org). **Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2020. p.45-66.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. 2006.

MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. L. A história do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Revista Bolema**, v.28, n.50, p.1348-1367. 2014.

RABARDEL, P. **L'homme et les outils contemporains**. Paris: A. Colin. 1995.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia**: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos. Université paris 8. hal-01020705. 2002.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v.13, n.2, p.25-5, nov. 2020. <http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n2p25>

ROSSINI, R. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. **Educação Matemática em Pesquisa**, v. 9, n. 2. 2007.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções. **Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo**, v.1, n.1, LXVI - LXXX. 2012.

TENÓRIO, A.; OLIVEIRA, M. E. F. DE.; TENÓRIO, T. A influência do Geogebra na Resolução de Exercícios e Problemas de Função Polinomial do 1º grau. **Jornal Internacinal de Estudos em Educação Matemática**, v.7, n.2. 2015.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de Função**. Rio de Janeiro, Projeto Fundação. 2002.

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**: Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. p.137-162. 2005.

TROUCHE, L. Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (Org). **Tools and Mathematics: Instruments for Learning**. Springer, 2016. p. 219-256. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0_10

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.

3 CENÁRIO ANIMADO ABELHA NO GEOGEBRA E A DIALÉTICA ESQUEMA-TÉCNICA¹

Adrieli Cristine Bueno
Maria Ivete Basniak
Daysi Julissa García-Cuéllar

Resumo: Por meio da Aproximação Instrumental, identifica-se que existe uma relação dialética esquema-técnica, pois ambos estão conectados. Durante a construção de cenários animados no GeoGebra, diversas técnicas instrumentadas podem ser empregadas pelo usuário no software. Enquanto as técnicas instrumentadas são consideradas a parte visível de um esquema de ação instrumentada, os esquemas são referentes à parte implícita na ação. Esses esquemas são formados pelos invariantes operatórios e esquemas de uso. Nesse sentido, este trabalho, de cunho qualitativo, tem por objetivo investigar, a partir da dialética esquema-técnica, características da função afim manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra. Por meio de gravações das telas dos computadores usados pelos alunos e da relação dialética esquema-técnica, identificamos que eles manifestam noções referentes à função afim, domínio da função, função por partes e pontos que pertencem à função durante o processo de construção do cenário animado Abelha.

Palavras-chave: Função afim. Educação Matemática. Tecnologia. Aproximação Instrumental.

3.1 Introdução

Graças ao desenvolvimento tecnológico, contamos com diferentes ferramentas tecnológicas que podem colaborar com as práticas pedagógicas, incluindo as relacionadas ao ensino da matemática, possibilitando mudanças e avanço àquelas relacionadas à reprodução e memorização de algoritmos. Artigue (2002) defende que recursos computacionais, como os softwares, por exemplo, não devem apenas estar presentes na sala de aula, mas se tornem instrumentos pedagógicos para contribuir com a aprendizagem de conhecimentos matemáticos por meio de práticas de ensino que não privilegiam uma formação processual da matemática.

Nesse contexto, um dos softwares que se destaca é o GeoGebra, ao favorecer a visualização do que está sendo construído em mais de uma janela, nas quais, por meio de ferramentas e comandos que possibilitam construções dinâmicas, o usuário pode observar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Tais construções podem favorecer discussões e reflexões sobre os conteúdos matemáticos que estão sendo representados.

Dentre as diversas construções que podem ser feitas no software, neste trabalho focamos os cenários animados, em que elementos matemáticos são relacionados ao controle deslizante,

¹ Este artigo foi aceito para ser publicado na revista Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

ferramenta que possibilita que os objetos vinculados a ele sejam animados durante e ao final da construção (BUENO; BASNIAK, 2020).

Para a construção de um cenário animado no GeoGebra, podem ser empregadas diversas e diferentes técnicas. Admitindo a complexidade que envolve a técnica, tomamos aqui, como construto teórico, a Aproximação Instrumental (AI), e em particular, os apontamentos de Trouche (2005, p. 151, tradução nossa) da técnica instrumentada, considerada como “[...] a parte observável de um esquema de ação instrumentada.

Os esquemas de ação instrumentada são referentes à parte implícita na ação do sujeito, e são formados por um conjunto de esquemas de uso (atividades ligadas ao uso do artefato) e de invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) (TROUCHE, 2005).

Nesse sentido, como existe uma relação dialética esquema-técnica, pois ambos estão conectados durante a realização de uma tarefa, este trabalho, de cunho qualitativo, tem por objetivo investigar, a partir da dialética esquema-técnica, características da função afim manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra.

A relação dialética é discutida na seção que segue, tomando como base a AI.

3.2 Aproximação Instrumental: dialética esquema-técnica

Considerando o uso de ferramentas digitais em ambientes educacionais e a busca por responder questionamentos quanto ao seu verdadeiro potencial para o ensino e a aprendizagem de matemática, pesquisadores elaboraram um novo quadro teórico, denominado Aproximação Instrumental (AI) (ARTIGUE, 2011; TROUCHE, 2016). Para formar esse novo quadro teórico, a Teoria Antropológica do Didático e a abordagem instrumental foram articuladas (ARTIGUE, 2011).

Dentro da AI, Drijvers *et al.* (2013) discutem três dialéticas, denominadas artefato-instrumento, instrumentação-instrumentalização e esquema-técnica. A dialética ou dualidade, segundo os autores, trata da relação que há entre dois elementos, porque por mais que cada um deles tenha suas particularidades, assim como as duas faces da mesma moeda, eles estão relacionados/conectados e se complementam de alguma forma. Neste artigo, considerando as especificidades das três dialéticas, discutimos apenas a dialética esquema-técnica, considerando o esquema de ação instrumentado e a técnica instrumentada. As outras duas dialéticas são discutidas no capítulo 4 (artigo 3) desta dissertação.

Quando, para resolver determinada tarefa, os alunos dispõem de recursos como lápis e papel, algumas técnicas que são empregadas já são institucionalizadas em livros didáticos, e geralmente, reproduzidas pelo professor durante as aulas. Por exemplo, para construir o gráfico da função quadrática $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja expressão analítica é $g(x) = x^2$, costumeiramente é usada uma tabela, na qual são atribuídos valores para a variável x , normalmente indicados pelo professor como -2, -1, 0, 1 e 2. Em seguida, os alunos calculam o valor de $g(x)$ em cada caso e, considerando os valores da tabela como coordenadas, plotam os pontos pertencentes à função em uma malha quadriculada ou usando régua. Depois, por meio desses pontos, é traçado um esboço do gráfico da parábola. Esses valores inteiros atribuídos à variável x permitem que o aluno tenha noção do comportamento do gráfico da função quadrática.

Já no contexto da construção de cenários animados no GeoGebra, as técnicas instrumentadas que são empregadas no artefato são outras. Por exemplo, para construir o cenário animado, o aluno não precisa classificar se a função tem comportamento crescente ou decrescente, não precisa calcular coordenadas de pontos que pertencem à função ou esboçar a representação gráfica. Contudo, é necessário digitar, na caixa de entrada do software, a representação algébrica da função, verificar se ela tem inclinação ou o comportamento esperado para compor o cenário, e clicar em *Enter*. O próprio software constrói a representação gráfica da função na janela de visualização.

Assim, além de o sujeito ter uma forma diferente para abordar o problema, os artefatos possibilitam que diversas técnicas sejam desenvolvidas e usadas para resolver uma mesma tarefa. Segundo Martínez-Hernández, Marmolejo-Rebolledo e Parra-Soto (2019, p. 2, tradução nossa), apoiados em Lagrange (2005), “[...] as capacidades numéricas, gráficas, simbólicas e de programação das novas ferramentas tecnológicas desempenham um papel importante no futuro do ensino da matemática, não apenas como auxílio pedagógico, mas como veículo para novas abordagens”.

De acordo com Drijvers e Gravemeijer (2005, p. 169, tradução nossa), a técnica instrumentada é “[...] um conjunto de regras e métodos em um ambiente tecnológico que é usado para resolver um tipo específico de problema”. Então, nesse sentido, na construção descrita neste artigo, consideramos a técnica instrumentada, compreendida por nós como as ações que os alunos empregam no software para construir o cenário animado, pois os alunos usam o artefato GeoGebra.

Conforme Artigue (2002), as técnicas são instrumentadas pela tecnologia e apenas os conhecimentos da cultura matemática padrão não são suficientes para desenvolvê-las, pois além do conhecimento sobre a matemática, é preciso conhecimento sobre o artefato. Além disso,

quando os artefatos, nesse caso tecnológicos, passam a ser usados durante as aulas, problemas diferentes dos habituais começam a surgir e as práticas matemáticas a se modificar. A autora alerta que as “[...] necessidades não são facilmente identificáveis, se a atividade matemática estiver ligada apenas à sua parte ‘nobre’ [...], e as necessidades matemáticas do trabalho técnico não forem levadas seriamente em conta” (ARTIGUE, 2002, p. 249, tradução nossa, grifo da autora).

O conceito de esquema aparece em diferentes quadros teóricos. Na abordagem instrumental, Rabardel (2002) toma como base a definição proposta por Vergnaud (1990), para quem os esquemas são referentes a uma organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações.

Para Trouche (2003, p. 16), que também se apoia em Vergnaud, “um esquema é a construção de um observador a partir dos diferentes traços de atividade de um sujeito (ações, antecipações, inferências, etc.)”, e “descrever a atividade em termos de esquemas de ação instrumentados exige a consideração de invariantes operatórios” (TROUCHE, 2005, p. 152, tradução nossa).

Quando a situação envolve o uso de um artefato, os esquemas desenvolvidos pelo sujeito passam a ser denominados esquemas de ação instrumentada (TROUCHE, 2000), visto que o esquema será formado por meio das ações durante a realização da tarefa com o uso de determinado artefato (DRIJVERS *et al.*, 2013).

Conforme Trouche (2005), o esquema de ação instrumentada é formado por invariantes operatórios e por um conjunto de esquemas de uso¹. Assim, como nesta pesquisa a construção do cenário animado é proposta para ser desenvolvida no GeoGebra, damos atenção maior aos esquemas de ação instrumentadas e apoiamo-nos em Trouche (2005).

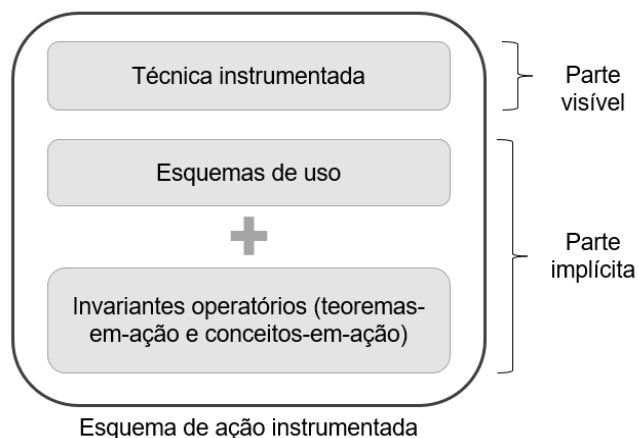
Trouche (2005, p. 149, tradução nossa), novamente fundamentado em Vergnaud (1996), considera os invariantes operatórios como o “[...] conhecimento implícito contido nos esquemas, que podem ser conceitos-em-ação, ou seja, conceitos considerados implicitamente relevantes; e teoremas-em-ação, [...] proposições consideradas verdadeiras”.

Com relação aos esquemas de uso, Trouche (2005) apoia-se em Rabardel (2002), que destaca que os esquemas de uso são referentes às ações e atividades específicas relacionadas ao uso do artefato.

¹ Os esquemas de uso, conforme Rabardel (2002), são referentes a tarefas secundárias e correspondem às ações relacionadas ao uso ou funcionamento do artefato.

As técnicas instrumentadas são ações e manifestações externas, são a parte observável do trabalho dos alunos (TROUCHE, 2005; DRIJVERS *et al.*, 2013), não se limitando apenas aos movimentos físicos (DRIJVERS, 2003). Ainda, os esquemas de ação instrumentada são “[...] os fundamentos cognitivos dessas técnicas que não são diretamente observáveis” (DRIJVERS *et al.*, 2013, p. 27, tradução nossa).

Figura 3 - Representação de um esquema de ação instrumentada



Fonte: Adaptado de Trouche (2005).

Nesse contexto, é possível observar que há uma relação entre esquema e técnica e, por mais que cada um desses elementos seja caracterizado de uma maneira, quando ocorre a interação entre usuário e o artefato, eles estão diretamente relacionados (ARTIGUE, 2007); logo, há uma relação dialética entre ambos.

Sendo assim, neste trabalho, consideramos as técnicas instrumentadas como ações empregadas pelos alunos no software para a realização da construção do cenário animado, e os esquemas de ação instrumentada como as ações conclusivas identificadas por nós por meio dos esquemas de uso e dos invariantes operatórios.

3.3 Contexto e pressupostos metodológicos

As intervenções descritas neste trabalho fazem parte de uma pesquisa de mestrado e são associadas a um projeto de extensão, Universidade Sem Fronteiras¹ (USF). Ambos são relacionados à construção de cenários animados no software GeoGebra por alunos da Educação

¹ O projeto intitulado *Desenvolvimento de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio com indicativo de altas habilidades/superdotação e a construção de cenários animados no software GeoGebra* previa que fossem propostas as construções de cenários animados a esses alunos em particular.

Básica. O projeto conta com a participação de quatro alunos da graduação em Licenciatura em Matemática e uma professora recém-formada, que neste caso é a primeira autora desta pesquisa.

O objeto desta pesquisa são os cenários animados que são construções no GeoGebra, que podem ter personagens, representar situações reais ou imaginárias. É importante que os elementos matemáticos sejam programados/definidos para que, ao final, a construção tenha movimento e, assim, se constitua uma cena/cenário animada/o. A/o cena/cenário representada/o final não precisa ter objetivo(s) matemático(s) explícito(as). Além disso, para que a construção seja caracterizada como cenário animado, é necessário que não haja interferência do usuário sobre o movimento final, além de clicar em botões construídos ou colocar o controle deslizante para animar, dando início à animação.

O objetivo da construção do cenário animado descrito neste trabalho, de cunho qualitativo, é abordar as características da função afim. Esse conteúdo é previsto para ser estudado no 9º ano do Ensino Fundamental (PARANÁ 2021; BRASIL, 2018). No entanto, as pesquisadoras tinham a intenção de trabalhar com alunos que ainda não haviam tido contato com o conteúdo, então não poderiam ser alunos do 9º ano. Além disso, era importante que os alunos já tivessem algum desenvolvimento no campo da álgebra. Então, determinamos que as construções dos cenários animados deveriam ser propostas a alunos do 8º ano¹.

O professor de matemática que disponibilizou as aulas era regente de duas turmas do 8º ano, denominadas A e B, e pediu que as intervenções ocorressem em ambas as turmas. Como as intervenções seriam no contexto do projeto de extensão, em que contávamos com a colaboração dos integrantes do USF e de uma colega de mestrado, foi possível atender o pedido do professor e propor a construção dos cenários animados a duas turmas no 8º ano, A e B.

Como as duas turmas do 8º ano são de uma escola² que funciona no mesmo prédio da UNESPAR *campus* União da Vitória, as aulas aconteceram em dois ambientes na universidade, por ter equipamentos que suportam as construções no software. Cada turma foi dividida em dois grupos, com uma quantidade parecida de alunos³. O professor de matemática da turma e a professora do Atendimento Educacional Especializado Integral (AEE-I) da escola fizeram a

¹ Os alunos desse nível escolar têm em média 13 anos de idade.

² A escola oferta o ensino em tempo integral (manhã e tarde) para o Ensino Fundamental e Médio e os alunos têm 6 aulas de Matemática por semana.

³ Tínhamos um parecer favorável do comitê de ética para a realização dos encontros e o termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelos responsáveis pelos alunos.

divisão, considerando critérios estabelecidos por eles quanto ao melhor rendimento para trabalhar em grupos.

No quadro 5 consta a organização dos grupos de cada turma, o ambiente em que estavam e a equipe assistente (EA) que estava conduzindo as aulas da construção do cenário animado Abelha.

Quadro 5 - Organização das turmas

Turma	Grupo	EA - Professores¹	Ambiente
8º ano A	Grupo 1 (G1) com 9 alunos	EA1 - P. Alice ² , P. Fabio e P. Nara	Laboratório Interdisciplinar de Formação de Educadores (LIFE)
8º ano B	Grupo 2 (G2) com 11 alunos		
8º ano A	Grupo 3 (G3) com 13 alunos	EA2 - P. Clara, P. Bianca e P. Eduardo	Laboratório de Informática do curso de Licenciatura em Matemática (LIM)
8º ano B	Grupo 4 (G4) com 13 alunos		

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Cada aluno teve um computador ou notebook à sua disposição para realizar as construções, mas podiam e eram incentivados a colaborar uns com os outros. As telas dos computadores/notebooks foram gravadas em vídeo e algumas em áudio e vídeo durante as aulas³.

O planejamento foi organizado antes dos encontros, de forma que contamos com a colaboração dos integrantes do USF, da colega de mestrado, de um professor de matemática do curso de Licenciatura em Matemática e da coordenadora do USF, que é a segunda autora deste trabalho. Assim, mesmo em ambientes e com EA diferentes, as construções e encaminhamentos das aulas para os dois grupos de cada turma eram semelhantes, visto que seguiam o mesmo planejamento.

Nos meses de maio, junho e julho de 2022 foram realizadas intervenções semanais com cada turma em horário de aula. Cada intervenção durava duas horas/aula, 1h40min.

Na primeira intervenção, ambas as turmas construíram o cenário animado *Barco e chuva*⁴ para que se ambientassem com as construções. Da segunda a quinta intervenção, foi proposta a construção do cenário *A Princesa e o Sapo*⁵, que aborda mais especificamente a função afim e função por partes. Durante a construção desse segundo cenário animado, os alunos tiveram o primeiro contato com a função afim. Na sexta e sétima intervenção,

¹ Mesmo que quatro integrantes do USF fossem alunos da graduação, no momento das intervenções, todos os integrantes das EA atuavam como professores. Então, na seção das análises, para indicar as falas e ações deles, foi colocado P. antes do nome.

² Os nomes são fictícios para preservar a identidade dos integrantes.

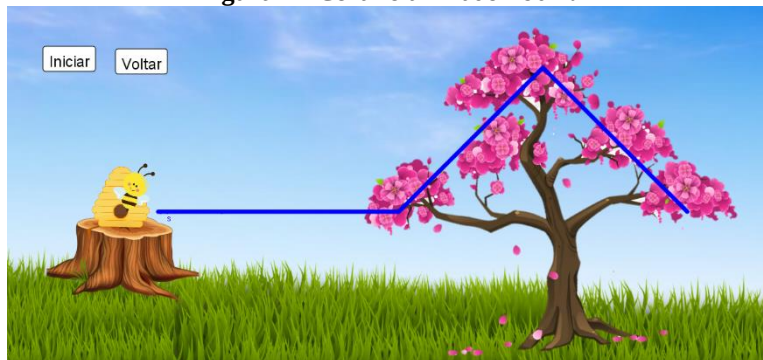
³ Embora não tenha relação com o objetivo deste estudo, informamos que as intervenções com os alunos foram realizadas presencialmente, em um contexto pós-pandêmico.

⁴ O cenário animado *Barco e chuva* pode ser visto em <https://www.geogebra.org/m/ptazpyqa>.

⁵ O cenário animado *A Princesa e o Sapo* pode ser visto em <https://www.geogebra.org/m/xxzb5ufg>.

propusemos a construção do cenário animado *Abelha*¹ (Figura 4), utilizando função afim e função por partes para sua construção, que durou três horas/aula, sendo duas dessas aulas conjugadas.

Figura 4 - Cenário animado *Abelha*



Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Como os alunos já haviam construído o cenário *A Princesa e o Sapo*, que envolvia o conteúdo de função afim, foram incentivados a desenvolver a construção com mais autonomia. Após apresentarmos o cenário animado *Abelha* a eles, propusemos que o construísem em seus computadores, buscando a colaboração dos colegas próximos. Durante e depois de realizar cada etapa da construção, eram promovidas discussões sobre os conteúdos matemáticos envolvidos.

Os integrantes das EA auxiliaram os alunos, fizeram questionamentos sobre as construções, solicitaram explicações sobre como haviam construído cada etapa e incentivaram a participação na aula.

Dentre todos os materiais produzidos pelos quatro grupos de alunos, para a seleção dos episódios, levamos em consideração: as anotações da primeira autora e da colega de mestrado que estava no outro laboratório e os relatos dos integrantes da EA que participaram das aulas, sendo dado preferência para as gravações das telas dos computadores dos alunos que capturaram imagem e áudio.

Além disso, para as análises, as situações e diálogos relatados neste trabalho foram selecionados com a intenção de apontar e discutir características da função afim manifestadas pelos alunos durante o processo de construção do cenário animado *Abelha* e, principalmente, aquelas que emergiram durante as discussões coletivas sobre cada etapa da construção. Para isso, escolhemos episódios de construções dos alunos que participavam ativamente da aula e das discussões.

¹ O cenário animado *Abelha* pode ser visto em <https://www.geogebra.org/m/zqpwwvwt>.

Para que as análises fossem focadas em cada etapa da construção, a seção a seguir foi dividida com relação ao conteúdo principal abordado no episódio. No entanto, destacamos que, considerando a sala de aula, nem sempre essa sequência ocorreu de forma linear, como está exibida aqui, visto que os alunos usavam técnicas/esquemas adaptados de passos anteriores para seguir a construção.

Quadro 6 - Etapas da construção do cenário animado *Abelha*

Etapas	O que deve ser feito
1 - Função constante	Construir o caminho para o primeiro movimento da abelha, que nesse caso é horizontal.
2 - Função afim caracterizada como crescente (taxa de variação)	Construir o caminho para o segundo movimento da abelha, que nesse caso é subir.
3 - Função afim caracterizada como crescente (coeficiente linear)	Deslocar o caminho do segundo movimento, se necessário, no sentido vertical.
4 - Função afim caracterizada como decrescente	Construir o caminho para o terceiro movimento da abelha, que nesse caso é descer, e deslocá-lo no sentido vertical, se necessário.
5 - Restringindo o domínio do gráfico de cada função	A partir dos caminhos construídos para cada movimento, limitá-los para formar o percurso para a abelha.
6 - Função por partes	Unir as três partes limitadas para formar um único e contínuo percurso para a abelha.
7 - Pontos da figura animados	Fazer com que a figura da abelha se mova sobre o percurso construído.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Na seção seguinte, apresentamos relatos/excertos das aulas, também trechos (em formato de vídeos) das gravações das telas dos computadores para discutir como os alunos das duas turmas foram construindo o cenário animado *Abelha*. Para acessar os vídeos sobre as situações descritas no decorrer do texto, além do link com nota de rodapé, eles foram inseridos no corpo do texto¹, como figuras. Para não identificar os alunos, o áudio dos vídeos que estão disponíveis neste trabalho foi retirado. Para discutir os processos de construção, agrupamos técnicas instrumentadas semelhantes, identificadas por nós, nas análises, visto que as discussões em torno delas se aproximam.

¹ Como não é possível que eles sejam executados dentro do próprio texto, pode-se clicar sobre a Figura que leva ao vídeo e que foi anexada no texto. Após clicar sobre ela, será aberta uma janela na tela ou uma nova guia/aba no navegador que leva até o vídeo. Ressaltamos que, para que o vídeo seja executado, é necessário acesso à internet para poder carregar o conteúdo presente nele.

3.4 Construção e análise

Antes de iniciar a construção, foi apresentado o cenário final aos alunos para que visualizassem o objeto que deveriam construir. Ao serem questionados sobre como poderiam fazer a construção, Ana¹ (G2) respondeu de imediato, *dá para fazer com função*, indicando o conteúdo que poderia ser usado. Em seguida, foi perguntado se eles observavam semelhanças com as construções anteriores (*A Princesa e o Sapo*), e Marlon (G1) e Gustavo (G4) destacaram a parte de subir e descer, fazendo relações entre os dois cenários.

Após finalizar cada etapa da construção, antes de seguir para a próxima, foi solicitado aos alunos dos 4 grupos que indicassem aos presentes na sala como fizeram sua construção, para que fossem promovidas discussões e reflexões sobre os conteúdos matemáticos envolvidos.

3.4.1 Função constante

O primeiro movimento da abelha é horizontal. Uma das formas de fazer essa parte da construção é criando uma função constante. Marlon (G1) digitou a função $f(x) = 5x$ na caixa de entrada do software. Essa estratégia se deve possivelmente ao fato de que essa foi a primeira função criada na construção *A Princesa e o Sapo*.

Nesse sentido, a técnica instrumentada empregada pelo aluno foi criar/copiar uma função que tenha a variável x na lei de formação. A partir disso, ele verificou que o gráfico da função não apresentou o comportamento esperado, ou seja, paralelo ou coincidente com o eixo x . Então, ele alterou o valor da taxa de variação da função afim, na janela de álgebra, mas não teve sucesso, pois o gráfico continuou inclinado.

Em seguida, Marlon (G1) apagou o x da lei de formação da função e alterou o valor da constante. Ao ser questionado sobre o que ocorre com o gráfico da função, se esse valor for alterado, Marlon respondeu: *ele [gráfico da função] vai para cima ou para baixo [em relação ao eixo y]*.

Na discussão geral com os alunos do G1, Marlon indicou como fazer a construção do gráfico no software para o primeiro movimento da abelha, como pode ser lido no seguinte excerto:

¹ Os nomes dos alunos são fictícios para preservar sua identidade.

P. Alice: Como podemos fazer para criar a primeira parte da construção? Como fizeram?
Marlon: A linha? Eu coloquei $f(x)=0$.
P. Alice: O que aconteceu?
Marlon: A linha apareceu, ficou no meio.
P. Alice: E se quiser ela [gráfico da função] em outro lugar? [...] Se quiser que vá mais para cima [em relação ao eixo y]?
Marlon: Tem que colocar 5, 2 [na lei de formação].
Marcio: Tem que deixar positivo.
P. Alice: E se quiser que ela [gráfico da função] vá mais para baixo [em relação ao eixo y]?
Marlon: Menos.

A técnica instrumentada na proposta do aluno é referente a criar uma função sem a variável x na lei de formação após a igualdade, para gerar um gráfico paralelo ou coincidente com o eixo x . Quando é solicitado que o gráfico mude de posição, ele indica exemplos de valores que devem estar na lei de formação da função.

Nesse excerto, é possível identificar que os alunos citam mais de uma função constante como exemplo, e dão indícios de que estabelecem conexões entre a lei de formação da função constante e a posição do gráfico no plano cartesiano.

Conforme as ações dos alunos e discussões durante a construção, indicamos, no quadro abaixo, as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados por eles.

Quadro 7 - Relação entre esquema-técnica na construção da função constante

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Digitar a lei de formação da função $f(x)=5x$.	Usar a caixa de entrada para digitar a função.	Teorema-em-ação: se digito a lei de formação da função com um valor positivo junto à variável x , o gráfico fica inclinado. Conceitos-em-ação: gráfico da função, variável x , inclinação e números inteiros.
Apagar a variável x após o sinal de igualdade.	Alterar a lei de formação da função usando a caixa de entrada ou a janela de álgebra.	Teorema-em-ação: se apago o x da lei de formação da função, o gráfico não fica inclinado. Conceitos-em-ação: gráfico da função e lei de formação.
Alterar o valor constante na lei de formação.		Teoremas-em-ação: se altero o valor constante na lei de formação da função, o gráfico se desloca sobre o plano; se o valor na lei de formação da função constante for positivo, o gráfico da função fica acima do eixo x ; se o valor na lei de formação da função constante for negativo, o gráfico da função fica abaixo do eixo x . Conceitos-em-ação: gráfico da função, números inteiros e plano cartesiano.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a construção dessa etapa, identificamos que os alunos manifestam noções referentes à função constante, de forma que

digitam a lei de formação da função, fazem alterações e verificam se o que realizaram foi suficiente para criar o percurso para o primeiro movimento da abelha.

3.4.2 Função afim caracterizada como crescente (taxa de variação)

Em seguida, os alunos começaram a construir o caminho para o segundo movimento da abelha, que é subir. Uma das formas de fazer essa parte da construção é criando uma função afim caracterizada como crescente. Ao serem questionados sobre como poderiam construir esse gráfico, Marlon (G1) respondeu: *é só colocar o x [na lei de formação da função]* e digitou, na caixa de entrada do software, a função $m(x) = 5x$.

Nesse sentido, a técnica instrumentada empregada por Marlon foi criar uma função que tivesse a variável x na lei de formação. Ele observou que a representação gráfica da função exibida na tela teve o comportamento que ele precisava.

Junior (G1) digitou $h(x) = x$ e realizou testes no software, alterando a taxa de variação da função na caixa de entrada, mudando 1 para 2, 1.5, 1.56, 1.5, e clicou em *Enter*.

A técnica instrumentada foi criar uma função com a variável x na lei de formação e, em seguida, modificar seu valor para que a representação gráfica da função, na janela de visualização, fosse alterada. Destacamos o uso dos números decimais na lei de formação da função, o que sugere que ele recorda outros conjuntos numéricos.

Depois, na discussão com o G1, Junior explicou como poderia ser feita essa parte da construção, sugerindo inclusive números decimais para a taxa de variação da função afim. Ele sugeriu inicialmente a função $g(x) = x$. Em seguida, P. Alice questionou sobre o que ele deveria fazer para que a representação gráfica ficasse mais inclinada, e ele respondeu *dá para colocar outros números, como 1.5, 1.8, talvez* [junto ao x na lei de formação]. Ela sugeriu que fosse mais inclinada, então o aluno respondeu $g(x)=3.1x$. Nessa discussão, identificamos que o aluno tem noção da ordenação dos números decimais e os indica de forma crescente corretamente.

A partir das ações dos alunos e das sugestões de construção dadas por Junior, indicamos, no quadro 8, na página seguinte, as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados.

Quadro 8 - Relação entre esquema-técnica na construção da função afim crescente

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Digitar a lei de formação da função $m(x)=5x$ ou $g(x)=x$.	Usar a caixa de entrada para digitar a função.	Teorema-em-ação: se digito a lei de formação da função com um valor positivo na frente da variável x , o gráfico da função fica inclinado. Conceitos-em-ação: gráfico da função, variável x , inclinação e números inteiros.
Alterar o valor que está com x na lei de formação da função após o sinal de igualdade.	Alterar a lei de formação da função usando a caixa de entrada ou a janela de álgebra.	Teoremas-em-ação: se altero o valor junto com o x na lei de formação, a inclinação do gráfico da função, em relação ao eixo x , é modificado; se altero o valor junto com o x na lei de formação para um valor maior, o gráfico fica mais inclinado que anteriormente. Conceitos-em-ação: gráfico da função, números inteiros, ordenação dos números e inclinação.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a construção da função para o segundo movimento da abelha, identificamos que os alunos manifestam noções referentes à função afim crescente, pois digitam a lei de formação com a variável x e a taxa de variação positiva.

3.4.3 Função afim caracterizada como crescente (coeficiente linear)

Depois de construir a base para o segundo movimento da abelha, Ariel (G2) queria deslocar o gráfico da função afim crescente, para que ele não passasse pela origem do plano cartesiano, ou seja, pelo ponto (0,0), mas não sabia como alterar a lei de formação. Para auxiliá-la, P. Fábio sugeriu que ela adicionasse o coeficiente linear e alterasse o valor desse coeficiente. Ela mudou a função para $h(x) = 1x + 5$, $h(x) = 1x + 3$, e depois para $h(x) = 1x + 1$, então concluiu: *tem que mudar o valor aqui, o número* [coeficiente linear].

Na discussão com os alunos do G1, depois de criar a função afim caracterizada como crescente, P. Alice pediu:

- P. Alice:** *Vou deixar essa função com a mesma inclinação [mesma taxa de variação], mas quero que ela saia desse ponto de interseção entre os eixos x e y [ponto (0,0)]. Como faz para alterar a posição do gráfico?*
- Marlon:** *Menos.*
- P. Alice:** *Menos o que?*
- Marlon:** *2.*
- P. Alice:** *Onde que coloca?*
- Marlon:** *Lá no eixo y .*
- P. Alice:** *Como eu vou fazer isso?*
- Marlon:** *Tem que colocar, por exemplo $m(x)=5x-5$. [...]*
- P. Alice:** *E se eu quiser que essa função fique em -3 [eixo y]?*

Marlon: Coloca -3.

Marlon indicou, técnica instrumentada, adicionar um valor, nesse caso, negativo, junto à lei de formação da função crescente, para que o gráfico fosse deslocado em relação ao eixo y .

Por meio das ações dos alunos e das sugestões dadas por eles para deslocar o gráfico da função durante a discussão, indicamos, no quadro 9, as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados.

Quadro 9 - Relação entre esquema-técnica na construção da função afim com o coeficiente linear

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Digitar a lei de formação da função $h(x)=1x$.	Usar a caixa de entrada para digitar a função.	Teorema-em-ação: se digito na lei de formação da função afim apenas um valor junto à variável x , a representação gráfica cruza a origem do plano cartesiano. Conceitos-em-ação: gráfico da função, variável x e plano cartesiano.
Adicionar um valor na lei de formação da função após o sinal de igualdade.	Alterar a lei de formação da função usando a caixa de entrada ou a janela de álgebra.	Teorema-em-ação: se adiciono um valor junto à lei de formação da função afim, o gráfico não passa pela origem do plano cartesiano. Conceitos-em-ação: gráfico da função, lei de formação da função afim e plano cartesiano.
Alterar o valor que foi adicionado na lei de formação da função após a igualdade.		Teoremas-em-ação: se altero o valor somado junto à lei de formação da função afim, o gráfico da função se desloca em relação ao eixo y ; se adiciono três unidades na lei de formação da função afim, o gráfico intercepta o eixo y em três. Conceitos-em-ação: gráfico da função, lei de formação da função afim e plano cartesiano.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a ação de deslocar o gráfico da função afim caracterizada como crescente, que faz parte da segunda etapa da construção, identificamos que os alunos manifestam noções referentes ao coeficiente linear da função afim, dado que indicam que um valor deve ser adicionado na lei de formação para que o gráfico não passe pela origem do plano cartesiano.

Destacamos a possibilidade que o software oferece aos usuários, nesse caso, os alunos, de trabalhar com diferentes representações do mesmo objeto matemático. Assim, por meio dos testes que os alunos realizaram, puderam verificar o que cada valor na lei de formação da função afim interfere na representação gráfica da função e vice-versa. Quando se usa apenas as representações dos livros didáticos ou recursos como lápis e papel, as representações gráficas ficam estáticas e não podem ser manipuladas/alteradas de forma dinâmica e interativa, como com o software.

3.4.4 Função afim caracterizada como decrescente

O último movimento da abelha é descer. Uma das formas de fazer essa parte da construção é criando uma função afim decrescente. Para construir essa etapa, Tiago (G4) digitou a função $j(x) = -5x - 400$ na caixa de entrada. Em seguida, decidiu alterar a posição do gráfico da função no plano cartesiano. Para isso, ele alterou o valor do coeficiente linear na lei de formação da função afim decrescente, mudando -400 para -70, +70 e +100, e clicou em *Enter*.

A técnica instrumentada empregada por Tiago foi criar uma função em que a variável x seja acompanhada por um número negativo. Ele verificou que o gráfico da função teve o comportamento esperado, mas sentiu a necessidade de deslocar o gráfico para que pudesse compor, de forma adequada, o caminho para a abelha percorrer.

Apresentamos abaixo as discussões que ocorreram com os alunos do G3:

- P. Alice:** *Como vamos fazer para ela [abelha] descer?*
Ester: *Do mesmo jeito que fizemos a g [função crescente].*
P. Alice: *Tem que ser igual a g?*
Daniela: *Não.*
Ester: *É decrescente.*
P. Alice: *E para ser uma função [afim caracterizada como] decrescente, o que precisa?*
Ester: *Ser número negativo.*
P. Alice: *Onde fica o número negativo?*
Manu: *O que vai com o x .*

Com os alunos do G1:

- P. Alice:** *Como vamos fazer para ela [abelha] descer?*
Marlon: *Vai criar, por exemplo, $m(x) = -5 + 15$.*
P. Fabio: *Só isso?*
Marlon: *Sim.*
Jeferson: *Faltou o x do lado do 5 negativo.*
Marlon: *Verdade, tem o x .*

Nos dois casos, na tela projetada, o gráfico da função decrescente não ficou em uma posição adequada para formar o caminho para a abelha. Então, os alunos começaram a indicar possíveis valores negativos para a taxa de variação e valores reais para o coeficiente linear da função, até que seu gráfico ficasse na posição adequada.

A técnica instrumentada de construção indicada pelos alunos do grupo G3 refere-se a criar uma função, de forma que, na lei de formação, a variável x seja acompanhada de um número negativo. Já os alunos do G1, como técnica instrumentada, indicam efetivamente a lei de formação de uma função que tenha a variável x acompanhada de um número -5.

Por meio das ações dos alunos e da discussão para construir o caminho para a abelha descer, indicamos, no quadro 10, as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados.

Quadro 10 - Relação entre esquema-técnica na construção da função afim decrescente com o coeficiente linear

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Digitar a lei de formação da função $h(x) = -3x + 200$.	Usar a caixa de entrada para digitar a função.	Teorema-em-ação: se digito a lei de formação da função com a variável x junto com um valor negativo, o gráfico da função fica inclinado. Conceitos-em-ação: gráfico da função, variável x , inclinação e números inteiros.
Alterar o valor adicionado junto à lei de formação após o sinal de igualdade.	Alterar a lei de formação da função usando a caixa de entrada ou a janela de álgebra.	Teorema-em-ação: se altero o valor somado junto à lei de formação da função afim, o gráfico da função se desloca em relação ao eixo y . Conceitos-em-ação: gráfico da função, lei de formação da função afim e plano cartesiano.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a etapa da construção da função para o terceiro movimento da abelha, podemos observar que os alunos manifestam noções referentes à função afim decrescente, pois digitam a lei de formação com a variável x e a taxa de variação negativa.

Antes de seguir para a próxima etapa de construção, P. Alice questiona os alunos do G1:

- P. Alice:** Qual a diferença entre a g [função crescente] e a e [função decrescente]?
Marlon: Uma é positiva e a outra negativa.
P. Alice: O que está positivo ou negativo? [...]
Marlon: O número ali, com o x .

Nesse caso, segundo a fala do aluno, podemos inferir que há indícios de que os alunos estabelecem diferenças entre os dois tipos de função, tomando como base a lei de formação.

3.4.5 Restringindo o domínio do gráfico de função

Depois de criar as três funções caracterizadas como crescente, decrescente e constante, a próxima etapa da construção consiste em limitar a representação gráfica de cada função. Para isso, é necessário restringir seus domínios, considerando intervalos específicos para que a representação gráfica de cada uma delas não fosse mais infinita. Marlon (G1) explicou aos presentes na aula: *tem que colocar um limite, eu lembro disso*, referindo-se à representação gráfica das funções para formar o caminho para a abelha, assim como foi feito no cenário animado *A Princesa e o Sapo*.

Junior (G1), para limitar a representação gráfica da função afim crescente, solicitou ajuda para escrever o comando. A P. Alice, indicou ao aluno que deveria usar o comando *Se* (*<Condição>*, *<Então>*). Ele, então, digitou na caixa de entrada do software *Se* ($-2 < x < 3, h(x)$), escolhendo os valores do intervalo no comando. Quando ele digitou o valor -2 como mínimo, estava olhando em relação ao eixo *x*. Já quando digitou o valor 3 como máximo, estava olhando em relação ao eixo *y* (Figura 3¹).

Antes de clicar no *Enter* para finalizar o comando, o aluno observou, na prévia da representação gráfica exibida pelo GeoGebra, na janela de visualização, que um dos valores escolhidos para o intervalo não estava correto, e alegou:

Junior: *Mas está fora.*

P. Alice: *Isso, e tem que fazer o quê?*

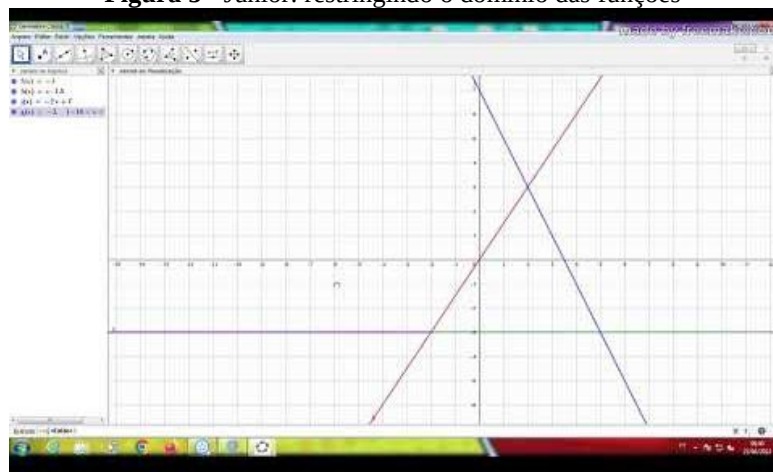
Junior: *Diminuir. [...]*

P. Alice: *Um valor indica onde ele [gráfico da função] começa e o outro onde ele [gráfico da função] termina. [Os valores do intervalo] estão corretos?*

Junior: *Ah é? 2 [em relação ao eixo *x*]!*

Então, o aluno alterou o intervalo para $-2 < x < 2$. Em seguida, para limitar o gráfico da função decrescente, o aluno digitou o comando no software, considerando os valores do intervalo em relação ao eixo *x*, sem necessitar de auxílio.

Figura 5 - Junior: restringindo o domínio das funções²



Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

A técnica instrumentada empregada pelo aluno foi digitar o comando na caixa de entrada, indicando na *Condição* o intervalo considerado como domínio da função, e no *Então*, a qual função a condição deveria ser aplicada.

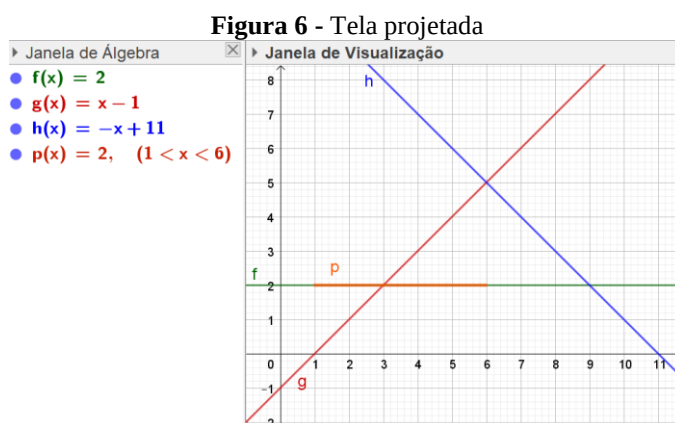
¹ Ao clicar sobre a figura, é dado acesso ao vídeo da tela do aluno.

² O vídeo pode ser acessado em: <https://youtu.be/ByHHAzLV7Uo>.

No excerto abaixo, em que são descritas as discussões com os alunos do G3, pode-se observar que eles tiveram dificuldade em desenvolver essa parte da construção:

- P. Alice:** A base do caminho está pronta [gráfico das funções]. O que falta?
Barbara: Cortar. [...]
Ester: Tem que colocar o “se”.
P. Alice: Vamos limitar a função f [constante]. Ela é [caracterizada como] crescente, decrescente ou constante?
Barbara: Constante.
P. Alice: Vamos olhar para os valores no eixo x ou y para restringir o intervalo [do domínio]?
Barbara: x . [...]
P. Alice: Qual intervalo vocês querem para a [função] constante?
Barbara: Pode ser de 1 a 6.

Mas a representação gráfica da função fica com intervalo maior do que deveria para essa construção, como pode ser observado na Figura 4.



Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

- Isis:** Mas não teria como fazer até o 6, porque ela teria que ir até uma parte e voltar.
Barbara: Ixi.
Isis: Vai ter que colocar de 3 até o -4.
Barbara: Vamos colocar de -3 até 3.

Para restringir o domínio das outras funções, o processo desenvolvido foi semelhante, os alunos indicavam valores para os intervalos de cada função, isso era construído na tela projetada e, caso necessário, os valores do intervalo eram alterados.

A técnica instrumentada proposta pelos alunos para desenvolver essa parte da construção está relacionada a usar o comando *Se*, disponível no GeoGebra, e escolher um intervalo para o domínio da função.

Por meio das ações dos alunos e da discussão para limitar o caminho para a abelha percorrer, indicamos, no quadro, 11 as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados.

Quadro 11 - Relação entre esquema-técnica na limitação da representação gráfica de cada função afim

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Digitar o comando $Se (-2 < x < 3, h(x))$.	Usar a caixa de entrada para digitar o comando.	Teorema-em-ação: se no comando digito um intervalo e indico uma função, a representação gráfica da função em questão ficará limitada. Conceitos-em-ação: gráfico da função e intervalo.
Alterar o valor de mínimo e máximo do intervalo quando necessário.	Alterar os valores do intervalo usando a caixa de entrada ou a janela de álgebra.	Teoremas-em-ação: se altero o menor valor no intervalo, a posição em que representação gráfica da função inicia será alterada; se altero o maior valor no intervalo, a posição em que a representação gráfica da função termina será alterada. Em ambos os casos, consideramos a reta numérica. Conceitos-em-ação: gráfico da função, intervalo e reta numérica.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a etapa da construção da função para limitar o caminho da abelha, podemos observar que os alunos manifestam noções referentes ao domínio da função, pois digitam no comando o intervalo que querem que seja considerado para cada função.

3.4.6 Função por partes

Nessa etapa, os alunos deveriam construir uma função por partes, unindo as três funções afim (constante, crescente e decrescente) para formar um único e contínuo caminho para a abelha.

No momento da discussão com o G1, Marlon explicou a todos como fez essa parte: *Vai lá na caixa de entrada [digita Se] e escolhe a opção condição, então, senão*. Em seguida, o aluno falou a todos o que deveria ser digitado: $Se(-5 \leq x \leq 3, h(x)), Se(3 < x \leq 6, p(x)), Se(6 < x \leq 9, q(x))$. As funções h , p e q eram constante, crescente e decrescente, respectivamente.

A técnica instrumentada proposta por Marlon refere-se a fazer um único caminho para a abelha no GeoGebra. Para isso, foi necessário que Marlon reconhecesse as funções que comporiam o caminho e os seus respectivos intervalos.

Por meio das ações dos alunos e da indicação de como formar um único caminho para a abelha percorrer, no quadro 12, elencamos as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados.

Quadro 12 - Relação entre esquema-técnica na construção da função por partes

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Digitar o comando $Se(-5 \leq x \leq 3, h(x), Se(3 < x \leq 6, p(x), Se(6 < x \leq 9, q(x)))$.	Usar a caixa de entrada para digitar o comando.	Teorema-em-ação: se digito em um único comando, os intervalos e suas respectivas funções, a representação gráfica será a união de partes das funções. Conceitos-em-ação: gráfico da função e intervalo.
Alterar os valores de mínimo e máximo do intervalo quando necessário.	Alterar os valores do intervalo usando a caixa de entrada ou a janela de álgebra.	Teorema-em-ação: se altero os valores do intervalo, de forma que o extremo direito de um deles coincida com o extremo esquerdo de outro, a representação gráfica fica contínua. Conceitos-em-ação: gráfico da função, intervalo e continuidade.

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a etapa da construção de um único caminho para a abelha, podemos observar que os alunos manifestam noções referentes à função por partes, pois indicam e digitam os respectivos intervalos de domínio de cada função em um único comando.

3.4.7 Pontos da figura animados

Na última etapa da construção, os alunos deveriam fazer com que a figura da abelha se movesse sobre o plano, com relação ao gráfico da função por partes. Para isso, era necessário construir o controle deslizante, para possibilitar a animação dos pontos da figura da abelha.

Para isso, Marlon (G1) explicou:

Marlon: O mínimo [valor] do controle vai ser -5.

P. Fábio: Por quê?

Marlon: Porque começa aqui [aponta para o gráfico da função na tela]. E o máximo 3.

Nesse sentido, o aluno empregou a técnica instrumentada de construir o controle deslizante, relacionando seu valor de máximo e mínimo com os valores dos intervalos do domínio da função por partes, olhando para ela como um todo, e não de forma particionada.

Para definir as coordenadas x e y dos pontos A e B da figura da abelha, Marlon pediu auxílio do P. Fábio, que indicou que ele retornasse ao cenário *A Princesa e o Sapo* e observasse o que havia sido feito para animar os pontos da figura nessa construção. No cenário *A Princesa e o Sapo*, a figura também estava atrelada aos pontos A e B. Marlon abriu as configurações do ponto A no cenário *A Princesa e o Sapo* e observou que as coordenadas eram $(a-30, p(a))$, em que a era o controle deslizante e p a função por partes.

Em seguida, P. Fábio questionou:

P. Fábio: Quem é a ?
Marlon: É o controle deslizante.
P. Fábio: Então, no ponto tem " a ", que é o controle deslizante. E o valor y [do ponto B], é o que?
Marlon: p .
P. Fábio: É $p(a)$. Quem é p ?
Marlon: p é tipo...
P. Fábio: Olha na janela de álgebra quem é p .
Marlon: É aquela função que liga eles [gráficos e forma a função por partes].

P. Fábio explicou a Marlon que a coordenada x do ponto A é o controle deslizante, e na coordenada y foi colocado o nome da função relacionada ao controle deslizante.

Ao retornar à construção do cenário Abelha, Marlon abriu as configurações do ponto B e alterou as coordenadas para $(a, r(a))$, pois nessa construção, a função por partes era r . Em seguida, o aluno animou o controle deslizante e observou que o ponto B se moveu sobre a representação gráfica da função por partes r .

Para alterar as coordenadas do ponto A no cenário da Abelha, o aluno retornou ao cenário *A Princesa e o Sapo*, e verificou que as coordenadas do ponto A nessa construção eram $(a-30, p(a))$. Depois, abriu as configurações do ponto A da figura da abelha e alterou as coordenadas para $(a-3, r(a))$.

A técnica instrumentada empregada pelo aluno, com o auxílio do P. Fábio, é referente à reprodução, como ocorre normalmente quando os alunos usam meios como lápis e papel, mas difere, porque ele tem a possibilidade de alterar as coordenadas dos pontos da figura da abelha, relacionando os pontos à função por partes e ao controle deslizante, e observar as implicações de cada mudança na janela de visualização.

Por meio das ações de Marlon para garantir o movimento da figura da abelha sobre o caminho construído, no quadro 13, elencamos as técnicas instrumentadas, os esquemas de uso e os invariantes operatórios manifestados.

Quadro 13 - Relação entre esquema-técnica na animação da figura da abelha

Técnicas instrumentadas	Esquemas de uso	Invariantes operatórios
Alterar as coordenadas do ponto B para $(a, r(a))$.	Alterar as coordenadas dos pontos usando a janela de álgebra.	Teorema-em-ação: se altero a coordenada do ponto para $(a, r(a))$, quando o controle deslizante é animado, o ponto se move sobre a representação gráfica da função r . Conceitos-em-ação: ponto e gráfico da função.
Alterar as coordenadas do ponto A para $(a-3, r(a))$.		Teoremas-em-ação: se altero a coordenada do ponto para $(a-3, r(a))$, quando o controle deslizante é animado, o ponto se move em relação à representação gráfica da função r , e não necessariamente sobre o gráfico;

		se adiciono um valor negativo junto à coordenada x, o ponto A fica à esquerda do gráfico e mantém distância do ponto B. Conceitos-em-ação: ponto e gráfico da função.
--	--	--

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Por meio das relações dialéticas estabelecidas durante a etapa de animação da figura da abelha sobre o caminho construído, podemos observar que o aluno manifesta noções referentes ao ponto que pertence à função, visto que altera as coordenadas dos pontos e faz os ajustes necessários.

Também destacamos que, especificamente essa parte da construção, só pode ser desenvolvida usando recursos dinâmicos como o GeoGebra, visto que os objetos são programados para que tenham movimento/sejam animados. Ao usar recursos como lápis e papel, isso não é possível, dado que os objetos criados são estáticos.

3.5 Considerações

Por meio deste trabalho, que teve por objetivo investigar, a partir da dialética esquemática, características da função afim manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra, buscamos identificar as técnicas instrumentadas empregadas e os esquemas de ação instrumentada manifestados durante a construção do cenário animado *Abelha* e que tinham relação com o conteúdo de função afim.

Como as técnicas instrumentadas são consideradas a parte observável do esquema, elas foram identificadas como as ações realizadas pelos alunos e que foram registradas por meio da gravação das telas dos computadores. No decorrer das análises, verificamos que elas são referentes a digitar funções ou comandos na caixa de entrada e alterar a definição dos pontos, por exemplo, e são relacionadas com os recursos e ferramentas disponíveis no artefato.

As técnicas instrumentadas empregadas pelos alunos também revelam as diferentes formas de construção do cenário animado, que não privilegiam uma matemática estática, mas ativa e dinâmica. Os alunos puderam experimentar e explorar possibilidades diferentes, como realizar testes, alterar os valores na lei de formação da função e não seguir um padrão, devido ao fato de que tinham à disposição um artefato que favorecia isso.

Os esquemas de ação instrumentadas, neste trabalho, foram considerados como invariantes operatórios e esquemas de uso. Nesse sentido, buscamos identificar teoremas-em-

ação e conceitos-em-ação a partir das técnicas instrumentadas empregadas pelos alunos e as discussões que ocorreram durante o processo de construção, considerando o conteúdo, principalmente de função afim.

Por meio da relação dialética esquema-técnica, identificamos que os alunos, no decorrer da construção, fazem associações entre a representação algébrica da função, digitada na caixa de entrada, e a representação gráfica criada instantaneamente na janela de visualização. Assim, podiam verificar se o que digitaram na caixa de entrada era o esperado para a etapa da construção. Caso contrário, por meio dos recursos disponíveis no software, como alterar a lei de formação da função a qualquer momento, podiam ajustar a lei de formação da função e analisar o que cada modificação interfere na representação gráfica, relacionando novamente as duas representações da função e verificando se as alterações foram suficientes, considerando o cenário.

Nesse contexto, identificamos que os alunos, durante a construção e principalmente com as discussões, manifestaram noções referentes aos três tipos de função afim, crescente, constante e decrescente, que foram usadas para compor o caminho que a abelha iria percorrer.

Depois, para limitar a representação gráfica de cada função e uni-las em uma única função, da mesma forma, verificamos que os alunos digitaram os elementos utilizando o comando *Se* na caixa de entrada, e observaram a representação gráfica gerada pelo comando na janela de visualização. Caso houvesse equívocos no comando, também poderiam alterá-lo para ajustar conforme a construção. Assim, identificamos que os alunos manifestaram noções referentes ao domínio da função afim e a função por partes.

Por fim, ao animar o cenário, verificamos que os alunos manifestam noções referentes aos pontos que pertencem à função, como discutido.

Portanto, por meio dos encontros e da construção dos cenários animados, os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental puderam ter contato com o conteúdo de função afim, mesmo antes de ser abordado em suas aulas de matemática, e refletir sobre ele e suas representações. Por meio das interações com o software e as discussões após cada etapa de construção do cenário animado, foi possível que os alunos observassem as características da função afim e refletissem sobre o que estava sendo representado na tela.

Entretanto, isso não significa que os alunos conseguem operar com funções, resolvendo tarefas que não estejam relacionadas à construção de cenários animados, como as propostas em livros didáticos e que utilizam lápis e papel para sua resolução. Para isso, seriam necessárias outras intervenções que podem ser realizadas em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS environment: the Genesis of a reflection about Instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal for Computers in Mathematical Learning**, v.7, p. 245-274, 2002.

ARTIGUE, M. Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In: PITTA-PANTAZI, D.; PHILIPPOU, G. (Eds.), **Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)**, Cyprus University edition (p. 68–82), 2007.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, ano 6, n. 8. p. 13-33, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** - Ensino Fundamental. Brasília, DF, 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/ superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020.

DRIJVERS, P. H. M. Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. **Dissertation**. Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands, 2003.

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, p. 23–49, 2013. DOI 10.1007/s10649-012-9416-8

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**, Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. 2005. p. 163-196. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_8

LAGRANGE, J-B. Using symbolic calculators to study mathematics. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.) **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**, Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. 2005. p. 113-135.

MARTINEZ-HERNÁNDEZ, C.; MARMOLEJO-REBOLLEDO, Y. N.; PARRA-SOTO, D. S. El proceso de derivación en GeoGebra: un estudio sobre el conocimiento matemático de futuros profesores. In: XV Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME). **Anais**. Medellín, Colômbia, 2019.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2021.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia**: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos. Université paris 8. hal-01020705. 2002.

TROUCHE, L. La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. **Educational Studies in Mathematics**, 41, p. 239-264, 2000.

TROUCHE, L. **Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques**: nécessité des orchestrations. Université Paris VII, 2003. hal-00190091

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: GUIN, K.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The didactical challenge of symbolic calculators**: Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. p.137-162, 2005.

TROUCHE, L. Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (Org). **Tools and Mathematics: Instruments for Learning**. Springer, 2016. p. 219-256. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0_10

VERGNAUD, G. A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

4 AS DIALÉTICAS ARTEFATO-INSTRUMENTO E INSTRUMENTAÇÃO-INSTRUMENTALIZAÇÃO NA CONSTRUÇÃO DO CENÁRIO ANIMADO BALÃO

Adrieli Cristine Bueno
Maria Ivete Basniak
Daysi Julissa García-Cuéllar

Resumo: Considerando como base teórica a Aproximação Instrumental, esta pesquisa de cunho qualitativo tem por objetivo investigar, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, características da função afim manifestadas por um aluno do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra. Dessa forma, é apresentada e analisada a construção do cenário animado *Balão*, desenvolvido por um aluno do 8º ano do Ensino Fundamental (13 anos) e que envolve o conteúdo de função afim, domínio e função por partes. Antes das intervenções descritas nesta pesquisa, o aluno não havia tido contato com esses conteúdos na sala de aula. Por meio dos invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que são componentes dos esquemas, foram identificadas manifestações de conhecimentos matemáticos relacionados à função afim durante a construção do cenário animado. Além disso, foi identificado que, para o aluno, o artefato GeoGebra, por meio da construção dos cenários animados, se transformou em diferentes instrumentos, pois ele usou o software para construir, limitar e unir as partes do caminho do balão e, em seguida, animar a construção.

Palavras-chave: Educação Matemática. Aproximação Instrumental. Função afim.

4.1 Introdução

Desde quando as tecnologias digitais começaram a serem inseridas em sala de aula, no final da década de 1960, discutir sobre a integração delas como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem tornou-se necessário, pois matemáticos e educadores sentiram que, de alguma forma, seu uso geraria efeitos significativos sobre como o conteúdo poderia ser abordado (DRIJVERS *et al.*, 2010).

Lagrange *et al.* (2001, p. 111, tradução nossa) discutem “[...] que ensinar e aprender envolvem processos complexos, e que envolver a tecnologia elaborada acrescenta ainda mais complexidade”. Ainda, para além de analisar o uso da tecnologia ao desenvolver alguma tarefa, é necessário olhar para o sujeito que interage e usa a tecnologia. Nesse contexto, a Aproximação Instrumental (AI), constituída a partir da articulação entre a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) e a abordagem instrumental (RABARDEL, 1995), tem auxiliado nessas análises (ARTIGUE, 2007).

A AI aborda diferentes noções, como artefato e instrumento, instrumentação e instrumentalização, as quais Drijvers *et al.* (2013) propõem discutir em termos dialéticos, por estarem relacionadas, assim como as faces de uma moeda.

Considerando que essas relações são estabelecidas durante a interação com ferramentas digitais, neste trabalho, damos atenção à construção de cenários animados no GeoGebra. Os cenários animados são construções em que elementos matemáticos são conectados à ferramenta controle deslizante e, ao final, são animados (BUENO; BASNIAK, 2020). Para a construção de um cenário animado, diferentes conteúdos matemáticos podem ser usados e diversas técnicas empregadas no software.

Nesse sentido, este trabalho, que assume os pressupostos qualitativos, busca investigar, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, características da função afim manifestadas por um aluno do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra.

Na seção a seguir, discutimos brevemente a teoria que envolve essas duas dialéticas.

4.2 Dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização

A Aproximação Instrumental (AI) (GARCÍA-CUÉLLAR; SALAZAR, 2020, ARTIGUE, 2011) busca combinar, integrar e adaptar as duas bases teóricas, a abordagem instrumental e a TAD para favorecer investigações sobre as limitações e potencialidades do uso da tecnologia na educação matemática (KIERAN; DRIJVERS, 2016).

Dentro da AI, Drijvers *et al.* (2013) discutem três dialéticas, denominadas artefato-instrumento, instrumentação-instrumentalização e esquema-técnica. No caso deste texto, damos atenção às duas primeiras dialéticas. A terceira dialética foi discutida no capítulo 3 (artigo 2) desta dissertação.

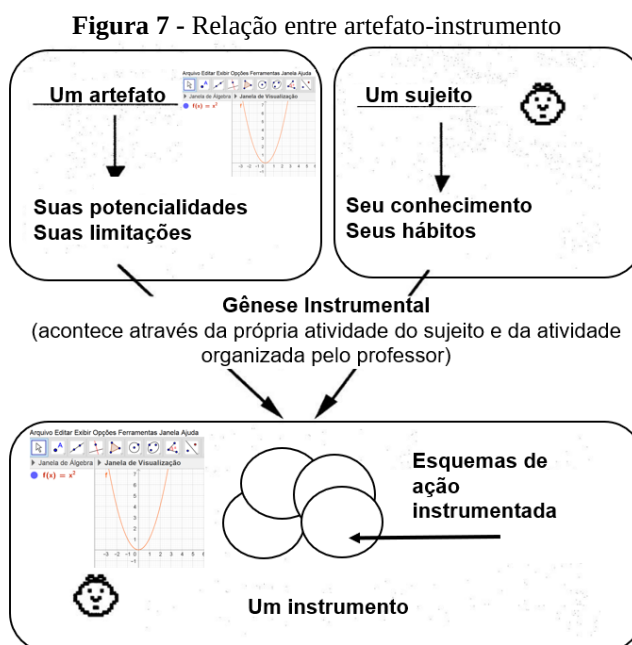
A dialética artefato-instrumento trata da diferença e relação entre artefato e instrumento (RABARDEL, 2002). Conforme a abordagem instrumental, o artefato, objeto material ou simbólico, media a ação humana para o desenvolvimento de determinada tarefa. Ele pode ser “[...] um martelo, um piano, uma calculadora ou um sistema de geometria dinâmica” no computador (DRIJVERS *et al.*, 2013, p. 26, tradução nossa), por exemplo.

No início, o artefato não tem valor instrumental (ARTIGUE, 2002), e a forma como é usado não é trivial (DRIJVERS *et al.*, 2013). Como exemplo, os autores citam que, “enquanto não tivermos ideia do que significam as letras, uma caneta é um artefato inútil para escrever. Assim que aprendemos a escrever, a caneta torna-se mais do que um artefato para desenhar, e

transforma-se em um artefato que também usamos para escrever” (DRIJVERS *et al.*, 2013, p. 26, tradução nossa).

Já o instrumento só existe se há uma relação estabelecida entre o usuário e o artefato para determinada tarefa. Na abordagem instrumental, o instrumento é formado pelo artefato e por um ou diversos esquemas de utilização¹ (RABARDEL, 2002), e conforme os esquemas que são desenvolvidos, diferentes instrumentos serão construídos pelo sujeito (DRIJVERS *et al.*, 2013).

Considerando os esquemas de ação instrumentada e a relação entre artefato e instrumento, apresentamos uma representação (Figura 7) baseada no que Guin e Trouche (1999) propõem.



Fonte: Adaptada de Guin e Trouche (1999).

Para Trouche (2000; 2005), os esquemas de ação instrumentada, referentes à parte implícita na ação do sujeito, são desenvolvidos durante as situações que envolvem o uso de um artefato. Trouche (2005) discute que os esquemas de ação instrumentada são formados por invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) e esquemas de uso (atividades relacionadas ao uso do artefato).

¹ Conforme Rabardel (1995), os esquemas de utilização são definidos por dois níveis: de uso e de ação instrumentada. Os esquemas de uso são relacionados a tarefas secundárias correspondentes às ações e atividades específicas, ligadas diretamente ao uso ou funcionamento do artefato (RABARDEL, 1995; 2002). Ainda, os esquemas de ação instrumentada (mediada por instrumentos) são referentes às tarefas primárias, ligadas ao objeto, e com o objetivo de realizar transformações no objeto da atividade (RABARDEL, 1995; 2002).

Para descrever o que são os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, Trouche (2005) toma como base o que Vergnaud (1996) discute. Nesse sentido, os invariantes operatórios são o “[...] conhecimento implícito contido nos esquemas, que podem ser conceitos-em-ação, ou seja, conceitos considerados implicitamente relevantes e teoremas-em-ação, [...] proposições consideradas verdadeiras” (TROUCHE, 2005, p. 152, tradução nossa).

Considerando o que Rabardel discute, Drijvers *et al.* (2010, p. 108, tradução nossa), olhando para a relação entre o sujeito e artefato, propõem que “Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa”. Nesse sentido, para os autores, o instrumento é constituído também pelas técnicas.

O processo, contínuo e demorado, em que um artefato se torna um instrumento para o sujeito, é conhecido como gênese instrumental (RABARDEL, 2002; DRIJVERS *et al.*, 2013).

A dialética instrumentação-instrumentalização aborda as duas dimensões da gênese instrumental e olha para a relação entre artefato e sujeito que desenvolve esquemas e enriquece o artefato (DRIJVERS *et al.*, 2013).

De acordo com Rabardel (2002) e Drijvers *et al.* (2013), a instrumentação refere-se a como o pensamento e ações do sujeito podem ser afetados e moldados pelo artefato. Também, o processo de instrumentalização refere-se a como o pensamento e o conhecimento do usuário podem moldar e dirigir o uso do artefato (RABARDEL, 2002; DRIJVERS *et al.* 2013).

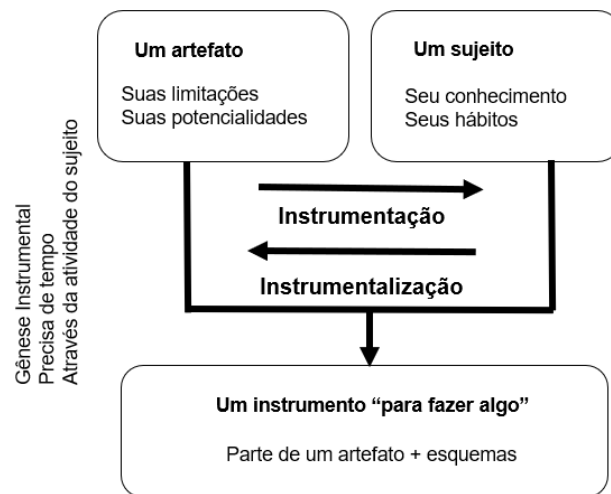
Drijvers *et al.* (2013, p. 26, tradução nossa), apoiando-se em Hoyles e Noss (2003), discutem que “a dupla natureza da instrumentação e da instrumentalização, na gênese instrumental, resume-se ao fato de o pensamento do aluno ser moldado pelo artefato, mas também moldar o artefato”.

Como exemplo, Drijvers *et al.* (2013, p. 26, tradução nossa, grifo dos autores), apoiando-se em Drijvers (2003) e Trouche e Drijvers (2010), apresentam o seguinte exemplo:

Se tomarmos a calculadora gráfica como um artefato exemplar, sua opção de menu “Calcular Interseção” resolve equações calculando as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos. Por um lado, isso orienta o pensamento dos alunos para ver as soluções como pontos de interseção (instrumentação). Se, por outro lado, um aluno programa a calculadora para que ela dê soluções em formas exatas e radicais, isso seria um exemplo de instrumentalização.

Assim, pode-se observar que instrumentalização e instrumentação são entrelaçadas, como discute Trouche (2018), mas para diferenciá-las, de acordo com Rabardel (1995, p. 12-13, tradução nossa), na “instrumentação, a atividade está direcionada para o sujeito”; e na “instrumentalização, a atividade é orientada para o componente artefato do instrumento”, como pode ser observado na figura 8.

Figura 8 - De artefato para instrumento



Fonte: Trouche (2005, p. 144, tradução nossa).

Dessa forma, ao integrar o uso de tecnologias digitais durante o desenvolvimento de tarefas matemáticas, é preciso atenção às várias e complexas dimensões que estão presentes nesse processo.

Na seção a seguir, apresentamos o contexto e os pressupostos metodológicos da pesquisa.

4.3 Contexto e pressupostos metodológicos

Este trabalho faz parte de uma pesquisa de mestrado, e a intervenção descrita aqui é associada a um projeto de extensão, Universidade Sem Fronteiras¹ (USF), no qual a primeira autora desta pesquisa atuou, juntamente com mais quatro alunos da graduação em Licenciatura em Matemática. Ambos, projeto de extensão do USF e pesquisa de mestrado, têm relação com a proposta de construção de cenários animados no software GeoGebra por alunos da Educação Básica.

Considerando a colaboração entre os integrantes do projeto USF e uma colega de mestrado, foram formadas equipes assistentes (EA) e foram desenvolvidos nove encontros² para propor a construção de cenários animados a alunos de uma turma do 8º ano do Ensino

¹ O projeto intitulado “desenvolvimento de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio com indicativo de altas habilidades/superdotação e a construção de cenários animados no software GeoGebra” previa que fossem propostas as construções de cenários animados a esses alunos em particular.

² Tínhamos um parecer favorável do comitê de ética para a realização dos encontros e o termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelos responsáveis pelos alunos.

Fundamental¹ de uma escola, no interior do Paraná - Brasil, que funciona no mesmo prédio da UNESPAR *campus* União da Vitória.

Os cenários animados são construções no GeoGebra que podem representar diferentes situações, reais ou não, e envolver personagens, caso o usuário deseje. Ao final, o conteúdo ou objetos matemáticos usados durante/para a construção não precisam ser exibidos. Para que a construção se constitua como um cenário animado, é necessário que a cena tenha movimento e que não haja interferência do usuário sobre ela, além de clicar nos botões ou colocar o controle deslizante para animar.

Os encontros com os alunos eram semanais, com duração de duas horas/aula (1h40min), e aconteciam em dois laboratórios de informática da universidade. Cada aluno teve um computador ou notebook à sua disposição para realizar as construções, mas eram incentivados a colaborar com os colegas. Os alunos tinham as mesmas condições para desenvolver a construção dos cenários animados. As telas dos computadores/notebooks foram gravadas em vídeo e algumas em áudio e vídeo durante os encontros. Em ambos os ambientes, as construções e encaminhamentos das aulas em cada espaço eram semelhantes.

O principal conteúdo abordado por meio das construções dos cenários animados nesta pesquisa foi função afim. Esse é um conteúdo previsto para ser estudado no 9º ano do Ensino Fundamental (PARANÁ 2021; BRASIL, 2018). Entretanto, as pesquisadoras tinham a intenção de propor tais construções a alunos que ainda não tivessem estudado formalmente sobre o conteúdo nas aulas de Matemática, mas que já tivessem algum desenvolvimento no campo da álgebra. Então, foi determinado que as construções dos cenários animados deveriam ser propostas aos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Inicialmente, foi proposta a construção do cenário animado *Barco e chuva* para os alunos se ambientarem com as construções (1º e 2º encontro). Em seguida, foi proposta a construção do cenário *A Princesa e o Sapo*, que aborda especificamente a função afim e função por partes (2º, 3º, 4º, 5º e 6º encontro). Durante a construção desse segundo cenário animado, os alunos tiveram o primeiro contato com a função afim. Depois, os alunos construíram o cenário animado *Abelha* (6º e 7º encontro), que também aborda a função afim e função por partes. Após, foi solicitado aos alunos que, tomando como base a construção do cenário animado *Abelha*, respondessem algumas questões sobre as características da função afim (8º encontro). Por fim, quando os alunos já haviam construído dois cenários animados utilizando o conteúdo de função afim, foi proposto que eles construíssem um cenário animado próprio, de

¹ Os alunos desse nível escolar têm, em média, 13 anos de idade.

forma que criassem suas próprias cenas animadas (9º encontro) utilizando o conteúdo abordado. Foram mostrados aos alunos outros cenários animados, além dos que construíram nos encontros anteriores, para inspirá-los a fazer a sua versão. Foi avisado aos alunos que os professores estariam disponíveis o tempo todo para auxiliá-los durante o processo de construção.

Dentre os materiais produzidos pelos alunos da turma, ao construírem seus próprios cenários animados, levamos em consideração, inicialmente, a participação durante as aulas e as anotações/relatos dos integrantes das EA que estavam em cada ambiente para selecionar o episódio descrito neste artigo. Além disso, foi dada preferência para as gravações das telas dos computadores dos alunos que eram compostas por imagem e áudio.

Considerando que 20 alunos compareceram no nono encontro e construíram o cenário animado, optamos por analisar a construção de um aluno apenas, Tiago¹, porque ele desenvolveu grande parte da construção do cenário sozinho, solicitando ajuda apenas em alguns momentos². Nesse sentido, houve pouca interferência dos integrantes da EA durante a construção.

Tiago, tomando como inspiração o cenário animado *Balão*, que foi mostrado aos alunos no início da aula, construiu seu cenário e dispôs-se a apresentá-lo aos colegas. Em momento posterior às intervenções, o aluno também apresentou sua construção para duas professoras da Educação Básica³. Utilizamos esses dados também nas análises.

Para que as análises fossem focadas em cada etapa da construção, na seção a seguir é apresentado o que o aluno desenvolveu em seu computador⁴, e em seguida, as discussões que ocorreram no momento de sua(s) apresentação(ões). Nesse sentido, a sequência apresentada na próxima seção não é linear, pois intercala construção e apresentação(ões).

Na seção das análises, além dos excertos das aulas, também disponibilizamos recortes (em formato de vídeos) da gravação da tela do computador usado pelo aluno durante a construção do cenário animado *Balão*. Para acessar os vídeos sobre as situações descritas no decorrer do texto, além do link com nota de rodapé, eles foram inseridos no corpo do texto⁵

¹ O nome do aluno é fictício para preservar sua identidade.

² Esse aluno ficava no Laboratório de Informática do curso de Licenciatura em Matemática (LIM), e nenhuma das autoras deste trabalho fazia parte da EA que atendia o aluno. Quem conduziu os encontros com os alunos do LIM foram: P. Clara, colega de mestrado, P. Bianca e P. Eduardo, ambos integrantes do USF.

³ As duas professoras em questão estavam participando de um curso sobre a construção de cenários animados que estava sendo promovido no âmbito do projeto de extensão USF.

⁴ Os alunos que ficaram no LIM haviam construído os cenários animados anteriores usando a versão 6.0 do GeoGebra, mas devido a alguns problemas técnicos, ele foi substituído pela versão 5.0.

⁵ Os vídeos sobre as situações descritas no decorrer do texto podem ser acessados pelo link colocado como nota de rodapé, ou clicando sobre a imagem correspondente, que abrirá uma janela na tela ou uma nova guia/aba no navegador que, se o equipamento utilizado durante a leitura do texto estiver conectado à internet, reproduzirá o vídeo.

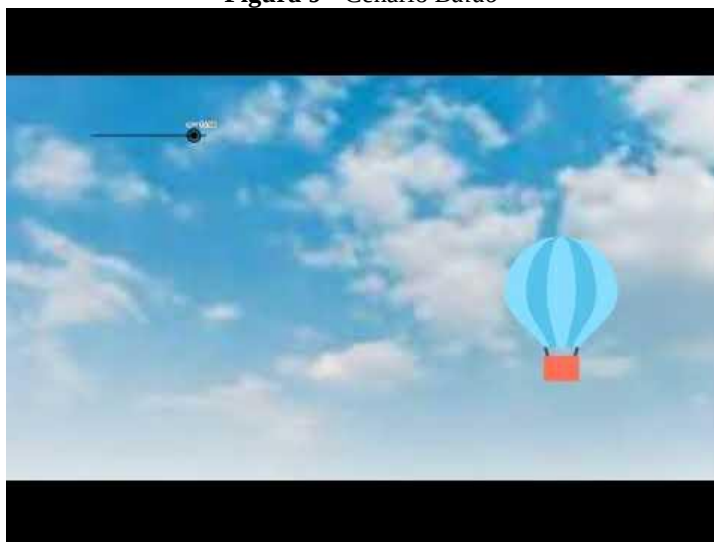
como figuras. Para não identificar o aluno, o áudio dos vídeos que estão disponíveis neste trabalho foi retirado.

Na seção a seguir, apresentamos a construção e apresentação do cenário *Balão*, desenvolvido por Tiago, e buscamos identificar os dois processos dialéticos (artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização).

4.4 Análise da construção do cenário Balão

Depois que os professores da EA explicaram aos alunos o que eles deveriam fazer, mostraram exemplos de outros cenários animados, não construídos durante os encontros. Nesse momento, a parte matemática não foi mostrada aos alunos, apenas a cena final, como na Figura 3¹.

Figura 9 - Cenário Balão²



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Tiago deu início à construção da sua versão do cenário animado *Balão*³. Esse cenário em questão consiste em um balão que sobe, sobrevoa e retorna ao chão.

4.4.1 Construindo a base do percurso do balão

Tiago iniciou a construção criando o trajeto que o balão percorre. Considerando que o balão deveria subir, ele digitou, na caixa de entrada, a função $f(x) = 5x$, e observou que ela

¹ Ao clicar sobre a figura, é dado acesso ao vídeo da tela do aluno.

² O vídeo pode ser acessado em: <https://youtu.be/23yWU4wmHdM>.

³ A construção pode ser vista em: <https://www.geogebra.org/m/zy3rw2d8>.

fica com a inclinação para o lado que ele desejava, mas para mudar um pouco a inclinação, passou a alterar o valor da taxa de variação¹ da função, sem alterar o seu sinal, e observou o que aconteceu. Ele mudou o 5 para 6, 1, 2, e apertou *Enter*.

Por meio dessas ações, identificamos o teorema-em-ação: se o valor que digito na frente do x na lei de formação da função afim for positivo, então a representação gráfica da função terá inclinação entre 0° e 90° com o eixo x , pois a taxa de crescimento é positiva, os conceitos-em-ação: gráfico da função e números inteiros. Tiago chamou a P. Clara para mostrar o que construiu.

Tiago: *Eu criei uma função aqui, ó, professora.*

P. Clara: *Qual é a característica dessa função?*

Tiago: *A função é $f(x)$, o coeficiente angular é o 2, [...] e o linear é quando tem tipo +10, que vai alterar ele [gráfico da função] no plano.*

Para complementar sua resposta, o aluno alterou, na janela de álgebra, a lei de formação da função, adicionando o valor 12 como coeficiente linear. Em seguida, Tiago relatou que *ele* [gráfico da função] *mudou de lugar*, ou seja, não estava passando pelo ponto (0,0). Nesse caso, identificamos o teorema-em-ação: se adiciono um valor na lei de formação da função afim, então o gráfico não cruza a origem do plano cartesiano e os conceitos-em-ação: gráfico da função, coeficiente linear e plano cartesiano, que fazem parte do esquema de ação instrumentada.

Para que, em uma parte do percurso, o balão sobrevoe após subir, o aluno digitou outra função na caixa de entrada, $j(x) = 0$. Em seguida, ainda na caixa de entrada, ele fez alterações no valor da constante, mudando 0 para 1, 2, 3 e 8 e apertou *Enter*. Enquanto o aluno estava alterando o valor, observou as alterações da representação gráfica da função na tela.

Ao selecionar e alterar apenas valores numéricos para a constante na lei de formação da função afim, identificamos o teorema-em-ação: se digito a lei de formação da função com um valor numérico apenas, o gráfico fica paralelo ou coincidente com o eixo x ; e o conceito-em-ação: gráfico da função.

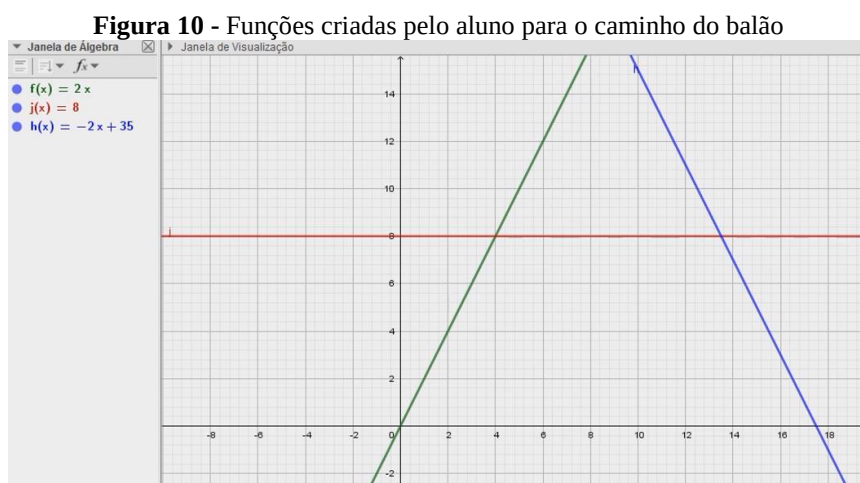
Para construir um caminho para o balão descer, Tiago digitou outra função na caixa de entrada, $h(x) = -5x + 10$, também faz alterações da lei de formação da função na caixa de entrada. Inicialmente, mudou o valor do coeficiente linear de 10 para 100, e depois, 60. Então,

¹ Considerando a função afim $f(x)=ax+b$, o elemento a na lei de formação da função pode ser denominado, neste artigo, como taxa de variação ou coeficiente angular.

mudou a taxa de variação -5 para -2. Em seguida, alterou novamente o valor do coeficiente linear 60 para 40, depois 35, e apertou *Enter*.

Nessas ações do aluno, identificamos o teorema-em-ação: se digito um valor negativo na frente do x na lei de formação da função afim, então a representação gráfica da função terá inclinação entre 90° e 180° com o eixo x , pois a taxa de crescimento é negativa; se adiciono e altero o valor junto na lei de formação da função afim, a representação gráfica se desloca no sentido vertical. Foram identificados os conceitos-em-ação: gráfico da função, coeficiente angular, números inteiros, coeficiente linear e eixo y .

Na Figura 10 está a *base do trajeto* construído pelo aluno para o balão percorrer.



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

No momento em que Tiago apresentou sua construção aos demais, P. Clara solicitou que ele explicasse que tipos de função usou.

Tiago: Eu usei três funções $f(x)$, $j(x)$ e $h(x)$.

P. Clara: Qual é o comportamento dessas funções? Por que você escolheu elas?
Porque uma sobe [função afim caracterizada como crescente], outra anda reto [função afim constante] e a outra vai para baixo [função afim caracterizada como decrescente].

Gabriel: Crescente, decrescente.

Tiago: E reta.

P. Clara: Essa reta tem um outro nome.

Tiago: É horizontal.

P. Clara: Tem outro nome. Uma é crescente, a outra é decrescente e a outra é?

Tiago: Constante!

Esse excerto indica que Tiago relaciona a representação gráfica de cada uma das funções com o que precisava para formar a base do trajeto para o balão percorrer. Embora ele não cite

cada função com o nome correto, explica o comportamento de cada uma, e com as intervenções do colega Gabriel e da P. Clara, são nomeadas corretamente.

Em seguida, ocorreu a seguinte discussão:

- P. Clara:** *Isso aí, ela é constante. Por quê? Lembram?*
Tiago: *Porque ela não muda de ... fica na mesma altura.*
P. Clara: *E essa altura é em relação ao eixo x ou a y ?*
Tiago: *y !*

Tiago revela que compreendeu como se comporta a posição da representação gráfica da função constante no plano. Assim, identificamos o teorema-em-ação: o valor que digito na lei de formação da função constante indica a posição que a representação gráfica da função intercepta o eixo y ; além dos conceitos-em-ação: gráfico da função, função constante e eixo y .

Após, P. Clara questionou Tiago:

- P. Clara:** *Pensando nas funções que você fez, qual é a lei de formação da função crescente?*
Tiago: *Da crescente é $f(x)=2x$.*

Para verificar se o aluno também estabelece relação entre o coeficiente linear da função afim e sua interferência na representação gráfica, a discussão continuou.

- P. Clara:** *E se você colocasse $f(x)=2x$ mais alguma coisa, o que vai mudar?*
Tiago: *Ia mudar a posição em relação a [eixo] x e a [eixo] y .*
P. Clara: *[...] e se colocasse $f(x)=2x+2$, o que esse 2 iria interferir no gráfico?*
Tiago: *Iria mudar a reta.*
P. Clara: *Mas para que número [posição] ele [gráfico] iria?*
Tiago: *Para 2.*
P. Clara: *Em relação a [eixo] x e a [eixo] y ?*
Tiago: *[...] y .*

Portanto, Tiago estabelece relação entre a representação gráfica e algébrica da função afim, além de indicar que posição, em relação ao eixo y , o gráfico da função iria ficar, caso fosse adicionado um valor na lei de formação. Assim, identificamos o teorema-em-ação: o valor que adiciono na lei de formação da função afim indica em que posição o gráfico intercepta o eixo y ; e os conceitos-em-ação: coeficiente linear, gráfico da função e eixo y .

Para verificar se o aluno faz distinção entre a função afim caracterizada como crescente e a decrescente, P. Clara perguntou:

P. Clara: *E se a função f fosse decrescente, o que ia mudar?*
Tiago: *Isso aqui [coloca o sinal negativo na frente do 2], o menos.*

Portanto, ele sabe que o valor do número junto com o x deve ser negativo na função afim decrescente.

Nesse processo de construção desenvolvido pelo aluno, também identificamos esquemas de uso, como usar a caixa de entrada para digitar a lei de formação de cada função e fazer alterações quando necessário. Assim, Tiago sabe o que digitar na caixa de entrada do GeoGebra para construir os gráficos que compõem o caminho que o balão percorrerá e como realizar essas ações no software.

A partir dos teoremas-em-ação, dos conceitos-em-ação e esquemas de uso, identificamos que o aluno, ao digitar a lei de formação da função na caixa de entrada, observa a representação gráfica de cada função na janela de visualização e faz relação com o que foi digitado. Nesse sentido, o aluno manifesta conhecer os recursos do software para que a construção seja desenvolvida. Assim, no quadro 14, indicamos as ações do aluno relacionadas à instrumentação e a instrumentalização.

Quadro 14 - Relação entre instrumentação-instrumentalização na construção do caminho do balão

Ações do aluno relacionadas à instrumentalização	Ações do aluno relacionadas à instrumentação
Reconhece que não existe a ferramenta função, mas é necessário digitar a lei de formação na caixa de entrada.	Insere a lei de formação de cada função na caixa de entrada para formar a base do percurso do balão.
Sabe como fazer alterações na lei de formação da função, tanto na caixa de entrada como na janela de álgebra.	Altera os valores na lei de formação de cada função afim, quando necessário.
Percebe que o software retorna a representação gráfica da função na janela de visualização e a representação algébrica na janela de álgebra.	Interpreta a representação gráfica e algébrica da função, ambas fornecidas pelo software, e estabelece relação entre elas.

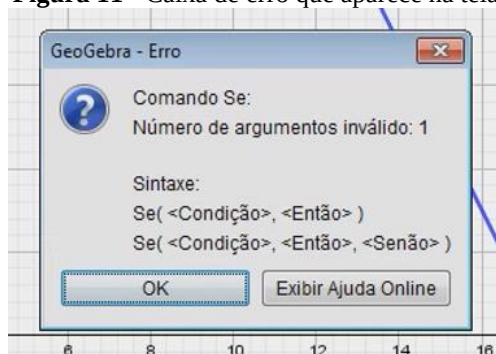
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Para cada ação relacionada à instrumentalização, identificamos ações relacionadas à instrumentação. Então, é possível estabelecer a relação entre o aluno e o GeoGebra, bem como a manifestação de conhecimentos matemáticos relacionados à função afim constante, crescente e decrescente, e os elementos que compõem a lei de formação dessas funções, como taxa de variação e coeficiente linear. Como o aluno desenvolveu a construção empregando técnicas no software e desenvolvendo esquemas, compreendemos que o GeoGebra é um instrumento (I_1) para a construção do caminho que o balão percorrerá.

4.4.2 Restringindo o percurso do balão

Para limitar o caminho que o balão percorrerá, ou seja, restringir o domínio de cada uma das funções, Tiago digitou *Se* na caixa de entrada e selecionou a opção *Se(<Condição>, <Então>)*. Tiago digitou *Se(16<x<10)*, clicou em *Enter* e apareceu uma caixa de erro na tela, como na Figura 11.

Figura 11 - Caixa de erro que aparece na tela



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Nesse caso, o aluno cometeu dois equívocos. Um deles em relação ao intervalo digitado, pois indica que será considerado entre valores menores que 10 e maiores que 16; logo, não há valores de intersecção dentro desse intervalo. O segundo em relação ao uso do comando, porque o aluno digitou apenas o intervalo, na *condição*, e não indicou, em *então*, a qual elemento deve ser aplicada essa condição. Nesse sentido, há erro matemático e erro ao usar o comando disponível no software.

Em seguida, como o aluno digitou outros intervalos errados e não completou a estrutura do comando, a caixa de erro voltou a aparecer na tela. Tiago, sem conseguir solucionar o problema, solicitou ajuda de P. Clara.

- Tiago:** *Como que faz esse comando aqui, condição, então? Eu quero restringir aqui [gráfico da função], então eu vou delimitar ela [função]. Vou colocar um valor na condição.*
- P. Clara:** *É o intervalo onde você quer que ela [gráfico da função] apareça. [...]*
- P. Clara:** *Faça como você acha.*

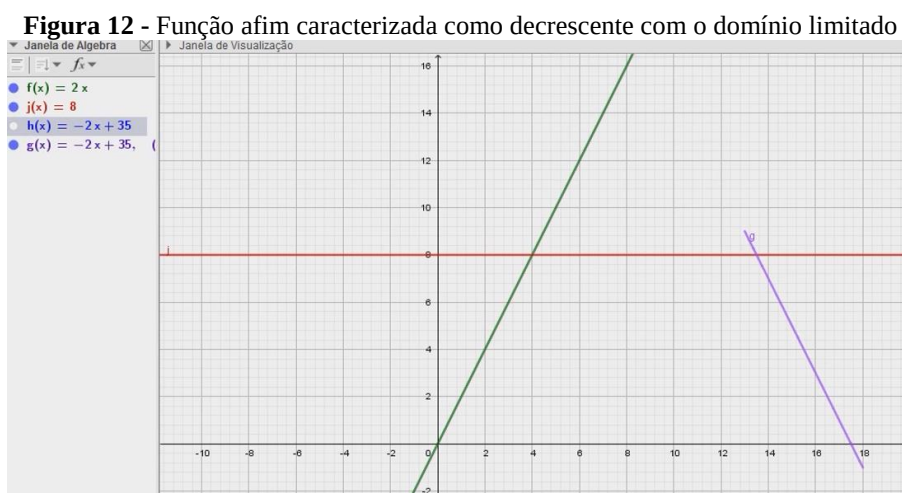
Tiago digitou *Se(13<x<18)*, clicou em *Enter*, e a caixa de erro surgiu na tela. P. Clara explicou:

- P. Clara:** *Olha, você colocou o intervalo, mas você esqueceu de indicar qual função você quer nesse intervalo.*
- Tiago:** *Ah! Vírgula h(x).*

Em seguida, Tiago digitou $Se(13 < x < 18, h(x))$, e clicou em *Enter*. O software criou outra função, g , com a mesma lei de formação da função h , mas com o domínio sendo o intervalo real indicado na condição.

Nessa situação, identificamos o teorema-em-ação: se uso o comando $Se(<Condição>, <Então>)$ no GeoGebra como condição, devo indicar um intervalo para o gráfico da função, e no então, devo indicar à qual função considero esse intervalo. Com relação aos conceitos-em-ação identificamos gráfico da função e intervalos.

No entanto, como pode ser observado na Figura 12, o gráfico da nova função, g , ficou com intervalo maior que o necessário para formar o percurso do balão.



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

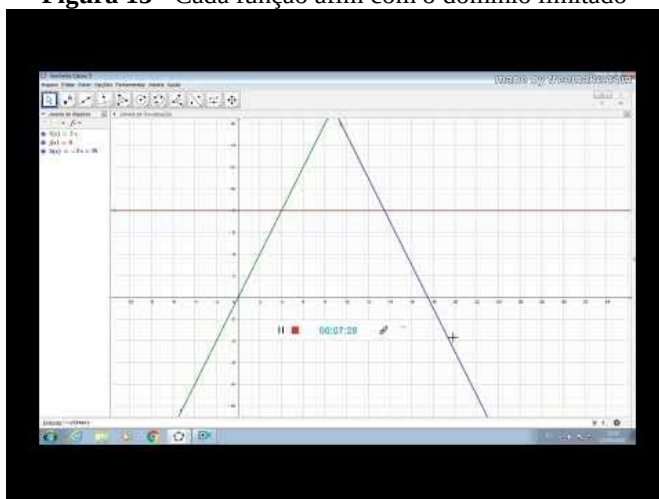
Para solucionar esse problema, o aluno clicou sobre a função g na janela de álgebra, e fazendo alterações nos valores do intervalo, redefiniu o domínio da função, até que o gráfico estivesse conforme ele desejava.

Sem ajuda, ele fez o mesmo processo para restringir o domínio da função afim caracterizada como crescente. O aluno digitou corretamente o intervalo para a função constante. Tiago deixou a função afim caracterizada como crescente com domínio real $(0,4)$ ¹; e a constante, com domínio real $(4,13.5)$. O software criou as funções p e q , respectivamente (Figura 13)².

¹ Segundo Lima *et al.* (2006), considerando os números reais a e b , tal que $a \leq b$, tem-se: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou (a, b) é aberto.

² Ao clicar sobre a figura, é dado acesso ao vídeo da tela do aluno.

Figura 13 - Cada função afim com o domínio limitado¹



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Nessa situação, identificamos outros teoremas-em-ação, como: o menor valor que digito no intervalo indica a posição que a representação gráfica da função inicia, considerando a reta numérica da esquerda para a direita; o maior valor que digito no intervalo indica a posição em que o gráfico da função termina, também considerando a reta numérica da esquerda para a direita. Os conceitos-em-ação presentes são: gráfico da função, reta numérica e intervalo.

Na apresentação, P. Clara perguntou a Tiago:

P. Clara: *A função é infinita. O que você fez para restringir [o gráfico]?*

Tiago: *Aquele comando Se, condição, então. Na condição, os números.*

P. Clara: *Que números são esses?*

Tiago: *Para delimitar a função.*

No excerto acima, Tiago explicou aos demais que, para restringir a representação gráfica de cada uma das funções, usou um comando disponível no software, e que na condição, colocou números, referindo-se aos intervalos.

Nessa situação, inicialmente mobilizando esquemas de uso, o aluno recordava o comando que deveria digitar na caixa de entrada do GeoGebra para limitar a representação gráfica de cada função e, assim, constituir o percurso do balão. No entanto, não conseguia completá-lo. Somente após o auxílio de P. Clara conseguiu concluir essa etapa da construção.

Quando o aluno foi apresentar a construção às duas professoras que faziam um curso no âmbito do projeto USF, depois de construir cada função para compor o caminho, ele propôs

¹ O vídeo pode ser acessado em: <https://youtu.be/auaSIwNEjF4>.

uma forma diferente para delimitar o domínio das funções, como pode ser observado no excerto abaixo.

Tiago: *A gente quer restringir o domínio das funções, ou seja, aqui eles [gráficos] são infinitos, e a gente quer diminuir eles [gráficos] [...]. Dá para fazer de outro jeito [não somente com o comando Se]. É assim, você vai criar [digitar na caixa de entrada] uma nova função, $o(x)$. Vai colocar igual. Você vai escrever [digitar] o comando função [na caixa de entrada]. O GeoGebra já tem várias opções. Essa aqui [aponta na tela], “função, valor de x inicial. valor de x final”. Aqui [no comando], você vai por $(f(x), -9, -4)$, e pode clicar em Enter.*

O comando indicado pelo aluno para limitar a representação gráfica da função f ficou da seguinte forma: $o(x)=função(f(x), -9, -4)$. Em seguida, Tiago pediu para desabilitar a função f na janela de álgebra para que elas pudessem ver a representação gráfica da função $o(x)$.

Por meio dos teoremas-em-ação, dos conceitos-em-ação e esquemas de uso nessa etapa da construção em que Tiago limita a representação gráfica da função, identificamos que aluno, ao digitar o comando *Se* na caixa de entrada, indicou um intervalo para cada função e, ao observar a representação gráfica na janela de visualização, fez os ajustes necessários para formar o caminho que o balão percorreria. Nesse sentido, o aluno manifesta conhecimentos sobre os comandos disponíveis no software para que essa etapa da construção seja desenvolvida. Assim, no quadro 15, indicamos as ações do aluno relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

Quadro 15 - Relação entre instrumentação-instrumentalização na delimitação do caminho do balão

Ações do aluno relacionadas à instrumentalização	Ações do aluno relacionadas à instrumentação
Compreende que, no GeoGebra, não existe uma ferramenta pronta para limitar a representação gráfica da função, mas sabe qual comando deve digitar na caixa de entrada, embora precise de ajuda para finalizá-lo inicialmente.	Seleciona o comando <i>Se</i> (<Condição>, <Então>) na caixa de entrada e digita os elementos no comando, como intervalo, usando símbolos e notações matemáticas.
Tem conhecimento de que é possível fazer alterações no intervalo usando tanto a caixa de entrada como a janela de álgebra.	Altera os valores de máximo e mínimo do intervalo no comando, na janela de álgebra, para que a representação gráfica, na janela de visualização, seja ajustada, quando necessário.
Tem conhecimentos de outros comandos disponíveis no software para restringir o domínio de cada função.	Seleciona o comando <i>Função</i> (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>) na caixa de entrada e digita os elementos no comando, usando números e notações matemáticas.

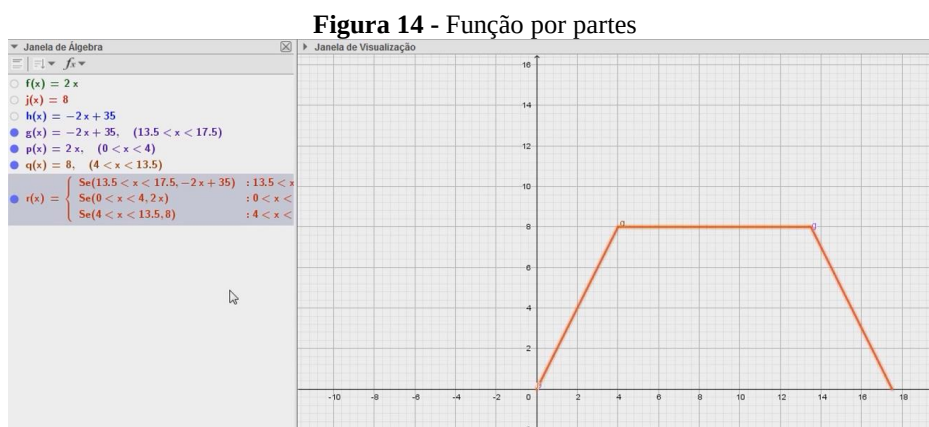
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Novamente são estabelecidas relações entre o aluno e o GeoGebra, visto que Tiago mobiliza seus conhecimentos sobre os recursos do software para realizar essa etapa da

construção no seu cenário próprio. Além disso, Tiago manifesta conhecimentos matemáticos relacionados ao domínio de função. Nesse caso, compreendemos que, para o aluno, o GeoGebra é um instrumento (I_2) para restringir o caminho que o balão percorrerá, pois nesse processo, ele emprega técnicas no software e desenvolve esquemas.

4.4.3 Unindo as partes do percurso do balão

Na construção, depois de limitar o domínio de cada função, Tiago destacou: *eu vou ter que transformar tudo aqui* [gráficos das funções com os domínios restringidos] *em uma* [função] *só*, ou seja, um único caminho. Para isso, ele digitou, na caixa de entrada do GeoGebra, o comando *Se*($13.5 < x < 17.5$, $g(x)$, $0 < x < 4$, $p(x)$, $4 < x < 13.5$, $q(x)$) e clicou em *Enter*. Esse comando gerou uma função por partes r (Figura 14).



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Nessas ações do aluno, em que ele cria uma função por partes, identificamos o esquema de uso: usar o comando na caixa de entrada; o teorema-em-ação: se digito em um único comando cada intervalo seguido da função, a representação gráfica é formada pela união de partes das funções; e os conceitos-em-ação: gráfico da função e intervalo.

Na apresentação, P. Clara questionou:

P. Clara: A função r é crescente, decrescente ou constante?

Tiago: Ela é [formada por] todas juntas.

P. Clara: Uma parte ela [função] é crescente.

Tiago: Outra constante e outra decrescente.

Por meio da resposta do aluno, também identificamos o teorema-em-ação: se digito no comando mais de uma função, o gráfico será formado por partes de funções, e não tem apenas um comportamento; e os conceitos-em-ação: gráfico da função, função por partes, função

crescente, função decrescente e função constante. Ambos fazem parte dos esquemas de ação instrumentada.

Nesse episódio, a partir dos teoremas-em-ação, conceitos-em-ação e esquema de uso, identificamos que Tiago, ao usar o comando *Se* na caixa de entrada para unir as representações gráficas das funções em uma única função, digitou o intervalo seguido do nome dado à função, e observou a representação gráfica gerada pelo software a partir do comando. Nesse sentido, o aluno manifesta, novamente, conhecimentos sobre o comando disponível no GeoGebra para poder construir essa etapa da construção do cenário. Assim, indicamos, no quadro 16, as ações do aluno relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

Quadro 16 - Relação entre instrumentação-instrumentalização na união do caminho do balão

Ações do aluno relacionadas à instrumentalização	Ações do aluno relacionadas à instrumentação
Sabe que, no GeoGebra, não existe uma ferramenta pronta para unir as três funções, mas é necessário digitar um comando na caixa de entrada.	Seleciona o comando <i>Se</i> , na caixa de entrada, e digita o intervalo correspondente a cada função afim, usando símbolos e notações matemáticas para formar a função por partes.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Como o aluno mobiliza seus conhecimentos matemáticos e sobre o software para realizar essa etapa da construção, compreendemos que, para Tiago, o GeoGebra é um instrumento (I_3) para a unir o caminho que o balão irá percorrer, visto que, nesse processo, ele emprega técnicas no GeoGebra e desenvolve esquemas.

4.4.4 Animação do balão

Durante a construção em seu computador, Tiago buscou na internet uma figura de um balão e a salvou. Em seguida, ele inseriu-a na janela de visualização, usando a ferramenta *Inserir Imagem* disponível no software.

Nessas ações, identificamos, no Quadro 17, relações com a instrumentação e a instrumentalização.

Quadro 17 - Relação entre instrumentação-instrumentalização ao inserir a figura do balão

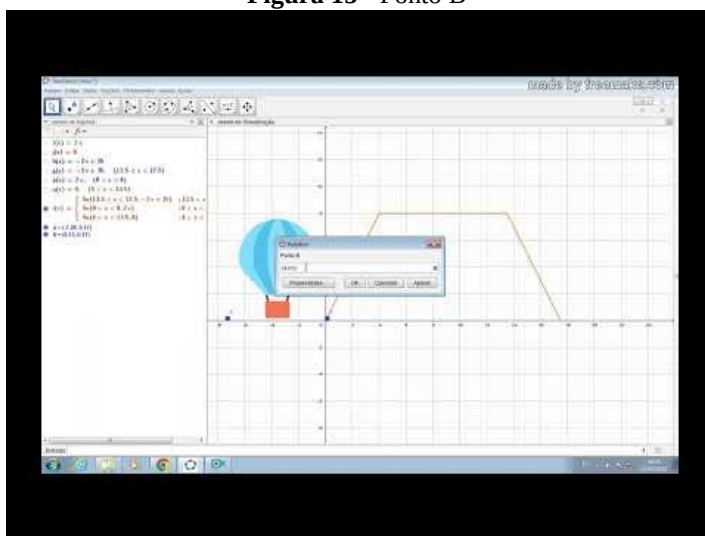
Ações do aluno relacionadas à instrumentalização	Ações do aluno relacionadas à instrumentação
Tem conhecimento sobre os recursos e ferramentas do software para inserir a figura do balão na janela de visualização.	Seleciona a ferramenta <i>Inserir Imagem</i> e insere a figura do balão no plano.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

A figura do balão fica atrelada a dois pontos, A e B. Para que os pontos da figura fossem conectados com a função por partes r , Tiago deu dois cliques rápidos com o mouse sobre o ponto B, e abriu-se uma caixa na tela. Em seguida, ele redefiniu as coordenadas de B, digitando $(a, r(x))$, mas não clicou *Enter*.

Tiago relatou para a P. Clara: *professora, eu coloco $(a, r(a))$ para o ponto [B] pertencer a função, né? Aqui, ó* [aponta para a função por partes r]. Em seguida, ele muda as coordenadas do ponto B, para $(a, r(a))$ e clica em *Enter* (Figura 15)¹.

Figura 15 - Ponto B²



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Como o aluno associa ponto, controle deslizante e função, identificamos o esquema de uso: alterar as coordenadas do ponto usando a janela de álgebra; o teorema-em-ação: se altero as coordenadas do ponto B para $(a, r(a))$ e movimento o controle deslizante, o ponto se move sobre a representação gráfica da função r ; e os conceitos-em-ação: ponto e gráfico da função.

Como a é uma variável e o aluno ainda não havia criado esse objeto na construção, o GeoGebra sugere criar um controle deslizante a . O aluno aceitou a sugestão (Figura 15).

O software cria o controle deslizante padrão com valor de mínimo -5 e máximo 5. Como a função r estava definida dentro do intervalo $(0, 17.5)$, quando Tiago animou o controle deslizante, em alguns momentos, o ponto B e a figura do balão sumiram na janela de visualização. Então, ele deixou o controle deslizante a posicionado em um valor que a figura do balão e o ponto B aparecessem na tela.

¹ Ao clicar sobre a figura, é dado acesso ao vídeo da tela do aluno.

² O vídeo pode ser acessado em: <https://youtu.be/UuvBT5owwSA>.

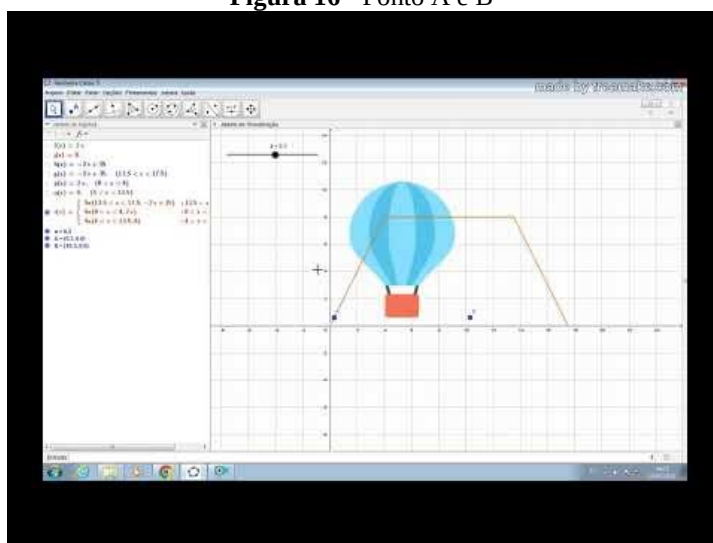
Em seguida, para configurar as coordenadas do ponto A, que também interfere na posição da figura do balão no plano, ele relatou:

Tiago: Agora eu pego esse [ponto A] e faço a mesma coisa.

P. Clara: Será que é bem a mesma coisa?

Tiago realizou o mesmo procedimento para redefinir as coordenadas do ponto A, deixando como $(a, r(a))$, clicou *Enter* e a figura sumiu da tela (Figura 16)¹.

Figura 16 - Ponto A e B²



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Nessa situação, identificamos o teorema-em-ação: se digito as mesmas coordenadas em dois pontos, eles ficam sobrepostos, e então, a figura some. Os conceitos-em-ação identificados são pontos e pontos sobrepostos.

Então ele lembrou: *Ah, mas eu tenho que adicionar um valor ali* [junto à coordenada x do ponto B].

Ele clicou duas vezes sobre o ponto B novamente, alterou suas coordenadas x para $a+10$ e clicou *Enter*. A figura voltou a aparecer na tela. Tiago alterou novamente as coordenadas x do ponto B, deixando $a-10$, clicou *Enter* e a figura do balão ficou invertida, de *ponta cabeça*. Então, para arrumar a figura na tela, ele redefiniu a coordenada x do ponto B, mudando para $a+5$, e clicou *Enter*. A figura ficou na posição correta e com tamanho adequado (Figura 16).

Quando Tiago deixou a figura do balão aparecendo na tela e conectada à função por partes, identificamos o esquema de uso: alterar as coordenadas do ponto usando a janela de

¹ Ao clicar sobre a figura, é dado acesso ao vídeo da tela do aluno.

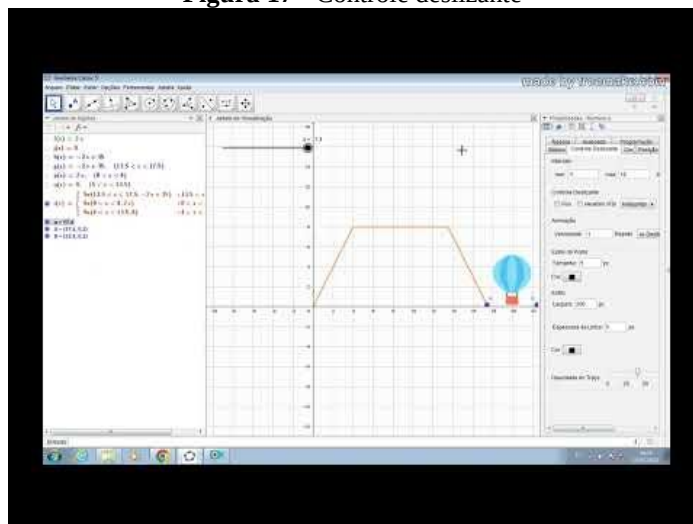
² O vídeo pode ser acessado em: https://youtu.be/IVIX_eFuBRI.

álgebra; e os teoremas-em-ação: se quero que a figura seja exibida na tela, devo deixar uma distância entre os pontos atrelados a ela; se adiciono um valor positivo junto à coordenada x do ponto B, ele fica à direita do ponto A; se adiciono um valor negativo junto à coordenada x do ponto B, ele fica à esquerda do ponto A; se altero o valor que está sendo somado ou subtraído junto à coordenada x do ponto B, o tamanho da figura é alterado. Já os conceitos-em-ação identificados são ponto e distância entre dois pontos.

Tiago tem conhecimento sobre como devem ser as coordenadas dos pontos da figura do balão para que sejam conectados com a função por partes e animados por meio do controle deslizante.

Em seguida, quando ele animou o controle deslizante a , percebeu que a figura do balão sumiu em alguns momentos. Para que isso não ocorresse, ele abriu as propriedades do controle deslizante, fez alterações no valor máximo, clicou *Enter* e verificou, na construção, se o valor selecionado atendia as necessidades da construção (Figura 17¹). Quando ele selecionou como valores máximos 16 ou 17, percebeu que a figura não percorreu todo o trajeto formado pela função por partes r . Já quando colocou valores máximos como 18 ou 20, percebeu que a figura e os seus pontos sumiam.

Figura 17 - Controle deslizante²



Fonte: Dados da Pesquisa (2023).

Deixando 18 como máximo, ele moveu devagar o controle e percebeu que, até 17.4, a figura aparecia na tela. Então, alterou o valor máximo do controle para 17.4. Em seguida, ele realizou o procedimento análogo para verificar e alterar o valor mínimo do controle deslizante.

¹ Ao clicar sobre a figura, é dado acesso ao vídeo da tela do aluno.

² O vídeo pode ser acessado em: <https://youtu.be/hGYB3DHR77o>.

Por meio das ações do aluno em alterar o valor máximo e mínimo do controle deslizante, identificamos outros teoremas-em-ação, como: se animo/movimento o controle deslizante, então os pontos se movem em relação à representação gráfica da função no plano. Os conceitos-em-ação identificados são: pontos e gráfico da função.

Nessa etapa da construção, o aluno manifestou conhecimentos sobre a ferramenta controle deslizante e observou que os valores de máximo e mínimo devem ser alterados para que os pontos e a figura não desapareçam durante a animação.

Por meio dos teoremas-em-ação, dos conceitos-em-ação e dos esquemas de uso, identificamos que o aluno, para realizar a etapa de animação do cenário animado, insere a figura do balão na janela de visualização, e altera as coordenadas dos pontos da figura, relacionando ao controle deslizante e a função por partes. Além disso, o aluno identifica que, para que a figura existisse no plano, deveria haver uma distância entre os pontos, e o controle deslizante deveria assumir apenas valores específicos. Dessa forma, o aluno manifesta conhecimentos sobre as ferramentas e possibilidades oferecidas no software para que essa etapa da construção fosse desenvolvida. Assim, no quadro 18, indicamos as ações do aluno relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

Quadro 18 - Relação entre instrumentação-instrumentalização ao conectar pontos da figura, controle deslizante e função

Ações do aluno relacionadas à instrumentalização	Ações do aluno relacionadas à instrumentação
Tem conhecimento sobre as ferramentas disponíveis no software e reconhece a utilidade do controle deslizante na definição/atrelado às coordenadas dos pontos.	Altera a definição dos pontos A e B da figura para conectá-los à função por partes e ao controle deslizante, fazendo com que a figura se mova conforme a representação gráfica da função por partes.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Nesse processo em que o aluno mobiliza seus conhecimentos matemáticos e sobre o software para realizar essa etapa da construção, é possível identificar a relação entre o aluno e o GeoGebra. Como o aluno anima a figura do balão empregando técnicas no software e desenvolvendo esquemas, compreendemos que o GeoGebra é um instrumento (I₄) para a animação do balão sobre o caminho construído.

4.4.5 Cenário da construção

Em seguida, Tiago destacou: *agora só falta o cenário*. Ele selecionou uma figura de céu e salvou no computador. Então, tentou clicar na figura e arrastá-la para a janela de visualização

do software, mas não obteve sucesso. Isso só é possível na versão 6.0 do GeoGebra, e o aluno estava usando a versão 5.0.

Depois, usando a ferramenta *Inserir Imagem*, o aluno inseriu a figura do céu na janela de visualização do software. Como a figura do céu ficou sobrepondo a figura do balão, o aluno foi até as propriedades da figura do balão e alterou sua camada, para que ela ficasse sobre a figura do céu e aparecesse na cena final. No quadro 19, indicamos as ações do aluno relacionadas à instrumentação e à instrumentalização.

Quadro 19 - Relação entre instrumentação-instrumentalização ao finalizar o cenário animado

Ações do aluno relacionadas à instrumentalização	Ações do aluno relacionadas à instrumentação
Tem conhecimento sobre as ferramentas e recursos disponíveis no software para inserir a figura do balão na janela de visualização, alterar sua camada e esconder os objetos que não fazem parte da cena final.	Seleciona a ferramenta <i>Inserir Imagem</i> e insere a figura do cenário no plano. Em seguida, altera a camada da figura do balão para que fique acima da figura do cenário. Por fim, desabilita elementos, como eixos, malha, gráfico das funções e pontos da figura.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Nesse processo em que o aluno mobiliza seus conhecimentos sobre o software para realizar essa etapa da construção, é possível identificar o instrumento (I_5), pois há relação entre o aluno e o GeoGebra, visto que ele usa as ferramentas e recursos disponíveis para enfeitar e finalizar o cenário animado.

4.5 Considerações

Por meio deste trabalho, que teve por objetivo investigar, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, características da função afim manifestadas por um aluno do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra, buscamos descrever o processo de construção do cenário animado desenvolvido pelo aluno e depois a apresentação que ele realizou aos demais. Nesse sentido, buscamos identificar os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação relacionados às características da função afim e que foram manifestadas pelo aluno durante a construção e apresentação.

Como Tiago aceitou o convite de apresentar seu cenário, foi possível observar como ele desenvolveu a construção e questioná-lo sobre suas escolhas, verificando se ele estabelecia relações entre as representações gráficas e algébricas das funções e se manifestava conhecimentos sobre as características da função afim.

Assim, os principais teoremas-em-ação identificados nesse processo são em relação às características da função afim crescente (valor positivo junto com o x na lei de formação),

constante (na lei de formação há apenas um valor numérico) e decrescente (valor negativo junto com o x na lei de formação). Além dessas características, identificamos teoremas-em-ação relacionados ao domínio da função (comando para limitar a representação gráfica da função), função por partes (comando usado para unir os gráficos) e pontos que pertencem à função (animar a figura do balão). Já os principais conceitos-em-ação identificados são: gráfico da função, intervalo, números positivos ou negativos, plano e ponto.

Nesse processo de construção e apresentação, em alguns momentos, Tiago não nomeava corretamente cada tipo de função afim, mas estabelecia relação entre o que digitava na caixa de entrada e o comportamento da representação gráfica exibida na tela.

Considerando a dialética artefato-instrumento, identificamos que o GeoGebra se transformou em diferentes instrumentos para o aluno, como instrumento para construir o caminho para o balão (I_1), instrumento para limitar as partes do caminho (I_2), instrumento para unir as partes para formar um único e contínuo caminho (I_3), e por fim, usando os recursos do GeoGebra, instrumento para animar a construção desenvolvida por ele (I_4) e criar o cenário (I_5). Nesse sentido, para o aluno, durante a construção dos cenários animados, o GeoGebra deu origem a diferentes instrumentos (I_1 , I_2 , I_3 , I_4 e I_5).

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, mas nesse caso, o aluno não usa o GeoGebra com uma finalidade de fazer matemática, e sim para construir um cenário animado que mostra o percurso de um balão. Sem a mediação dos professores da EA, o aluno não estabeleceu sozinho as relações da construção com os conteúdos matemáticos, pois essa relação só aparece durante as discussões e a partir dos questionamentos que os integrantes da equipe assistente fizeram ao aluno. Portanto, o aluno reconhece as possibilidades do software para construir o cenário animado, e assim, segundo Rabardel (2002), além das propriedades intrínsecas, outras propriedades extrínsecas podem ser adicionadas ao artefato, conforme as funções que são atribuídas a ele, para se constituir em um instrumento. Nesse sentido, identificamos que o GeoGebra se tornou instrumento para o aluno construir o cenário animado *Balão*.

Quanto à dialética instrumentação-instrumentalização, identificamos as ações direcionadas para o aluno (instrumentação): compreender o funcionamento do artefato, reconhecer suas possibilidades, investigar os recursos disponíveis e usar as ferramentas. Com relação às ações direcionadas para o artefato (instrumentalização), identificamos: inserir a lei de formação na caixa de entrada, fazer alterações na lei de formação, usar o comando *Se* na caixa de entrada, fazer alterações no comando, usar a ferramenta *Inserir Imagem* e alterar as coordenadas dos pontos.

Durante a realização desta pesquisa, verificamos que os elementos da dialética são entrelaçados e, por vezes, é difícil separar e identificar quais ações são referentes a cada noção. Para auxiliar, é necessário estabelecer o que/quais ações será/serão considerado/consideradas para identificar cada noção.

Por fim, ressaltamos que, por meio deste trabalho, identificamos que o software GeoGebra se transformou em diferentes instrumentos para o aluno, e esses instrumentos são relacionados à construção de cenários animados e às ações que o aluno deveria desenvolver para realizar a construção. Dessa forma, o aluno, até o momento desta pesquisa, não sabia operar com funções ou usar o software para esse fim.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. In: **XII Conferência Inter-Americana de Educação Matemática**, Querétaro – México, p. 13-33. 2007.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, año 6, n. 8. p. 1-15. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** - Ensino Fundamental. Brasília, DF, 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/ superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020.

CHEVALLARD, Y. L'Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, n.2, p.221-266. 1999.

DRIJVERS, P. *et al.* Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, C.; LAGRANGE, J. B. C. (Ed.). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**, New York: Springer, 2010. p. 89-133. http://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4419-0146-0_7

DRIJVERS, P. *et al.* One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, p. 23–49. 2013. DOI 10.1007/s10649-012-9416-8

DRIJVERS, P. H. M. Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. **Dissertation**. Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands, 2003.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. J.; SALAZAR, J. V. F. Aproximação Instrumental: sua origem e seu desenvolvimento no Peru. In: BASNIAK, M. I. RUBIO-PIZZORO, S. (Org). **Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2020. p. 45-66.

GUIN, D.; TROUCHE, L. The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 3, p. 195–227, 1999.

KIERAN, C.; DRIJVERS, P. Digital Technology and Mathematics Education: Core Ideas and Key Dimensions of Michèle Artigue's Theoretical Work on Digital Tools and Its Impact on Mathematics Education Research. In: HODGSON, B. R.; KUZNIAK, A.; LAGRANGE, J.-B. (eds.). **The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues**. Springer: Cham, Switzerland, 2016; p. 123–142. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_6

LAGRANGE, J. B.; ARTIGUE, M.; LABORDE, C.; TROUCHE, L. A Meta Study on IC Technologies in Education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. **Anais da 25ª Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, vol. 1 (pp. 111-122). Utrecht: Instituto Freudenthal, 2001.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2021.

RABARDEL, P. **Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. Universidad Industrial de Santander, 1995.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos**. Université paris 8. hal-01020705. 2002.

TROUCHE, L. La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. **Educational Studies in Mathematics**, 41, p. 239-264. 2000.

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument**. New York: Springer. p. 137-162. 2005.

TROUCHE, L.; DRIJVERS, P. Handheld technology: Flashback into the future. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v. 42, n. 7, p. 667-681, 2010. DOI [10.1007/s11858-010-0269-2](https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2)

TROUCHE, L. Instrumentation in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. N.Y.: Springer. 2018. DOI: [10.1007/978-3-030-15789-0_80](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_80)

VERGNAUD, G. A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19. 1996.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer da pesquisa, buscamos olhar como os cenários animados no GeoGebra que envolvem o conteúdo de função afim podem ser usados durante as aulas de Matemática para abordar e discutir o conteúdo com alunos do Ensino Fundamental. Nesse sentido, foi necessário estudar sobre o conteúdo de função afim para poder planejar como seriam as intervenções com os alunos e quais as discussões que seriam promovidas durante as aulas.

Como referencial teórico, adotamos e estudamos sobre a Aproximação Instrumental (AI) (ARTIGUE, 2002; 2007; 2011; TROUCHE, 2016), pois dentro da teoria se discutem as relações instrumentais estabelecidas entre sujeito e objeto durante a realização de uma tarefa que envolve o uso de tecnologias digitais.

Considerando o objetivo geral desta pesquisa, qual seja, *investigar a relação instrumental entre as características da função afim e as técnicas instrumentadas empregadas no GeoGebra na construção de cenários animados por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental*, determinamos objetivos específicos para que pudéssemos atingir o objetivo geral. Almejando atingir cada um desses objetivos, estruturamos o relatório da pesquisa utilizando o modelo *multipaper*, o que também acreditamos que pode contribuir para a difusão dos resultados da pesquisa por meio da publicação desses artigos em periódicos. Dessa forma, a dissertação foi composta por uma introdução estendida, um capítulo teórico, três artigos (estruturados a partir dos objetivos específicos) e considerações finais.

Assim, o modelo *multipaper* favoreceu diferentes olhares para elementos específicos da teoria, que foram concentrados em cada artigo, e possibilitou analisar os dados produzidos, buscando verificar as manifestações das características da função afim, o que não conseguimos vislumbrar no modelo tradicional, no qual avaliamos que analisar a variedade dos dados de forma conjunta seria desafiador.

Contudo, como este não é um modelo tradicional, enfrentamos desafios ao elaborar principalmente os artigos, pois cada um deve apresentar referencial teórico necessário próprio para sustentar as análises. Além disso, como o referencial teórico que adotamos é extenso, algumas discussões que aprofundam a teoria como um todo são inviáveis dentro do espaço limitado de um artigo científico.

Frente a isso, decidimos pela inclusão de um capítulo teórico em que abordamos, de forma mais detalhada, a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), a abordagem instrumental (RABARDEL, 1995; 2002), destacando a articulação entre elas para satisfazer a necessidade de um novo quadro teórico, a AI. Dentro de cada artigo, relata-se de

forma breve sobre como surge a AI e são indicadas referências para que o leitor possa aprofundar os estudos, caso deseje.

Nesse sentido, grande parte das discussões sobre a AI foram concentradas no capítulo teórico e nos três artigos dividimos os elementos da teoria, abordando o que foi usado nas análises, ou seja, o referencial teórico foi elaborado no capítulo teórico e estendido nos três artigos. Como a noção de esquema de ação instrumentada é importante dentro da AI, ela é citada no decorrer dos três artigos, visto que o leitor pode ter acesso a apenas um deles.

Evidenciamos que o referencial teórico adotado para esta pesquisa, mesmo sendo recente, possibilitou olhar os dados produzidos considerando a relação entre alunos, um software de geometria dinâmica e conteúdos matemáticos. Além disso, tivemos uma base teórica para investigar de que forma o uso das tecnologias digitais interferem e podem contribuir para o processo de aprendizagem dos alunos.

Na introdução estendida descrevemos, com maiores detalhes, os pressupostos metodológicos da pesquisa, a escolha dos cenários animados, como ocorreu o planejamento e, depois, a efetivação das intervenções com os alunos. Nos artigos 02 e 03, em que usamos os dados produzidos pelos alunos durante as intervenções, descrevemos apenas as informações que são necessárias para que o leitor compreenda o contexto da pesquisa.

Como nosso objetivo é relacionado a propor as construções de cenários animados aos alunos e investigar as relações instrumentais e técnicas instrumentadas empregadas nesse processo por eles, consideramos pertinente desenvolver um artigo teórico, no qual relatamos a construção de um dos cenários animados que seria proposto aos alunos, e olhar para possíveis processos de construção que nós vislumbramos. Entretanto, para além do processo de construção, também consideramos necessário estabelecer, a partir do referencial teórico adotado, qual seria a tarefa de construção, a técnica instrumentada empregada na construção, os esquemas de ação instrumentada manifestados por meio dos invariantes operatórios e esquemas de uso, assim como evidenciar as dimensões da gênese instrumental nesse processo.

Nesse contexto, o artigo 01 teve por objetivo *discutir características da função afim por meio da construção de um cenário animado elaborado no GeoGebra a partir dos elementos da Aproximação Instrumental (tarefa, técnica, esquemas e as dimensões da instrumentação e instrumentalização)*. Nesse artigo, analisamos as ações empregadas pela autora desta pesquisa na construção do cenário animado *Abelha simples* e, nas análises, elencamos os elementos da AI e as características da função afim presentes no processo de sua construção. Para estruturar o quadro teórico desse artigo, apoiamo-nos em discussões sobre função a partir de Caraça (1951), Tinoco (2002), Lima *et al.* (2006) e Campiteli e Campiteli (2006). Como o foco era o

conteúdo de função afim, foi dada atenção às suas características, tomando como base as definições propostas por Lima *et al.* (2006).

Nesse artigo, os resultados indicam que, por meio das tarefas, das técnicas instrumentadas e invariantes operatórios, ao construir o cenário animado *Abelha simples*, é possível identificar características e diferenças entre a lei de formação de cada função afim, bem como o comportamento da representação gráfica de cada função. Nesse sentido, é favorecido que se estabeleça relação entre ambas as representações, gráfica e algébrica, e se observe que, ao realizar alteração em uma das representações, a outra é afetada.

Ao relacionar as análises com os elementos da AI, também indicamos que é necessário que, ao construir os cenários animados, o usuário reconheça as possibilidades do software, como digitar a lei de formação da função na caixa de entrada e alterá-la nessa caixa ou na janela de álgebra, e usar ferramentas e comandos disponíveis no software para construir o caminho que o personagem percorrerá.

Como esse foi um dos cenários propostos aos alunos durante as intervenções, optamos por investigar a construção desse cenário desenvolvido pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental no artigo 02, voltando nossa atenção à dialética esquema-técnica proposta por Drijvers *et al.* (2013) e discutida dentro da AI. Assim, estabelecemos o objetivo do segundo artigo: *investigar, a partir da dialética esquema-técnica, características da função afim manifestadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra.*

Os alunos desenvolveram a construção desse cenário animado e ocorreram discussões após cada etapa da construção, nos dois ambientes e com os quatro grupos de alunos, um grande número de dados foi produzido, os quais precisaram ser avaliados e selecionados.

Durante o processo de seleção, ao assistir as gravações das telas dos computadores dos alunos, foi possível identificar as estratégias de construção adotadas por eles, pois durante a aula, nem sempre foi possível acompanhar o desenvolvimento de todos. Como os alunos eram incentivados a trocar ideias com os colegas próximos, muitas vezes se ajudando e discutindo sobre os processos de construção, isso favoreceu a participação deles durante as discussões promovidas após cada etapa da construção, pois relataram o que haviam feito em seu computador.

Também por meio das gravações das telas dos computadores, pudemos identificar que as técnicas instrumentadas empregadas pelos alunos durante a construção do cenário animado *Abelha simples* foram referentes a: digitar a lei de formação da função na caixa de entrada,

alterar a lei de formação da função usando a caixa de entrada ou janela de álgebra, utilizar o comando *Se*, alterar o comando quando necessário e alterar as coordenadas dos pontos da figura.

Para analisar, principalmente os esquemas de ação instrumentada manifestados pelos alunos durante a construção do cenário animado *Abelha simples* descrito no artigo 02, tomamos como base os esquemas de ação instrumentada (invariantes operatórios e esquemas de uso) indicados no artigo 01, e relacionamos com as ações e falas dos alunos durante as discussões que ocorreram nos encontros.

Por meio das análises, os resultados apontam que houve manifestação de noções referentes à função constante, quando os alunos tiveram que construir o caminho para o primeiro movimento da abelha, que era ir até a árvore. Depois, para o segundo movimento, em que a abelha sobe na árvore, manifestaram noções referentes à função afim crescente, e para o último movimento, em que a abelha desce, manifestaram noções referentes à função afim decrescente.

Para completar a construção, os resultados revelam que os alunos também manifestaram noções sobre o domínio, pois limitaram a representação gráfica de cada função, e para uni-las, manifestaram noções referentes à função por partes. Por fim, para possibilitar a animação do cenário, manifestaram noções sobre coordenadas de pontos que pertencem à função.

Como o objetivo geral de pesquisa é relacionado às técnicas instrumentadas empregadas no GeoGebra, no artigo 02, indicamos diferenças entre as técnicas instrumentadas empregadas no software para a construção do cenário animado e as técnicas empregadas quando são usados recursos como lápis e papel para estudar o conteúdo de função afim.

Como o objetivo geral também está relacionado às relações instrumentais entre sujeito e objeto, no artigo 03, investigamos como o artefato se transformou em diferentes instrumentos, indicando como ocorreu o processo de gênese instrumental por meio das duas dimensões, instrumentação e instrumentalização. Os dados produzidos foram analisados por meio das outras duas dialéticas, artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização. Nesse artigo, optamos por olhar para a construção de um aluno apenas, e identificar quais noções referentes ao conteúdo de função afim eram manifestadas por ele. Dessa forma, o objetivo do terceiro artigo ficou definido como: *investigar, a partir das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, características da função afim manifestadas por um aluno do Ensino Fundamental na construção de um cenário animado no GeoGebra.*

Por meio das análises realizadas sobre a construção do cenário animado *Balão*, desenvolvido pelo aluno do 8º ano do Ensino Fundamental, identificamos que algumas técnicas instrumentadas que foram empregadas por ele eram semelhantes às técnicas instrumentadas

empregadas para a construção do cenário animado *Abelha simples*, descrito no artigo 02. Identificamos, também, que alguns esquemas de ação instrumentada destacados no artigo 03 eram parecidos com aqueles destacados no artigo 02. Dessa forma, pudemos inferir que os cenários animados eram diferentes, mas por abordarem sobre o mesmo conteúdo, algumas técnicas instrumentadas foram empregadas em mais de uma construção, e como consequência, os esquemas de ação instrumentada manifestados também foram semelhantes.

Para olhar para as duas relações dialéticas, tomamos como base o que foi discutido no artigo 01, mas no artigo 03, olhamos para as ações do aluno durante o processo de construção e apresentação do cenário animado *Balão*. Ao final, por meio das dialéticas artefato-instrumento e instrumentação-instrumentalização, como destacado no artigo, identificamos que, para o aluno, o software se transformou em diferentes instrumentos, como: instrumento para construir o caminho para o balão; instrumento para limitar as partes do caminho; instrumento para unir as partes para formar um único e contínuo caminho; e instrumento para animar a construção.

Além disso, os resultados indicam que o aluno também manifestou noções referentes às características da função afim com os movimentos do balão, como: para o balão subir, o valor junto com o x na lei de formação da função deve ser positivo; para o balão sobrevoar, na lei de formação da função há apenas um valor numérico; e para o balão descer, o valor junto com o x na lei de formação da função deve ser negativo.

Nos três artigos foram discutidos a construção de dois cenários animados que envolvem o mesmo conteúdo e abordam características da função afim semelhantes, pois preveem que seja construído um percurso para um personagem andar e/ou subir e/ou descer. Nesse sentido, os elementos da AI, de forma geral, também são semelhantes para cenários desse tipo, como pode ser observado no Quadro 20.

Quadro 20 - Elementos da AI presentes na construção dos cenários animados *Abelha simples* e *Balão*

Tarefa principal	Construir o cenário animado.
Tarefas	Construir um caminho para o personagem andar. Construir um caminho para o personagem subir. Construir um caminho para o personagem descer. Restringir partes do caminho para que não seja infinito. Juntar as partes do caminho que o personagem percorrerá. Animar o personagem para que ele percorra o caminho construído.
Técnicas instrumentadas	Digitar a lei de formação na caixa de entrada. Alterar a lei de formação na caixa de entrada ou janela de álgebra caso necessário. Utilizar o comando Se. Alterar o comando quando necessário. Alterar a definição dos pontos da figura.

Esquemas de ação instrumentada	Esquemas de uso: Usar a caixa de entrada. Usar a janela de álgebra. Principais teoremas-em-ação com relação a função afim: Se o valor na lei de formação da função constante for positivo, então o gráfico da função fica acima do eixo x. Se o valor na lei de formação da função constante for negativo, então o gráfico da função fica abaixo do eixo x. Se digitar a lei de formação da função com um valor positivo na frente da variável x, então o gráfico da função fica inclinado, formando um ângulo entre 0° e 90° com o eixo x. Se alterar o valor junto com o x na lei de formação, então a inclinação do gráfico da função, em relação ao eixo x, é modificado. Se digitar na lei de formação da função afim apenas um valor junto a variável x, então a representação gráfica cruza a origem do plano cartesiano. Se adicionar um valor junto à lei de formação da função afim, então o gráfico não passa pela origem do plano cartesiano. Se alterar o valor somado junto à lei de formação da função afim, então o gráfico da função se desloca em relação ao eixo y. Se digitar a lei de formação da função com a variável x junto com um valor negativo, então o gráfico da função fica inclinado, formando um ângulo entre 90° e 180° com o eixo x. Principais conceitos-em-ação com relação à função afim: Taxa de crescimento nula, positiva ou negativa; gráfico da função; inclinação; coeficiente linear e plano cartesiano.
Instrumentalização	Reconhecer que é necessário digitar a lei de formação na caixa de entrada e que se pode fazer alterações. Identificar que não há uma ferramenta pronta para limitar a representação gráfica da função, mas deve ser usado o comando <i>Se</i>. Reconhecer que se pode fazer alterações no comando <i>Se</i>. Identificar que não há uma ferramenta pronta para unir as representações gráficas das funções, mas deve ser usado o comando <i>Se</i>. Verificar que há uma ferramenta para inserir figuras na janela de visualização. Reconhecer a utilidade do controle deslizante na definição/atrelado as coordenadas dos pontos.
Instrumentação	Inserir a lei de formação na caixa de entrada para formar a base do caminho. Alterar os valores na lei de formação de cada função afim, quando necessário. Selecionar o comando <i>Se(<Condição>, <Então>)</i> na caixa de entrada e digitar os elementos no comando. Alterar os valores de máximo e mínimo do intervalo no comando, na janela de álgebra, para que a representação gráfica seja ajustada quando necessário. Selecionar o comando <i>Se</i>, na caixa de entrada, e digitar o intervalo correspondente a cada função afim. Selecionar a ferramenta <i>Inserir Imagem</i> e inserir a figura do personagem no plano ou o cenário. Alterar a definição dos pontos da figura para conectá-los à função e ao controle deslizante, para que se movam conforme a representação gráfica da função. Desabilitar elementos, como eixos, malha, gráfico da função e pontos da figura.

Fonte: As autoras (2023).

Durante os encontros, como o conteúdo foi abordado por meio da construção do cenário, foram promovidas discussões sobre função afim. Em nenhum momento os alunos operaram cálculos ou desenvolveram tarefas que não fossem relacionadas à construção dos cenários.

Entretanto, apesar disso, por meio das análises em cada artigo, identificamos que os alunos têm noções do comportamento de cada função afim e reconhecem que, ao alterar a taxa de variação ou o coeficiente linear, a representação gráfica da função também é alterada. Além disso, os alunos, ao restringir os gráficos de cada função para que não fossem infinitos e ao unir as partes para formar o caminho do personagem, manifestam outras noções, como domínio e função por partes, que também estão relacionadas ao conteúdo de função. Quando atrelaram ponto, controle deslizante e função, são manifestadas noções sobre a relação entre as duas variáveis, dependente e independente, e que envolvem outros elementos, como controle deslizante, para que a figura percorra o caminho construído.

Também destacamos que, antes das *intervenções* ocorrerem com os alunos, houve o tempo de planejamento e preparação dos materiais, como os roteiros de construção, por exemplo. Nesse momento, e depois, durante as intervenções com os alunos, contamos com a parceria de uma colega de mestrado e dos integrantes do USF. Essa *colaboração*, característica da Pesquisa de Desenvolvimento (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014) entre todos, foi fundamental para que as intervenções ocorressem de forma tranquila, com menores grupos formados pelos alunos das duas turmas do 8º ano.

Assim, ressaltamos que a participação dos integrantes das EA foi fundamental para o desenvolvimento das aulas, pois, por exemplo, quando alguma técnica foi empregada no GeoGebra, o software não validava o que foi feito ou retornava explicações sobre o conteúdo. Como o software não é autossuficiente, foi necessário que os membros das EA, verificassem: se o que cada aluno havia feito estava correto; se eram necessários ajustes; se os alunos necessitavam de explicações sobre o conteúdo ou sobre o processo de construção. Dessa forma, eles auxiliaram na condução das construções dos cenários animados e na promoção de discussões, coletivas ou individuais, dos conteúdos matemáticos que estavam envolvidos na construção. Nesse sentido, atuando como professores nos encontros, eles faziam a mediação entre aluno, software e conhecimento matemático.

Destacamos, também, a *iteração* após cada encontro com os alunos, visto que os integrantes das equipes assistentes se reuniam, juntamente com a coordenadora do projeto e orientadora desta pesquisa, para trocar informações sobre o encontro, (re)planejar as construções caso necessário, e (re)organizar os materiais para o próximo encontro.

Como ressaltamos na introdução e nos artigos 02 e 03, os alunos desenvolveram as construções dos cenários animados usando os computadores dos laboratórios de informática da universidade, que dispõem de uma boa infraestrutura. Caso não fosse possível, certamente

levaríamos mais tempo para desenvolver as construções usando o laboratório da escola, visto que mais turmas usavam o espaço para outras atividades.

Como destacado ao longo do trabalho, antes das intervenções, os alunos não conheciam o artefato GeoGebra, e foi por meio dos encontros que os alunos tiveram o primeiro contato com esse software. Por não conhecerem, no início, os alunos apenas reproduziam os procedimentos que os integrantes das equipes assistentes indicavam para que os cenários fossem construídos. Dessa forma, nesse primeiro momento, as técnicas instrumentadas empregadas no software eram de reprodução, como ocorre normalmente quando os alunos usam meios como lápis e papel, mas difere, porque nessa situação, os alunos tinham a possibilidade de modificar valores e observar instantaneamente a interferência disso na janela de visualização.

Com o passar dos encontros, os alunos foram se familiarizando com a interface do software, suas ferramentas e os processos de construção dos cenários. Para a construção do cenário animado próprio, última construção proposta, os alunos deveriam desenvolver suas ideias no software, usando os recursos disponíveis e/ou pensando em adaptações necessárias. Nesse sentido, era preciso que tivessem noções sobre as possibilidades disponíveis no GeoGebra. Alguns alunos, como Tiago, apresentado no artigo 03, apropriaram-se do software, empregaram técnicas de construção e, assim, o GeoGebra adquiriu status de diferentes instrumentos, em diferentes momentos, para que ele reproduzisse o que queria, como por exemplo um instrumento para construir o caminho para um balão subir, sobrevoar e depois descer.

Ao longo das intervenções, também, em que as construções dos cenários foram avançando em relação ao conteúdo de função afim, pudemos perceber que os alunos demonstravam dificuldades em usar a nomenclatura matemática para se referir aos elementos na construção em alguns momentos. Por mais que não nomeassem corretamente os elementos matemáticos, as análises nos deram indícios de que as situações propostas são favoráveis para que, futuramente, o conceito de função e as características da função afim sejam compreendidas pelos alunos.

Ainda destacamos que somente abordar sobre ferramentas e comandos do GeoGebra que poderiam ser usados para desenvolver o cenário não era suficiente, pois é necessário ter noção do conteúdo que está sendo representado e usado para o desenvolvimento da construção. Assim, destacamos que é preciso conhecimento sobre o conteúdo matemático aliado aos conhecimentos sobre os recursos do software.

Portanto, a partir das características da função afim, como constante, crescente e decrescente, idealizamos um processo de construção para o cenário animado *Abelha simples* (artigo 01) que, ao ser proposto aos alunos do Ensino Fundamental, verificamos as técnicas instrumentadas empregadas pelos alunos, a manifestação de noções referentes às características da função afim, por meio dos esquemas de ação instrumentada (artigo 02) e que, por meio da construção de cenários animados, o artefato GeoGebra se transformou em diferentes instrumentos (artigo 03). Logo, com os três artigos, discutimos as relações instrumentais estabelecidas entre as características da função afim e as técnicas instrumentadas empregadas pelos alunos do 8º ano Ensino Fundamental ao construir cenários animados.

Por fim, consideramos pertinente que construções de cenários animados envolvendo o conteúdo de função afim possam ser propostas a outros níveis de ensino, como Ensino Médio e Superior, para que sejam verificadas quais as técnicas instrumentadas os alunos que já têm conhecimento sobre o conteúdo vão empregar para desenvolver a construção. Também destacamos a possibilidade de trabalhar com os alunos conteúdos matemáticos que eles não estudaram formalmente em sala de aula, usando os cenários animados, como por exemplo outros tipos de funções, para que eles possam explorar as diferentes representações do mesmo elemento matemática.

REFERÊNCIAS¹

ALMEIDA, A. C.; OLIVEIRA, H. O processo de gênese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. **Quadrante**, vol. XVIII, nº 1 e 2, p. 87-118, 2009.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba. Ed. UFPR. 2007.

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS environment: the Genesis of a reflection about Instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal for Computers in Mathematical Learning**, v.7, p. 245-274, 2002.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. In: **XII Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática**, Querétaro – México, p. 13-33, 2007.

ARTIGUE, M. Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, año 6, n. 8. P. 1-15. 2011.

¹ Foram colocadas as referências de todos os trabalhos usados ou citados nesta dissertação.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. In: D'AMBRÓSIO, B. S; LOPES, C. E. (Org.) **Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática**. 1ª ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015, v. 1, p.347-367.

BASNIAK, M. I. A construção de cenários animados no GeoGebra e o ensino e a aprendizagem de funções. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 43-58, 2020.

BASNIAK, M. I. **Políticas de tecnologias na educação**: o Programa Paraná Digital. 210f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. Uma lente para analisar a integração de Tecnologias Digitais ao Ensino Exploratório de Matemática. **VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – Foz do Iguaçu, Paraná. 2018.

BASNIAK, M. I; CARNEIRO, E. B. A comunicação na construção de cenários animados por alunos com indicativo de altas habilidades/superdotação. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** (REVEMAT), Florianópolis – SC, v. 16, p. 01-22, 2021.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2019.

BERNARDINO, F.; GARCIA, W. F. D. G.; REZENDE, V. Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do ensino fundamental e ensino médio. **ACTIO: Docência em Ciências**, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 127-147, mai./ago. 2019.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas – SP, v. 25, n. 3, p.364-387, set./dez. 2017. <https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640>

BORUCH, I. G.; BASNIAK, M. I. Animações no GeoGebra e o Ensino de Matemática: uma experiência com alunos com altas habilidades/superdotação. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología)**, v. extra, p. 1-8, 2018.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n.1, p. 77-124, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** – Ensino Fundamental. Brasília, DF, 2018.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Cenários animados no GeoGebra e o estudo de funções por alunos com altas habilidades/superdotação. **Tangram**, v. 4, p. 134-154, 2021.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construção de cenários animados em contexto de sala de aula do Ensino Fundamental. **XXV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, Campina Grande – PB. 2021.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Construcción de escenarios en GeoGebra en la movilización de conocimientos matemáticos por alumnos con altas habilidades/ superdotados. **Revista Paradigma** (Extra 2), v. XLI, p. 252-276, ago. 2020. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p252-276.id895>

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Ensino de Matemática a alunos com Altas Habilidades/ Superdotação e a construção de animações e cenários no GeoGebra. In: IV Encontro Anual De Iniciação Científica (EAIC). **Anais**. Campus de Campo Mourão – PR, 2019.

BUENO, A. C.; BASNIAK, M. I. Ensino de matemática a alunos com altas habilidades/superdotação por meio da construção de cenários animados no GeoGebra. **X Congresso Internacional sobre enseñanza de las matemáticas**, Lima – Perú. 2020.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. J. Estudo matemático das leis naturais. In: CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1.ed. Lisboa: Gradiva, 1951. P. 107-139.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, p. 29-44, 2019.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des 149athématiques : l'approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. V.19, n.2, p.221-265. 1999.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n. 1, p.77-111, 1992.

DEFOUAD, B. Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S. **Tese de doutorado**, Université Paris 7, 2000.

DRIJVERS, P. *et al.* One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, p. 23–49. 2013. DOI 10.1007/s10649-012-9416-8

DRIJVERS, P. H. M. Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. **Dissertation**. Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands, 2003.

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, p. 23–49, 2013. DOI 10.1007/s10649-012-9416-8

DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. Computer Algebra as an Instrument. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**, Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer, 2005, p. 163-196. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_8

DRIJVERS, P. *et al.* Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: HOYLES, C.; LAGRANGE, J. B. C. (Ed.). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**, New York: Springer, 2010, p. 89-133. http://dx.doi.org/10.1007%2F978-1-4419-0146-0_7

ESTEVAM, E. J. G. **Práticas de uma Comunidade de Professores que ensinam Matemática e o Desenvolvimento Profissional em Educação Estatística**. 192f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

GARCÍA-CUÉLLAR, D. J.; SALAZAR, J. V. F. Aproximação Instrumental: sua origem e seu desenvolvimento no Peru. In: BASNIAK, M. I. RUBIO-PIZZORO, S. (Org). **Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2020. p.45-66.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. **Educación Matemática**, vol. 33, núm. 1, abril, 2021, p. 7-40. DOI: 10.24844/EM3301.01

GUIN, D.; TROUCHE, L. The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 3, p. 195–227, 1999.

KIERAN, C.; DRIJVERS, P. Digital Technology and Mathematics Education: Core Ideas and Key Dimensions of Michèle Artigue’s Theoretical Work on Digital Tools and Its Impact on Mathematics Education Research. In: HODGSON, B. R.; KUZNIAK, A.; LAGRANGE, J.-B. (eds.). **The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues**. Springer: Cham, Switzerland, 2016; p. 123–142. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_6

LAGRANGE, J. B.; ARTIGUE, M.; LABORDE, C.; TROUCHE, L. A Meta Study on IC Technologies in Education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. **Anais da 25ª Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, vol. 1 (pp. 111-122). Utrecht: Instituto Freudenthal, 2001.

LAGRANGE, J.-B. Using symbolic calculators to study mathematics. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.) **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators**, Turning a computational device into a mathematical instrument. New York: Springer. 2005. p. 113-135.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM. 2006.

MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. L. A história do conceito de função em vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Revista Bolema**, v.28, n.50, p.1348-1367. 2014.

MARTINEZ-HERNÁNDES, C.; MARMOLEJO-REBOLLEDO, Y. N.; PARRA-SOTO, D. S. El proceso de derivación en GeoGebra: un estudio sobre el conocimiento matemático de futuros profesores. In: XV Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME). **Anais**. Medellín, Colômbia, 2019.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, p.23-36, 2014.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Learning science through computer games and simulations**. HONEY, M. A.; HILTON, M (Eds). Board on Science Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academies Press. 2011.

PADILHA, L. C. S.; BITTAR, M. Apropriação por professores de matemática para fins pedagógicos: uma Abordagem Instrumental. In: **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM**. Curitiba - PR. 2013.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2021.

PEDREROS, M. P. **Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Instrumental**. 236f. Dissertação (Mestrado em Educación Matemática) - Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, 2012.

PEIXOTO, J. Relações entre sujeitos sociais *e objetos técnicos** uma reflexão necessária para investigar os processos educativos mediados por tecnologias. **Revista Brasileira de Educação**, v. 20 n. 61, p. 317-332, 2015.

RABARDEL, P. **L’homme et les outils contemporains**. Paris: A. Colin, 1995.

RABARDEL, P. **Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos**. Universidad Industrial de Santander, 1995.

RABARDEL, P. **Qu’est-ce qu’un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation**. Les dossiers de l’ingénierie éducative, n. 19, p. 61-65, 1995.

RABARDEL, P. **Pessoas e tecnologia: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos**. Université paris 8. hal-01020705, 2002.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v.13, n.2, p.25-5, nov. 2020. <http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n2p25>

ROSSINI, R. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. **Educação Matemática em Pesquisa**, v. 9, n. 2. 2007.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. As organizações praxeológicas no ensino de geometria: análise da prática pedagógica de uma professora indígena. **XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba – PR. 2013.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. **Revista de Educação em Ciências e Matemática**, Amazônia, v.13, n.27, p.51-66, set 2017. <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v13i27.4281>

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função? **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017.

SANTOS, L. P.; BASNIAK, M. Construção de cenários animados por alunos com indicativos de altas habilidades/superdotação como atividade Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-20, 2021.

SANTOS, S. dos P. **A Teoria Antropológica do Didático: condições e restrições reveladas pelas teses e dissertações defendidas no Brasil na área da Educação Matemática**. 171f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2020.

SCALDELA, D. O Software GeoGebra. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. (Org.). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica**. 1ed. Curitiba: Íthala, 2014, cap. 1, p. 13-23.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções. **Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo**, v.1, n.1, LXVI - LXXX. 2012.

TENÓRIO, A.; OLIVEIRA, M. E. F. DE.; TENÓRIO, T. A influência do Geogebra na Resolução de Exercícios e Problemas de Função Polinomial do 1º grau. **Jornal Internacinal de Estudos em Educação Matemática**, v.7, n.2. 2015.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de Função**. Rio de Janeiro, Projeto Fundação. 2002.

TROUCHE, L. A propos de l'apprentissage de fonctions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. **Tese de doutorado**, Université de Montpellier, 1997.

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: GUIN, K.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.). **The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument**. New York: Springer. p.137-162, 2005.

TROUCHE, L. **Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations**. Université Paris VII, 2003. hal-00190091

TROUCHE, L. Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France. In: MONAGHAN, J.; TROUCHE, L.; BORWEIN, J. M. (Org). **Tools and Mathematics: Instruments for Learning**. Springer, 2016. p. 219-256. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0_10

TROUCHE, L. Instrumentalization in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. N.Y.: Springer. 2018a. DOI: 10.1007/978-3-319-77487-9_100013-1

TROUCHE, L. Instrumentation in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education**. N.Y.: Springer. 2018b. DOI: 10.1007/978-3-030-15789-0_80

TROUCHE, L. La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. **Educational Studies in Mathematics**, 41, p. 239-264, 2000.

TROUCHE, L.; DRIJVERS, P. Handheld technology: Flashback into the future. ZDM. **The International Journal on Mathematics Education**, v. 42, n. 7, p. 667-681, 2010. DOI [10.1007/s11858-010-0269-2](https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2)

VERGNAUD, G. A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, Tradução de Maria Lucia Faria Moro, revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares, 30, p. 245-252, 1985.

VERGNAUD, G. La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Conférence à la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti. In A. Bessot (Ed.), **Formation des enseignants et Étude Didactique de l'Enseignant**. Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti, p. 3-19. Tradução de Camila Rassi, revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares. Grenoble: CNRS/INPG/UJF, 2002.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; Muniz, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 13-26.

VIEIRA PINTO, A. **O conceito de tecnologia**. Rio de Janeiro: Contraponto, v. 1, 2005.

APÊNDICE I – Roteiro construção-discussão cenário Barco e chuva

Conteúdos envolvidos:

- Plano cartesiano (eixos, quadrantes);
- Reta numérica (números reais (inteiros e racionais));
- Coordenadas de um ponto;
- Distância entre pontos;
- Expressões algébricas (variável);
- Lógica;
- Intervalo e incremento.

Objetivos:

- Relacionar as coordenadas de um ponto com a sua posição no plano cartesiano.
- Relacionar uma variável (controle deslizante) a uma das coordenadas do ponto.

Discussões e Passo a Passo:

- Mostrar o cenário animado pronto.
- Buscar a imagem do barco na internet, em formato PNG.
- Abrir uma nova janela do GeoGebra.
 - *Construir um ponto e mostrar como ele se comporta no plano e na janela de álgebra.*
 - *Alterar as coordenadas do ponto e observar o que acontece.*
 - *Mostrar a relação das coordenadas com os eixos X e Y.*
 - *Identificar os quadrantes.*
 - *Mostrar os números inteiros e racionais na reta numérica.*
 - *Para a construção do ponto utilizar a ferramenta e a caixa de entrada.*
- Inserir a imagem do barco.
 - *Mostrar que a imagem é atrelada a dois pontos e movimentá-la.*
 - *Colocar um ponto sobre o outro e mostrar que se forem coincidentes não aparece a imagem.*
 - *Reposicionar a imagem, para que os alunos identifiquem/observem o comportamento e os valores das coordenadas dos pontos (eixo X, porque é o barco).*
 - *Como precisamos que a figura tenha movimento para variar os valores das coordenadas, vamos utilizar uma ferramenta que possibilita isso.*
- Criar o controle deslizante (a) com intervalo de 0 a 5 e incremento de 0.1.
 - *Explicar os parâmetros do controle (intervalo, incremento).*
 - *Identificar que a imagem não pode ficar parada e como o movimento é horizontal em relação ao eixo X, a coordenada de x deve ser alterada para que a figura se movimente neste sentido.*
 - *Por isso, vamos substituir a coordenada de x, no ponto A, pela variável do controle deslizante.*
- Atrelar o ponto A ao controle deslizante e observar se ele está se movendo.
- Colocar para animar (movimentando o controle e com a opção animar).
- Parar a animação do controle. Mostrar diferentes formas de parar.
 - *O ponto B não está acompanhando o ponto A, por isso precisamos atrelar o controle ao ponto B também.*

- Antes disso, vamos definir o tamanho da imagem que queremos (em relação ao eixo x).
- Verificar a distância do ponto A ao ponto B em relação ao eixo x, contando os quadrados do plano (unidades) ou os números na reta numérica.
 - *Mostrar que não basta modificar a coordenada do ponto B para (a, valor de y). Pois desse modo a imagem não ficará na posição desejada e/ou os pontos ficarão coincidentes e a imagem não aparece.*
 - *É preciso considerar a distância entre os pontos da imagem.*
- Definir o ponto B como (a + (tamanho da imagem em relação ao eixo x), valor de y que deve ser o mesmo atribuído ao ponto A).
- Mover ou animar o controle para verificar se a imagem se move conforme o esperado.
- Parar a animação do controle.
 - *O valor que é somado ao controle na coordenada x do ponto B pode ser alterado para verificar que o tamanho da imagem também é alterado. Testar alguns.*
 - *Discutir sobre o valor que assume a coordenada de x do ponto B (somar o valor do controle com o valor colocado, para fazer a relação entre coordenada e expressão algébrica).*
 - *O valor da coordenada de Y é constante, pois queremos que o barco ande apenas na horizontal.*
 - *Mostrar que o valor da coordenada de Y pode ser alterado se quisermos reposicionar o “nível” que o barco irá realizar o trajeto.*
 - *Para evidenciar isso, definir o ponto A como (a,2), (a,3), (a,-1) citando exemplos. E o B como (a+5, 2), (a+5, 3), (a+5, -1), etc.*
- Buscar a imagem da chuva na internet, em formato PNG.
- Inserir a imagem da chuva.
- Criar um controle deslizante (b) com intervalo -5 a 5 incremento de 0.1.
 - *Discutir porque não usamos o mesmo controle (nesse caso), pois o movimento é diferente.*
 - *Perguntar aos alunos o que deve mudar entre o movimento do barco e o da chuva (um é vertical e o outro horizontal).*
 - *Em consequência disso, a coordenada que vai variar será a mesma?*
 - *Isso pode ser observado ao reposicionar a imagem, para que os alunos identifiquem o comportamento e os valores das coordenadas dos pontos (eixo Y).*
- Posicionar a imagem no local desejado.
 - *Identificar que a imagem novamente não pode ficar parada, mas nesse caso o movimento é vertical em relação ao eixo Y, a coordenada de y deve ser alterada para que a figura se movimente neste sentido.*
 - *Por isso, vamos substituir a coordenada de y, no ponto C, pela variável (b) do controle deslizante.*
- Definir o ponto C como (valor qualquer de x, b).
- Mover ou animar o controle deslizante (b) verificando se o ponto C está se movendo.
- Parar a animação.
- Posicionar o ponto D da imagem, de acordo com o tamanho desejado.
 - *Discutir sobre o tamanho da imagem e observar a coordenada do ponto D.*

- Definir o ponto D como (valor fixo de x , b) para que a imagem não fique deformada
 - *Discutir porque nesse caso não acrescentamos unidades ao valor de b , como foi feito na imagem do barco (porque o controle deslizante varia o valor da coordenada de y , e queremos que a imagem fique “na mesma linha”).*
- O valor de x pode ser alterado para verificar que o tamanho da imagem se altera.
 - *O valor da coordenada de X nesse caso é constante, pois queremos que o barco se mova apenas na vertical.*
 - *Mostrar que o valor da coordenada de X pode ser alterado se quisermos reposicionar a imagem da chuva no plano ou alterar o tamanho.*
 - *Para evidenciar isso, definir o ponto C como $(2,b)$, $(4,b)$, $(-1,b)$ citando exemplos. E o D como $(5,b)$, $(7,b)$, $(10,b)$, etc.*
- Alterar o tipo de animação do controle deslizante (b) para decrescente, pois a chuva só vai para baixo.
 - *Também pode alterar a velocidade dos controles.*
- Se necessário, podem ser colocadas mais imagens de chuva para preencher o espaço percorrido pelo barco.
- Os pontos mais próximos de cada imagem da chuva, devem ter a mesma coordenada. Exemplo $F = (3,b)$, $C = (3,b)$ para que não haja espaços sem chuva.
- Os pontos das extremidades das imagens da chuva, devem ter a mesma distância dos pontos centrais, para que todas as imagens de chuva tenham o mesmo tamanho.
- Lembrando de identificar a distância entre as imagens para que não fiquem sobrepostas. E que todas estejam relacionadas ao mesmo controle deslizante para que realizem o mesmo movimento.
- Animar os controles para verificar o movimento realizado.
- Animar tudo, para verificar se os valores dos controles precisam ser alterados, para que o barco fique se movendo somente no espaço da chuva e a chuva esteja acima da imagem do barco.
 - *Discutir que conforme a construção de cada um, com imagens e tamanhos diferentes, os valores de máximo e mínimo dos controles podem ser diferentes, então cada dupla ou aluno deve estipular os valores de acordo com a sua construção, podem ir testando e adaptando, tomando como base os valores da reta numérica*
- Personalizar o cenário incluindo imagens de ondas, nuvem, céu, etc.
- Criar o botão de Iniciar e Voltar (Voltar é opcional).
 - *Discutir sobre a proposição Iniciar Animação ser uma verdade ou não.*
- Gravar a construção.

APÊNDICE II – Roteiro construção-discussão cenário A Princesa e o Sapo (função crescente)

Principais conteúdos:

- Função afim;
- Coeficiente angular;
- Coeficiente linear;

Conteúdos extra:

- Plano cartesiano;
- Reta numérica (números reais);
- Coordenadas de pontos;
- Distância entre dois pontos;
- Expressões algébricas;
- Ângulos;
- Pontos que pertencem a função;
- Domínio;
- Lógica matemática;
- Intervalos;
- Desigualdade.

Objetivos:

- Identificar que o valor do coeficiente angular deve ser maior do que zero para que a função afim seja caracterizada como crescente.
- Identificar que o valor do coeficiente linear indica o valor em que o gráfico da função intercepta o eixo y.
- Compreender que os pontos que pertencem à função podem ser escritos como $(x, f(x))$.
- Estabelecer a relação entre função, controle deslizante e os pontos da figura.
- Observar que as coordenadas pontos que pertencem a função variam.
- Estabelecer relação entre a lei matemática (função) com os pontos que pertencem a ela.
- Identificar que cada valor de x se relaciona apenas com um único y.
- Identificar que o domínio da função determina o intervalo que está sendo considerado para que a função exista.
- Estabelecer os intervalos para o domínio da função usando os símbolos de desigualdade e/ou igualdade.

Discussões e Passo a Passo:

- Mostrar a cena do filme (vídeo) [A PRINCESA E O SAPO](https://www.youtube.com/watch?v=qEL3LuMjXSY)¹
- Apresentar o cenário animado pronto e destacar que, no primeiro momento, será feito somente a animação dos sapos subindo.
 - *Discutir que foi uma adaptação.*
- Abre uma nova janela do GeoGebra.
- Digitar $f(x)=5x$ na caixa de entrada.

¹ O vídeo pode ser acessado em: <https://www.youtube.com/watch?v=qEL3LuMjXSY>

- Citar exemplos mudando o coeficiente angular.
 - Testar outros valores positivos e diferentes de zero para o coeficiente angular e investigar o que ocorre com o gráfico da função.
 - Questionar sobre o que esse valor está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano. Discutir que interfere na posição do gráfico da função no plano cartesiano.
 - Em um outro arquivo, caso seja melhor, pode ser criado um controle deslizante (a) com mínimo de 0.01 e máximo de 100 e uma função $g(x) = a \cdot x$. Em seguida, animar o controle deslizante e questionar os alunos sobre o que ocorre com o gráfico da função no plano (relacionando com a lei de formação na janela de álgebra).
 - Questionar os alunos se em algum momento o gráfico da função se torna coincidente com o eixo y , mesmo para valores grandes (dar zoom se necessário).
 - Discutir que esse valor é chamado de coeficiente angular e que ele determina a declividade do gráfico da função. Não o ângulo.
 - Discutir que o ângulo do gráfico da função com o eixo x é maior do que 0° e é menor do que 90° . Pode-se selecionar a ferramenta ângulo e clicar sobre o eixo e depois sobre o gráfico da função para verificação ou criar três pontos para criar o ângulo (um sobre o eixo x , outro na interseção entre o gráfico e o eixo x , e o terceiro ponto sobre o gráfico de $g(x)$).
 - Discutir que esse valor (a) pode ser qualquer um, mas deve ser maior do que zero. Citar exemplos ou pedir a eles que citem.
 - Plotar dois pontos quaisquer sobre o gráfico e observar que se $x_1 > x_2$ e $g(x_1) > g(x_2)$ ocorre então a função é crescente.
 - Mover um dos pontos sobre o gráfico da função e destacar/discutir com os alunos que os valores de x e y dos pontos que pertencem a função variam. Então, a coordenada de x pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.
 - Discutir que nesse caso o valor da coordenada de y dos pontos que pertencem a função também variam. Então, a coordenada de y pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.
 - Destacar que para cada ponto que pertence a função, a coordenada de x se relaciona com um único valor de y .
 - Discutir que os elementos do conjunto domínio da função têm correspondência com um único elemento do conjunto contradomínio da função, formando o conjunto imagem desta função crescente.
 - Escolher algumas coordenadas de pontos que pertencem a função e apontar o padrão que existe entre os valores de x e y .
 - Discutir que existe uma relação de dependência entre os valores das coordenadas dos pontos, de forma que os valores de x são variáveis independentes, enquanto os valores das coordenadas de y são variáveis dependentes de x (pode-se tomar como base o padrão observado).
 - Discutir/apontar que a lei de formação (lei matemática - função) é uma forma de estabelecer a relação entre os valores de x e y , que seguem determinado padrão.
 - Explicar o que é lei de formação.
- Adicionar um valor junto a lei de formação da função. Por exemplo $f(x) = 5x + 5$; depois $f(x) = 5x - 10$; depois $f(x) = 5x - 2$;
 - Outros valores podem ser adicionados.
 - Questionar sobre o que esse valor está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano.

- Em um outro arquivo, caso seja melhor, pode ser criado um controle deslizante (a) com mínimo de 0.01, máximo de 100 e incremento de 0.1. Depois um controle deslizante (b) com mínimo de -5, máximo de 5 e incremento de 0.1. Em seguida, na caixa de entrada criar uma função com a lei de formação $g(x) = a \cdot x + b$.
- Em seguida, animar o controle deslizante (b) e questionar os alunos sobre o que ocorre com o gráfico da função no plano (relacionando com a lei de formação na janela de álgebra).
- Discutir que esse valor é chamado de coeficiente linear e que ele determina a posição em que o gráfico da função intercepta o eixo y.
- O controle deslizante (a) também pode ser animado e discutido que, por mais que a lei de formação foi alterada, ele continua interferindo na declividade do gráfico.
- Plotar dois pontos quaisquer sobre o gráfico e discutir que a função continua sendo crescente, pois as características se mantêm ($a > 0$ e $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).
- Também podem ser promovidas outras discussões, mesmo que a lei de formação seja outra:
 - Mover um dos pontos sobre o gráfico da função e destacar/discutir com os alunos que os valores de x dos pontos que pertencem a função variam. Então, a coordenada de x pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.
 - Discutir que nesse caso o valor da coordenada de y dos pontos que pertencem a função também variam. Então, a coordenada de y pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.
 - Destacar que para cada ponto que pertence a função, a coordenada de x se relaciona com um único valor de y.
 - Escolher algumas coordenadas de pontos que pertencem a função e apontar o padrão que existe entre os valores de x e y.
 - Discutir que existe uma relação de dependência entre os valores das coordenadas dos pontos, de forma que os valores de x são variáveis independentes, enquanto os valores das coordenadas de y são variáveis dependentes de x (pode-se tomar como base o padrão observado).
 - Discutir/apontar que a lei de formação (lei matemática - função) é uma forma de estabelecer a relação entre os valores de x e y, que seguem determinado padrão.
- No caso da construção a função escolhida é $f(x) = 5x$, sem o coeficiente linear.
- Buscar alguma figura na internet (sapo, balões...), em formato PNG.
- Voltar ao arquivo da construção do cenário animado.
- Inserir a figura no software.
- Mostrar que a figura é atrelada a dois pontos e movimentá-la.
- Definir os pontos da figura (A e B) como ponto(f).
 - Mover os pontos e depois a figura (clicando e arrastando).
 - Discutir que os pontos, com essa definição, ficam somente sobre a função e deformam a figura quando são arrastados.
 - Apontar que se não tiver ação do usuário sobre os pontos ou sobre a figura no software eles irão permanecer parados, sem animação.
 - Destacar que podem selecionar a opção “animar” e os pontos se movem sobre o gráfico da função, mas não serão limitados em um intervalo específico e irão se mover infinitamente sobre o gráfico até que o usuário pause a animação.

- Com base nas outras construções, pode-se lembrar, com a ajuda dos alunos, que uma maneira de ter animação e movimento mecânico é por meio da ferramenta controle deslizante.
- Criar o controle deslizante (a) com intervalo de -100 a 100 e incremento de 0.1
 - Supondo que queremos que o ponto B se mova sobre a função $f(x)$ relacionado ao controle deslizante. Então pode ser proposto uma exploração. Vamos selecionar um valor qualquer para a variável independente (x) e vamos determinar qual será o valor de y na função $f(x)$. Lembrando que a função na sua forma geral é $y=ax+b$ ou $f(x)=ax+b$. Mas neste caso como não temos o coeficiente linear, então: para $x=1$, como o ponto pode ser reescrito como (x, y) e como $y=f(x)=ax$ então:
 - (x, $f(x)=ax$) substituindo os valores da função $f(x)=5x$ na lei geral, temos (x, $f(x)=5 \cdot x$) substituindo o valor de x ($x=1$) na função, temos (1, $f(1)=5 \cdot 1$) resolvendo temos (1, $f(1)=5$), logo (1, $f(1)=5$). Dessa forma, quando a coordenada de $x=1$ temos $y=5$ para essa lei de formação. Seguindo a mesma ideia outros valores podem ser calculados.
 - Discutir com os alunos que o valor de x é substituído pelo valor a que ele está igualado e que x está sendo aplicado a função $f(x)$.
 - Discutir que como o controle deslizante (a) tem a característica de representar vários valores dentro de um intervalo, ele pode ser usado na coordenada do ponto para que varie os valores de x e, conseqüentemente, os de y ou $f(x)$ também.
 - Pode-se evidenciar que se x variar vai fazer com que y ou $f(x)$ também seja alterado, conforme a lei de formação estabelecida. Também temos que os pontos da função são escritos da forma (x, $f(x)$). Logo, se x for substituído pelo controle deslizante “a” temos que substituir em $f(x)$ também, pois $f(x)$ obedece a x que obedece ao controle deslizante “a”. Então (a, $f(a)$).
- Definir o ponto B como (a, $f(a)$).
- Mover o controle deslizante e verificar se o ponto B se move sobre o gráfico da função $f(x)$.
 - Discutir que apenas o ponto B se move sobre o gráfico da função e o ponto A permanece parado, então a figura continua se deformando.
 - Apontar que o ponto A, que também está atrelado a figura, precisa ser relacionado com o controle deslizante e a função, para que acompanhe o ponto B e passe a impressão de se mover sobre o plano também.
 - Discutir que a definição do ponto A é semelhante ao do ponto B, mas deve ter algum incremento/diferença em relação a coordenada de x, pois os pontos devem manter uma distância para que a figura apareça no plano.
 - Destacar que é em relação ao eixo x a diferença.
 - Discutir que se o segundo ponto (A) estiver a direita do primeiro ponto (B) algum valor deve ser somado a coordenada de x do segundo ponto, por exemplo $A=(a+30, f(a))$
 - Discutir que se caso o segundo ponto (A) esteja à esquerda do primeiro ponto (B) algum valor deve ser subtraído a coordenada de x do segundo ponto, por exemplo $A=(a-30, f(a))$.
 - Ressaltar que o valor que for colocado junto a definição da coordenada de x do segundo ponto (A) indica o tamanho da figura no plano em relação a horizontal.
 - Nesse caso, como o ponto A na construção do cenário está à esquerda do ponto B, então o valor deve ser subtraído.
 - Ressaltar que para que a figura não fique torta o valor de y para os dois pontos deve ser o mesmo.

- Definir o ponto A como $(a-30, f(a))$.
- Mover o controle deslizante (a) e verificar se o ponto A se move acompanhando o ponto B.
 - *Os alunos podem testar/escolher outros valores e verificar o tamanho da figura sendo alterado.*
 - *Discutir que por mais que o controle deslizante tem um intervalo grande, quando ele é animado o ponto B não percorre por todo o gráfico da função, os alunos podem alterar os valores de máximo e mínimo do controle e verificar.*
 - *Discutir que a função é infinita, mas que os sapos não subirão infinitamente e que os valores de máximo e mínimo nunca vão contemplar toda a função.*
 - *Dessa forma, discutir que precisamos limitar o caminho que os sapos vão percorrer, restringindo a função para que ela exista apenas para alguns valores em relação ao eixo x.*
 - *Destacar que é em relação ao eixo x que selecionamos os valores, pois é o eixo do domínio.*
 - *Nessa construção foi optado em restringir a função $f(x)$ para os números reais entre -4 a 18.*
 - *Para isso temos que comunicar ao software a escolha de uma maneira que ele consiga interpretar. O comando usado é o “Se(<Condição>, <Então>).*
 - *Discutir que depois de dada uma condição deve-se indicar a qual objeto estamos nos referindo.*
- Limitar o caminho restringindo o domínio da função f: $\text{Se}(-4 \leq x \leq 18, f(x))$.
 - *A função $g(x)$ que aparece, é a função com domínio restringido.*
 - *Discutir que na condição os sinais de desigualdade devem estar corretos para que tenha validade matemática. Também ressaltar que não existe apenas uma forma de escrita, como por exemplo a condição poderia ser escrita da forma: $18 \geq x \geq -4$.*
 - *Discutir que antes o domínio da função era o conjunto dos números reais, mas agora, com o domínio restringido, a função só existe para aquele determinado intervalo.*
 - *Com relação a opção então estamos nos referindo a função $f(x)$, pois é ela que queremos limitar.*
- Testar outros valores para o domínio e verificar o que ocorre, por exemplo: $-5 \leq x \leq 15$; $0 \leq x \leq 6$; $2 \leq x \leq 20$.
- Mudar a definição dos pontos: $B=(a, g(a))$ e $A=(a-30, g(a))$.
- Mudar os intervalos do controle deslizante (a), deixar o mínimo como -4 e máximo 18. E deixar como crescente apenas.
 - *Retomar a discussão sobre o que é função; lei de formação geral; definição; pontos que pertencem a função.*
 - *Retomar a discussão sobre as características da função afim caracterizada como crescente, destacando principalmente sobre o coeficiente angular.*
- Gravar a construção.

APÊNDICE III – Roteiro construção-discussão cenário A Princesa e o Sapo (função decrescente e por partes)

Conteúdos envolvidos:

- Função afim caracterizada como decrescente;
- Função fim caracterizada como crescente;
- Função por partes;
- Coeficiente angular;
- Coeficiente linear;

Conteúdos extra:

- Plano cartesiano;
- Reta numérica (números reais);
- Coordenadas de pontos;
- Distância entre dois pontos;
- Expressões algébricas;
- Coeficiente linear;
- Ângulos;
- Pontos que pertencem a função;
- Domínio;
- Lógica matemática;
- Intervalos;
- Desigualdade.

Objetivos:

- Identificar as características da função afim caracterizada como decrescente.
- Identificar que o valor do coeficiente angular deve ser menor do que zero para que a função afim seja caracterizada como decrescente.
- Identificar que o valor do coeficiente linear indica o valor em que o gráfico da função intercepta o eixo y.
- Compreender que os pontos que pertencem à função podem ser escritos como $(x, f(x))$.
- Observar a relação entre função, controle deslizante e os pontos da figura.
- Observar que os valores de x e y dos pontos que pertencem a função variam.
- Observar que as coordenadas dos pontos que pertencem a função seguem um padrão.
- Estabelecer relação entre a lei matemática (função) com os pontos que pertencem a ela.
- Identificar que cada valor de x se relaciona apenas com um único y.
- Identificar que o domínio da função determina o intervalo que está sendo considerado para que a função exista.
- Estabelecer os intervalos para o domínio da função usando os símbolos de desigualdade e/ou igualdade.
- Identificar que a função por partes é formada por partes das outras funções.

Discussões e Passo a Passo:

- Mostrar a cena do filme (vídeo) [A PRINCESA E O SAPO](https://www.youtube.com/watch?v=2jEt7x0lDKo)¹

¹ O vídeo pode ser acessado em: <https://www.youtube.com/watch?v=2jEt7x0lDKo>

- Mostrar o cenário animado pronto (completo).
 - *Discutir que foi uma adaptação.*
- Partir do cenário já construído, com a função crescente.
- Digitar $h(x) = -5x + 180$ na caixa de entrada.
- Citar exemplos mudando o coeficiente angular e linear.
 - *Podem testar outros valores negativos e diferentes de zero para o coeficiente angular e investigar o que ocorre com o gráfico da função.*
 - *Questionar sobre o que esse valor está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano. Discutir que interfere na posição/declividade do gráfico da função no plano cartesiano.*
 - *Questionar os alunos se em algum momento o gráfico da função se torna coincidente com o eixo y (dar zoom se necessário).*
 - *Discutir que esse valor é chamado de coeficiente angular e que ele determina a declividade do gráfico da função. Não o ângulo.*
 - *Perguntar aos alunos sobre o intervalo do ângulo entre o gráfico da função e o eixo x. (Maior do que 90° e menor do que 180°).*
 - *Discutir que esse valor (a) pode ser qualquer um, mas deve ser menor do que zero para que a função seja decrescente. Pedir a eles que citem exemplos.*
 - *Outros valores podem ser adicionados (coeficiente linear).*
 - *Questionar sobre o que esse valor está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano.*
 - *Discutir que esse valor é chamado de coeficiente linear e que ele determina a posição em que o gráfico da função intercepta o eixo y.*
 - *Discutir que, por mais que a lei de formação foi alterada, o valor do coeficiente angular continua interferindo na declividade do gráfico.*

Também podem ser promovidas outras discussões, mesmo que a lei de formação seja outra

- *Mover um dos pontos sobre o gráfico da função e destacar/discutir com os alunos que os valores de x e y dos pontos que pertencem a função variam. Então, as coordenadas de x e y e podem ser definidas como variáveis, pois seus valores não são fixos nem únicos, e representam diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.*
- *Destacar que para cada ponto que pertence a função, a coordenada de x se relaciona com um único valor de y.*
- *(ELES) Escolher algumas coordenadas de pontos que pertencem a função e apontar o padrão que existe entre os valores de x e y.*
- *Discutir que existe uma relação de dependência entre os valores das coordenadas dos pontos, de forma que os valores de x são variáveis independentes, enquanto os valores das coordenadas de y são variáveis dependentes de x (pode-se tomar como base o padrão observado).*
- *Discutir/apontar que a lei de formação (lei matemática - função) é uma forma de estabelecer a relação entre os valores de x e y, que seguem determinado padrão.*
- *Destacar que os gráficos das funções devem se cruzar em algum ponto, ou seja, devem ter um ponto de interseção.*
- *Discutir que a função é infinita, mas que os sapos não vão subir ou descer infinitamente e que os valores de máximo e mínimo nunca vão contemplar toda a função.*
- *Dessa forma, discutir que precisamos limitar o caminho que os sapos vão percorrer, restringindo a função para que ela exista apenas para alguns valores em relação ao eixo x.*

- Limitar o caminho restringindo o domínio da função h : $\text{Se}(18 < x \leq 40, h(x))$ (deixar eles tentarem). Podem testar outros valores (exemplos).
 - *A função $p(x)$ que aparece, é a função com domínio restringido.*
 - *Destacar que é em relação ao eixo x que selecionamos os valores, pois é o eixo do domínio.*
 - *Discutir que na condição os sinais de desigualdade devem estar corretos para que tenha validade matemática. Também ressaltar que não existe apenas uma forma de escrita, como por exemplo a condição poderia ser escrita da forma: $18 > x \geq -4$.*
 - *Destacar que o final de uma função deve ser o começo da outra. Como no caso da $g(x)$ terminar em 18, e a $p(x)$ iniciar em 18.*
 - *Discutir que antes o domínio da função era o conjunto dos números reais, mas agora, com o domínio restringido, a função só existe para aquele determinado intervalo.*
 - *Com relação a opção então estamos nos referindo a função $h(x)$, pois é ela que queremos limitar.*
- Alterar o máximo do controle deslizante (a) para 40.
 - *Destacar que precisamos unir esses dois caminhos que os sapos vão fazer (subir e depois de descer).*
 - *Destacar que novamente é em relação ao eixo x que selecionamos os valores, pois é o eixo do domínio.*
 - *Nessa construção foi optado em restringir a função $f(x)$ para os números reais entre -4 a 18 e a função $h(x)$ para os números reais entre 18 a 40.*
 - *Para isso temos que comunicar ao software a escolha de uma maneira que ele consiga interpretar. O comando usado é o “Se(<Condição>, <Então>, <Senão>).*
 - *Discutir que Se o que está na condição acontece, nesse caso da animação, as desigualdades do intervalo, isso acarreta o que está no então. O Senão representa o complementar de Se, ou caso contrário. Por exemplo, quando o valor de x selecionado não está contido no primeiro intervalo, mas for de outro isso vai acarretar o então desse segundo.*

Função por partes

- Criar uma função por partes usando digitando na caixa de entrada $\text{Se}(-4 \leq x \leq 18, f(x), 18 < x \leq 40, h(x))$, que nesse caso é $q(x)$.
 - *Discutir que uma função por partes é formada por ao menos duas funções.*
 - *Discutir que os intervalos para cada função que compõem a função por partes devem ser diferentes (não pegar dois intervalos que contenham os mesmos valores para duas funções distintas).*
 - *Discutir que no caso da animação, para dar a impressão de continuidade de movimento, o gráfico deve ser contínuo, sem quebras. Discutir que a segunda função deve iniciar onde a primeira termina (nesse caso, em 18).*
 - *Discutir que a função $q(x)$ (por partes) continua sendo função e tem comportamentos diferentes em cada intervalo.*
- Atrair os dois pontos da figura ao controle deslizante (a) e a função $q(x)$: $A(a-30, q(a))$; $B(a, q(a))$;
 - *Discutir que como o controle deslizante (a) tem a característica de representar vários valores dentro de um intervalo, ele pode ser usado na coordenada do ponto para que varie os valores de x e, conseqüentemente, os de y ou $q(x)$ também.*

- Pode-se evidenciar que se x variar vai fazer com que y ou $q(x)$ também seja alterado, conforme a lei de formação estabelecida. Como os pontos da função são escritos da forma $(x, q(x))$, então se x for substituído pelo controle deslizante “ a ” temos que substituir em $q(x)$ também, pois $q(x)$ obedece a x que obedece ao controle deslizante “ a ”. Então $(a, q(a))$.
- Os alunos podem testar/escolher outros valores e verificar o tamanho da figura sendo alterado.
- Destacar que não é a figura com os balões que vai descer, então é preciso inserir outra figura dos sapos, mas sem os balões.
- Editar a figura cortando ou apagando os balões, em formato PNG.
- Inserir essa figura cortada no software (sem os balões).
- Para que as figuras não fiquem sobrepostas, precisamos deixar para aparecer uma quando estiver subindo e outra quando estiver descendo.
- Nas configurações da figura que deve aparecer subindo (com os balões), na caixa *condição para exibir objeto* indicar que só deve aparecer quando $a < 18$;
- Nas configurações da figura que deve aparecer descendo (sem os balões), na caixa *condição para exibir objeto* indicar que só deve aparecer quando $a > 18$.
- Discutir sobre os sinais de desigualdade, que representam um determinado intervalo para que cada figura apareça.
- Definir os pontos da figura sem os balões $D=(a, q(a))$ e $C=(a-30, q(a))$.
 - Discutir que a distância entre os pontos A e B deve ser a mesma distância entre os pontos C e D , para que os personagens permaneçam com o mesmo tamanho. Logo o valor que for somado junto a coordenada de x do ponto A deve ser o mesmo valor somado junto a coordenada x do ponto C .
- Deixar o controle (a) como crescente.
 - Retomar a discussão sobre o que é função; lei de formação geral; definição; pontos que pertencem a função.
 - Retomar a discussão sobre as características da função afim caracterizada como crescente ou decrescente, destacando principalmente sobre o coeficiente angular;
 - Retomar a discussão sobre coeficiente linear e sua relação com a representação gráfica da função.
 - Retomar a discussão sobre o domínio de cada uma das funções ($g(x)$, $p(x)$ e $q(x)$).

Definição 1: Sejam os conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B é uma função quando associa a cada elemento x , pertencente ao conjunto A , um único elemento y , pertencente a B . Essa função pode ser indicada por:

$$f = A \rightarrow B \text{ (lê-se “função } f \text{ de } A \text{ em } B\text{”)}$$

O conjunto A é denominado domínio ($D(f)$) e o conjunto B , contradomínio ($CD(f)$) da função f . Cada elemento y de B que possui correspondente x em A é chamado de imagem de x pela função f . O conjunto formado por todas as imagens é denominado imagem da função ($Im(f)$).

Definição 2: Uma função $R \rightarrow R$, que a todo número $x \in R$ associa o número $ax + b$, com a e b reais, é chamada função afim.

$$x \rightarrow ax + b$$

$$f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b$$

Dizemos que a e b são os coeficientes da função.

Definição 3: Em uma função afim $f(x) = ax + b$, o coeficiente b é chamado coeficiente linear. O gráfico dessa função intercepta o eixo y no ponto de coordenada $(0, b)$.

Definição 4: Em uma função afim $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado coeficiente angular ou declividade. Esse coeficiente está associado à inclinação da reta que representa o gráfico da função.

As funções afim podem ser de três maneiras diferentes, como exposto a seguir:

Definição 5: Em uma função afim, se o coeficiente angular é maior que zero ($a > 0$), a função é crescente. Os ângulos formados pelos gráficos das funções e o eixo x são agudos, ou seja, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Definição 6: Em uma função afim, se o coeficiente angular é menor que zero ($a < 0$), a função é decrescente. Os ângulos formados pelos gráficos das funções e o eixo x são obtusos, ou seja, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Opcional:

Definição 7: Dizemos que uma função f é decrescente em um intervalo contido no domínio de f se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 8: Dizemos que uma função f é crescente em um intervalo contido no domínio de f se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 > x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

- Inserir a figura das bexigas estouradas e programar para aparecerem quando $18 < a < 19$.
- Discutir sobre os sinais de desigualdade, que representam um determinado intervalo para que cada figura apareça.
- Destacar que a desigualdade poderia ser escrita da forma: $19 > a > 18$ e também estaria correto.
- Criar o cenário, colocar fundo, enfeitar.
- Botões INICIAR e VOLTAR.
- Discutir sobre a proposição IniciarAnimação ser uma verdade ou não.
- Desabilitar os objetos (funções, controles, pontos, malha e eixos).
- Gravar.

APÊNDICE IV – Roteiro construção-discussão cenário Abelha simples

Principais conteúdos:

- Função afim caracterizada como crescente;
- Função afim caracterizada como decrescente;
- Função afim caracterizada como constante;
- Função por partes;
- Coeficiente angular;
- Coeficiente linear;

Conteúdos extra:

- Plano cartesiano;
- Reta numérica (números reais);
- Coordenadas de pontos;
- Distância entre dois pontos;
- Expressões algébricas;
- Ângulos;
- Pontos que pertencem a função;
- Domínio;
- Lógica matemática;
- Intervalos;
- Desigualdade.

Objetivos:

- Relacionar a posição do gráfico da função com os valores dos coeficientes.
- Estabelecer relação entre função, controle deslizante e os pontos da figura.
- Relacionar que o domínio da função determina o intervalo que está sendo considerado para que a função exista.
- Estabelecer corretamente os intervalos do domínio de cada função, usando os símbolos de desigualdade e/ou igualdade.
- Identificar que cada valor de x se relaciona apenas com um único valor de y .

Discussões e Passo a Passo (tempo do vídeo-tutorial):

- Apresentar o cenário animado pronto (00:10).
- Abrir uma nova janela do GeoGebra (00:31).
- Buscar a figura da abelha na internet, em formato png (00:42).
- Inserir a figura da abelha (00:57).
- Mostrar que a figura é atrelada a dois pontos. Em seguida, movimentar os pontos e a figura (01:13).
 - *Ressaltar que iremos começar a estruturar/construir o caminho que a abelha vai percorrer (01:25).*
- Criar uma função afim constante: $f(x)=2$ (01:32).
 - *Discutir que o valor da lei de formação da função pode ser alterado; testar outros valores, por exemplo: $f(x)=3$, $f(x)=-4$, $f(x)=-0.5$.*
 - *Questionar sobre o que esse valor está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano.*

- Em um outro arquivo, caso seja melhor, pode ser criado um controle deslizante (a) com intervalo mínimo de -5 e máximo de 5 e uma função $g(x) = a$. Em seguida, animar o controle deslizante e questionar os alunos sobre o que ocorre com o gráfico da função no plano (relacionando a lei de formação na janela de álgebra).
- Questionar os alunos se em algum momento o gráfico da função se torna coincidente com o eixo x.
- Questionar se a função tem comportamento crescente ou decrescente.
- Discutir que nesse caso a função é constante, diferente das outras duas funções vistas em construções anteriores.
- Discutir que esse valor (a) pode ser qualquer um. Pedir que citem exemplos.
- Plotar pontos quaisquer sobre o gráfico da função e observar que os valores de x dos pontos são diferentes, estão variando, mas todos os valores de y dos pontos sobre a função são os mesmos. Por exemplo (1,2); (2,2); (19,2).
- Mover um dos pontos sobre o gráfico da função e destacar/discutir com os alunos que os valores de x dos pontos que pertencem a função variam. Então, a coordenada de y pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.
- O valor da coordenada de y do ponto, nesse caso, permanece 2 para qualquer posição do ponto sobre o gráfico da função e independentemente do valor assumido por x dentro do conjunto dos números reais.
- Destacar que para cada ponto que pertence a função, a coordenada de x se relaciona com um único valor de y.
- Discutir que existe uma relação de dependência entre os valores das coordenadas dos pontos, de forma que os valores de x são variáveis independentes, enquanto os valores das coordenadas de y são variáveis dependentes de x e, neste caso, é sempre o mesmo (pode-se tomar como base o padrão observado).
- Discutir/apontar que a lei de formação (lei matemática - função) é uma forma de estabelecer a relação entre os valores de x e y, que seguem determinado padrão.
- Mudar a definição dos dois pontos atrelados a figura da abelha (A) (02:10) (B) (02:49) para Ponto(f).
 - Mover os pontos e depois a figura (clikando e arrastando).
 - Discutir que os pontos, com essa definição, ficam somente sobre a função e deformam a figura quando são arrastados.
 - Apontar que se não tiver ação do usuário sobre os pontos ou sobre a figura no software eles irão permanecer parados, sem animação.
 - Destacar que podem selecionar a opção “animar” e os pontos se movem sobre o gráfico da função, mas não serão limitados em um intervalo específico e irão se mover infinitamente sobre o gráfico até que o usuário pause a animação.
- Criar uma função afim caracterizada como crescente: $g(x) = x - 1$ (03:30).
 - Discutir/relembrar que esse valor é chamado de coeficiente angular e que ele interfere na declividade.
 - Discutir/relembrar que ele deve ser maior do que zero para que a função seja crescente. Citar exemplos ou pedir a eles que citem.
 - Plotar dois pontos quaisquer sobre o gráfico e observar que se $x_1 > x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$ ocorre então a função é crescente.
 - Questionar sobre o que o segundo valor, neste caso -1, está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano. Citar exemplos ou pedir a eles que citem.

- *Discutir/relembrar que o segundo valor é chamado de coeficiente linear e que ele determina a posição em que o gráfico da função intercepta o eixo y.*
 - *Mover um dos pontos sobre o gráfico da função e destacar/discutir com os alunos que os valores de x dos pontos que pertencem a função variam. Então, a coordenada de x pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.*
 - *Discutir que nesse caso o valor da coordenada de y dos pontos que pertencem a função também variam. Então, a coordenada de y pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.*
 - *Destacar que para cada ponto que pertence a função, a coordenada de x se relaciona com um único valor de y.*
 - *Escolher algumas coordenadas de pontos que pertencem a função e apontar o padrão que existe entre os valores de x e y.*
 - *Discutir que existe uma relação de dependência entre os valores das coordenadas dos pontos, de forma que os valores de x são variáveis independentes, enquanto os valores das coordenadas de y são variáveis dependentes de x (pode-se tomar como base o padrão observado).*
 - *Discutir/apontar que a lei de formação (lei matemática - função) é uma forma de estabelecer a relação entre os valores de x e y, que seguem determinado padrão.*
- *Mudar a definição dos dois pontos atrelados a figura da abelha (A) (04:27) (B) (04:50) para Ponto(g).*
 - *Mover os pontos e depois a figura (clicando e arrastando).*
 - *Discutir que os pontos, com essa definição, ficam somente sobre a função e deformam a figura quando são arrastados.*
 - *Apontar que se não tiver ação do usuário sobre os pontos ou sobre a figura no software eles irão permanecer parados, sem animação.*
 - *Destacar que podem selecionar a opção “animar” e os pontos se movem sobre o gráfico da função, mas não serão limitados em um intervalo específico e irão se mover infinitamente sobre o gráfico até que o usuário pause a animação.*
 - *Criar uma função afim caracterizada como decrescente: $h(x) = -x + 11$ (05:17).*
 - *Discutir/relembrar que esse valor é chamado de coeficiente angular e que ele interfere na declividade.*
 - *Discutir/relembrar que ele deve ser menor do que zero para que a função seja decrescente. Citar exemplos ou pedir a eles que citem.*
 - *Plotar dois pontos quaisquer sobre o gráfico e observar que se $x_1 > x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$ ocorre então a função é decrescente.*
 - *Questionar sobre o que o segundo valor, neste caso 11, está interferindo na posição do gráfico no plano cartesiano. Citar exemplos ou pedir a eles que citem.*
 - *Discutir/relembrar que o segundo valor é chamado de coeficiente linear e que ele determina a posição em que o gráfico da função intercepta o eixo y.*
 - *Mover um dos pontos sobre o gráfico da função e destacar/discutir com os alunos que os valores de x dos pontos que pertencem a função variam. Então, a coordenada de x pode ser definida como uma variável, pois seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.*
 - *Discutir que nesse caso o valor da coordenada de y dos pontos que pertencem a função também variam. Então, a coordenada de y pode ser definida como uma variável, pois*

- seu valor não é fixo nem único, e representa diferentes números que pertencem ao conjunto dos números reais.*
- *Destacar que para cada ponto que pertence a função, a coordenada de x se relaciona com um único valor de y.*
 - *Escolher algumas coordenadas de pontos que pertencem a função e apontar o padrão que existe entre os valores de x e y.*
 - *Discutir que existe uma relação de dependência entre os valores das coordenadas dos pontos, de forma que os valores de x são variáveis independentes, enquanto os valores das coordenadas de y são variáveis dependentes de x (pode-se tomar como base o padrão observado).*
 - *Discutir/apontar que a lei de formação (lei matemática - função) é uma forma de estabelecer a relação entre os valores de x e y, que seguem determinado padrão.*
- *Mudar a definição dos dois pontos atrelados a figura da abelha (A) (05:44) (B) (05:56) para Ponto(h).*
 - *Mover os pontos e depois a figura (clitando e arrastando).*
 - *Discutir que os pontos, com essa definição, ficam somente sobre a função e deformam a figura quando são arrastados.*
 - *Apontar que se não tiver ação do usuário sobre os pontos ou sobre a figura no software eles irão permanecer parados, sem animação.*
 - *Destacar que podem selecionar a opção “animar” e os pontos se movem sobre o gráfico da função, mas não serão limitados em um intervalo específico e irão se mover infinitamente sobre o gráfico até que o usuário pause a animação.*
 - *Restringir o domínio de cada uma das funções, para limitar os gráficos e formar um caminho para a abelha (06:20).*
 - *Discutir que as funções possuem os gráficos infinitos, mas iremos considerar apenas uma parte de cada um deles para compor o trajeto da abelha.*
 - *Dessa forma, discutir que precisamos limitar o caminho que a abelha vai percorrer, restringindo a função para que ela exista apenas para alguns valores em relação ao eixo x.*
 - *Restringir o domínio da função $f(x)$: $Se(-2 \leq x \leq 3, f(x))$ (06:55).*
 - *Destacar que é em relação ao eixo x que selecionamos os valores, pois é o eixo do domínio (07:15).*
 - *Para isso temos que comunicar ao software a escolha de uma maneira que ele consiga interpretar. O comando uso é o “Se(<Condição>, <Então>) (07:23).*
 - *Discutir que depois de dada uma condição deve-se indicar a qual objeto estamos nos referindo (07:31).*
 - *Restringir o domínio da função $g(x)$: $Se(3 < x \leq 6, g(x))$ (08:15).*
 - *Restringir o domínio da função $h(x)$: $Se(6 < x \leq 9, h(x))$ (09:14).*
 - *Discutir que na condição os sinais de desigualdade devem estar corretos para que tenha validade matemática. Também ressaltar que não existe apenas uma forma de escrita, como por exemplo as condições poderiam ser escritas das formas: $3 >= x >= -2$; $6 >= x > 3$; $9 >= x > 6$.*
 - *Discutir que antes o domínio da função era o conjunto dos números reais, mas agora, com o domínio restringido, a função só existe para aquele determinado intervalo.*
 - *Ressaltar que a figura, no momento, só está sobre a função $h(x)$ (10:06).*

- *Discutir que precisamos que a abelha percorra todo o caminho, então temos que unir as partes limitadas de cada função (10:35).*
- *Unir as três funções em uma função só, uma função por partes (10:48).*
- *Criar a função por partes: Se $(-2 \leq x \leq 3, f(x))$, $(3 < x \leq 6, g(x))$, $(6 < x \leq 9, h(x))$ (11:08).*
 - *Discutir que uma função por partes é formada por ao menos duas funções.*
 - *Discutir que continua sendo função e tem comportamentos diferentes em cada intervalo.*
- *Mudar a definição dos dois pontos atrelados a figura da abelha (A) (12:14) (B) (12:20) para Ponto(s).*
 - *Mover os pontos e depois na figura (clicando e arrastando).*
 - *Discutir que os pontos, com essa definição, ficam somente sobre a função e deformam a figura quando são arrastados.*
 - *Apontar que se não tiver ação do usuário sobre os pontos ou sobre a figura no software eles irão permanecer parados, sem animação.*
 - *Relembrar que na construção final bastava clicar nos botões e a abelha se movia (12:49).*
 - *Com base na outra construção, pode-se relembrar, com a ajuda dos alunos, que uma maneira de ter animação e movimento mecânico é por meio da ferramenta controle deslizante (12:57).*
- *Criar o controle deslizante (a) com intervalo de -2 a 9 e incremento de 0.1 (13:00).*
 - *Discutir que os valores de máximo e mínimo do controle deslizante (a) estão relacionados com os valores do domínio da função $s(x)$, pois é o controle que possibilitará animação dos pontos em relação a função $s(x)$.*
 - *Ressaltar que como o menor valor do domínio da função $s(x)$ é -2 e o máximo é 9, esses serão os valores do intervalo do controle deslizante.*
 - *Para que, ao animar o controle deslizante, a abelha se mova em relação a função $s(x)$ e passe a impressão de ser um movimento contínuo o incremento deve ser um valor pequeno, como o escolhido 0.1.*
- *Relacionar controle deslizante, função por partes $s(x)$ e ponto da figura (13:36).*
- *Mudar a definição do ponto a esquerda da figura (B) para $(a, s(a))$ (14:01).*
- *Mover ou animar o controle deslizante (a) verificando se o ponto B está se movendo sobre o gráfico da função $s(x)$ (14:30).*
 - *Discutir que como o controle deslizante (a) tem a característica de representar vários valores dentro de um intervalo, ele pode ser usado na coordenada do ponto para que varie os valores de x e, conseqüentemente, os de y ou $f(x)$ também.*
 - *Pode-se evidenciar que se x variar vai fazer com que y ou $f(x)$ também seja alterado, conforme a lei de formação estabelecida. Também temos que os pontos da função são escritos da forma $(x, f(x))$. Logo, se x for substituído pelo controle deslizante “a” temos que substituir em $f(x)$ também, pois $f(x)$ obedece a x que obedece ao controle deslizante “a”. Então $(a, s(a))$.*
 - *Discutir que, nesse caso, a função é por partes, composta por uma parte de $f(x)$, uma parte da $g(x)$ e uma parte da $h(x)$, mas que as características de cada função afim continuam presentes no todo e em cada parte dela.*
 - *Discutir que é necessário alterar a definição do ponto A para que se mova e acompanhe o ponto B, também relacionado à função e ao controle deslizante (a) (14:45). Mas na definição deve ter algo diferente.*

- Destacar que a definição do ponto A não pode ser a mesma definição do ponto B, pois se forem os pontos ficam sobrepostos/coincidentes (14:57) e não há mais figura da abelha no plano.
- Destacar que é em relação ao eixo x a diferença (15:15).
- Mudar a definição do ponto à direita da figura (A) para $(a-1,s(a))$, citando exemplos (15:27).
 - Apontar que o ponto A, que também está atrelado a figura, precisa ser relacionado com o controle deslizante e a função, para que acompanhe o ponto B e passe a impressão de se mover sobre o plano.
 - Discutir que a definição do ponto A é semelhante ao do ponto B, mas deve ter algum incremento/diferença em relação a coordenada de x, pois os pontos devem manter uma distância para que a figura apareça no plano.
 - Discutir que se o segundo ponto (A) estiver à direita do primeiro ponto (B) algum valor deve ser somado a coordenada de x do segundo ponto, por exemplo $A=(a+1,s(a))$.
 - Discutir que se caso o segundo ponto (A) esteja à esquerda do primeiro ponto (B) algum valor deve ser subtraído a coordenada de x do segundo ponto, por exemplo $A=(a-1,s(a))$.
 - Ressaltar que o valor que for colocado junto a definição da coordenada de x do segundo ponto (A) indica o tamanho da figura no plano em relação a horizontal (15:47).
 - Nesse caso, como o ponto A na construção do cenário está à esquerda do ponto B, então o valor deve ser subtraído.
 - Ressaltar que para que a figura não fique torta o valor de y para os dois pontos deve ser o mesmo.
- Mover ou animar o controle deslizante (a) verificando se o ponto A também está se movendo (16:06).
 - Discutir que nessa parte da construção, podemos efetivamente destacar a variável, pois é possível visualizar a variação de valores nas coordenadas de e dos pontos atrelados à figura que se movem sobre a função.
- Criar o cenário, com as figuras (enfeitar) (16:18).
- Colocar a figura da abelha na frente da árvore (camadas) caso a figura da abelha fique atrás (16:37).
- Botões INICIAR (17:26) e VOLTAR (18:43).
 - Discutir sobre a proposição IniciarAnimação ser uma verdade ou não.
- Desabilitar os objetos (funções, controles, pontos, malha e eixos) (19:30).
- Gravar a construção (19:50).

APÊNDICE V – Roteiro construção-discussão cenário Abelha completa

Principais conteúdos:

- Definição de Função;
- Função afim caracterizada como crescente;
- Função afim caracterizada como decrescente;
- Função afim caracterizada como constante;
- Função por partes;
- Coeficiente angular;
- Coeficiente linear;

Conteúdos extra:

- Plano cartesiano;
- Reta numérica (números reais);
- Coordenadas de pontos;
- Distância entre dois pontos;
- Expressões algébricas;
- Ângulos;
- Pontos que pertencem a função;
- Domínio;
- Lógica matemática;
- Intervalos;
- Desigualdade.

Objetivos:

- Compreender a definição de função, especificamente que cada valor de x , do conjunto domínio, se relaciona com um único valor de y do contradomínio.

Os conteúdos envolvidos nesta construção já foram contemplados e discutidos em construções anteriores. O objetivo deste cenário é que os alunos realizem a construção sozinhos retomando esses conteúdos. Espera-se que a partir das estratégias que criarem para desenvolver o caminho de retorno da abelha, seja possível verificar se os alunos compreenderam esses conteúdos matemáticos. Para isso, os alunos serão questionados sobre as escolhas que fizeram para a construção, em especial sobre os elementos da função que utilizarem. Portanto, neste roteiro-discussão o foco não é dar prioridade às ações do professor para conduzir as discussões, mas indicar sugestões de questionamentos sobre as ações que os alunos podem desenvolver para construir o cenário.

Desse modo, o passo a passo do vídeo e do roteiro são sugestões de construção, considerando a dinâmica da construção deste cenário, como já explicitada.

Discussões e Passo a Passo (tempo do vídeo-tutorial):

- Mostrar o cenário pronto (00:00).
- Partir da construção da Abelha simples (00:23).
- *Indicar que os alunos podem partir da construção da abelha simples, feita no encontro anterior.*

- Criar uma função uma função afim caracterizada como crescente. Função sugerida: $i(x)=2x-16$ (01:33).
- Criar uma função uma função afim caracterizada como constante. Função sugerida: $j(x)=-1$ (02:09).
- Criar uma função uma função afim caracterizada como decrescente. Função sugerida: $k(x)=-x$ (02:26).
 - Durante o processo de construção questionar como os alunos pretendem criar o caminho de retorno da abelha.
 - Durante a escolha ou depois das funções criadas no GeoGebra, questionar o aluno sobre o que cada valor (coeficientes) em cada uma das funções, interfere na posição do gráfico no plano cartesiano.
 - Questionar se alguma das funções escolhidas por eles tem o comportamento crescente, decrescente ou constante. Pedir que justifiquem em cada um dos casos.
 - No caso da função afim caracterizada como crescente ou decrescente, para que a função fique mais/menos inclinada, o que deve ser feito? Qual é o coeficiente que interfere nisso?
 - Ainda no caso da função afim caracterizada como crescente ou decrescente, se a função tiver que estar mais à direita/esquerda, o que deve ser feito? Qual é o coeficiente que interfere nisso?
 - Questionar se, com as funções escolhidas por eles, é possível criar o trajeto de retorno da abelha, semelhante ao da construção final.
 - No caso da função afim caracterizada como constante, se a função tiver que estar mais para cima/baixo, o que deve ser feito?
 - Em cada uma das funções escolhidas por eles, qual é o conjunto domínio?
 - Se for plotado um ponto no gráfico de alguma das funções, sem mover ele, quantos valores há para x e para y ?
- Restringir o domínio de cada uma das funções, Se $(-2 \leq x \leq 1, k(x))$ (03:05); Se $(1 < x \leq 7.5, j(x))$ (03:47); Se $(7.5 < x \leq 9, i(x))$ (04:15).
 - Questionar os alunos sobre como eles pretendem limitar o caminho para a abelha retornar.
 - Questionar sobre qual elemento matemático estão alterando.
 - Conforme eles colocam o intervalo para cada função, questionar sobre os sinais de desigualdade. Se conseguem escrever de uma outra forma.
 - Questionar a razão de colocar o “ x ” junto no intervalo.
 - Questionar se os valores selecionados para o intervalo de cada função permitem criar um caminho contínuo de retorno para a abelha.
 - Indicar outros intervalos para as funções e questionar os alunos sobre como ficaria o comando; questionar também sobre como seria o gráfico da função.
 - Questionar se um mesmo intervalo, ou parte dele, for considerado para duas funções diferentes será possível construir a função de retorno, tomando esses intervalos como base.
- Tentar construir a função de retorno na mesma função por partes ($s(x)$) (05:18).
 - Questionar se deu certo, essa estratégia. Se não deu, solicitar que justifiquem.
 - Questionar se os intervalos estão corretos, por que o software não representa o gráfico?
 - Questionar se é um problema matemático ou no software.
 - Questionar sobre a definição de função, se recordam das aulas anteriores.

- Por meio da função de retorno junto com a função de ida da abelha, selecionar um valor para x e pedir que indiquem qual é o valor correspondente em y .
- Questionar se a correspondência existe ou não. Solicitar que justifiquem.
- Destacar que o gráfico não fica como desejado (06:00).
- Definição de função (06:25).
 - Questionar se os alunos têm alguma sugestão de estratégia para construir o caminho de retorno da abelha, visto que colocar tudo em uma sentença não é correto.
- Criar a segunda função por partes de retorno da abelha ($h_1(x)$) (08:10).
 - Caso surja a ideia de criar uma segunda função por partes, composta pelos intervalos de $i(x)$, $j(x)$ e $k(x)$, questionar se isso não fere a definição de função.
 - Questionar se a função por partes de retorno forma um caminho contínuo.
- Inserir uma outra imagem da abelha (10:03).
 - Questionar a razão de inserir mais uma imagem no plano.
 - Questionar como pretendem seguir com a construção.
- Criar o controle deslizante (b) com intervalo de -2 a 9 e incremento de 0.1 (10:29).
 - Questionar sobre os valores de máximo e mínimo escolhidos para o controle deslizante.
 - Questionar sobre o valor do incremento.
- Mudar a definição do ponto a esquerda da figura (V) para (b, $h_1(b)$) (10:51).
 - Questionar o motivo de um dos pontos da figura da abelha ter essa definição.
 - Questionar o motivo da coordenada x do ponto ser um controle deslizante.
 - Questionar o motivo do valor da coordenada de y do ponto ser escrito dessa forma.
 - Caso os alunos mudem a definição dos pontos da segunda figura para Ponto(h_1), questionar como irão limitar o movimento dos pontos da figura no plano.
- Mover ou animar o controle deslizante (b) verificando se o ponto V está se movendo sobre o gráfico da função $h_1(x)$ (11:30).
- Mudar a definição do ponto à direita da figura (U) para (b-1, $h_1(b)$) (11:43).
 - Questionar o motivo de um dos pontos da figura da abelha ter essa definição.
 - Questionar o motivo da coordenada x do ponto ser um controle deslizante.
 - Questionar sobre -1 estar na definição do ponto, junto a coordenada de x .
 - Questionar os alunos sobre como alterar o tamanho da figura no plano.
 - Questionar o motivo do valor da coordenada de y do ponto ser escrito dessa forma.
 - Questionar por que os valores das coordenadas de y dos dois pontos da segunda figura da abelha são iguais, e os valores das coordenadas de x diferentes.
 - Caso os alunos mudem a definição dos pontos da segunda figura para Ponto(h_1), questionar como irão limitar o movimento dos pontos da figura no plano.
- Mover ou animar o controle deslizante (b) verificando se o ponto U também está se movendo (12:16).
- Programar a segunda imagem para aparecer em certo momento e a primeira desaparecer (12:23).
 - Questionar sobre o que vão fazer para que fique uma figura de abelha por vez na construção do cenário.
 - Questionar sobre os valores dos controles escolhidos por eles para exibir cada figura.

- Programar os controles para animarem um na sequência do outro (14:07).
 - *Questionar sobre quais valores os controles devem iniciar a animação.*
 - *Questionar sobre qual o comportamento de cada controle deslizante para que um tenha animação na sequência do outro.*
 - *Questionar sobre como podem comunicar ao software que quando um controle parar o outro deve iniciar.*
- Arrumar os botões (18:30).
 - *Questionar sobre como podem comunicar ao software que quando for clicado no botão INICIAR apenas o controle deslizante a tenha animação e sempre inicie no mesmo valor.*
 - *Questionar sobre como podem comunicar ao software que quando for clicado no botão VOLTAR os dois controles deslizantes permaneçam sem animação e no valor de partida.*

APÊNDICE VI – Questões sobre as características da função afim

Alunos: _____

Tomando como base o cenário animado Abelha, responda as questões abaixo explicando o raciocínio usado:

1. Depois de construir o cenário animado Abelha, escreva quais funções você escolheu para formar o caminho da abelha, indicando qual é a função crescente, qual é a função decrescente e qual é a função constante. Explique como classificou cada tipo de função.

Espera-se que os alunos usem ao menos três funções para compor o caminho da abelha e indiquem seu comportamento.

2. Depois que a figura da abelha está sendo movimentada sobre o caminho, por meio do controle deslizante, (para isso movimente/anime o controle deslizante para mover os pontos da figura), o que ocorre com as coordenadas x e y desses pontos? Quais são os valores que x e y podem assumir?

Espera-se que os alunos observem que as coordenadas x e y dos pontos da figura da abelha estão relacionados com a função e são alterados e variam conforme o controle é animado. Os valores assumidos pelas coordenadas dos dois pontos são todos os valores reais.

3. Deixe a figura da abelha sobre a função crescente (caminho criado para a abelha subir) e anote as coordenadas x e y do ponto da figura pertencente ao gráfico da função.

(_____ , _____)

4. Movimente o controle deslizante para deixar a figura da abelha em outra posição no gráfico da função crescente e registre as coordenadas x e y do ponto da figura pertencente ao gráfico da função.

(_____ , _____)

5. Movimente o controle deslizante mais duas vezes e anote as coordenadas do ponto que está sobre o gráfico da função crescente. As posições da figura não podem ser repetidas.

(_____ , _____) (_____ , _____)

Espera-se que os alunos indiquem as coordenadas de 4 pontos que pertencem à função, neste caso a função afim caracterizada como crescente, e que as coordenadas sejam diferentes para que eles observem o padrão que é solicitado na próxima questão.

6. Comparando os valores de x e de y nas questões 3, 4 e 5 qual o padrão que eles seguem?

Espera-se que os alunos observem e identifiquem que se comparados os valores de x e y pode-se estabelecer um padrão. Por exemplo:

-se a função for $f(x)=2x$, os valores de y sempre são o dobro dos valores de x em cada coordenada;

-se a função for $f(x)=3x+1$, em cada coordenada os valores de y sempre são o triplo de x somados a uma unidade;
 -se a função for $f(x)=x-2$, o valor de y , em cada coordenada, é o valor de x subtraído duas unidades.

7. Realize o processo da questão 3, 4 e 5, considerando a função decrescente utilizada e indique o padrão entre os valores das coordenadas.

(_____ , _____) (_____ , _____) (_____ , _____) (_____ , _____)

Espera-se que os alunos indiquem as coordenadas de 4 pontos que pertencem a função, neste caso a função afim caracterizada como decrescente, e que as coordenadas sejam diferentes.

Espera-se também que os alunos observem e identifiquem que se comparados os valores de x e y pode-se estabelecer um padrão. Por exemplo:

-se a função for $g(x)=-3x$, os valores de y sempre são o triplo negativo dos valores de x em cada coordenada;
 -se a função for $g(x)=-2x+3$, em cada coordenada os valores de y sempre são o dobro negativo de x somados a três unidades positivas;
 -se a função for $g(x)=-x-4$, o valor de y , em cada coordenada, é o valor de x , mas negativo, e diminuído quatro unidades.

8. Realize o mesmo processo das questões 3, 4 e 5 para a função constante utilizada e indique o padrão entre os valores das coordenadas.

(_____ , _____) (_____ , _____) (_____ , _____) (_____ , _____)

Espera-se que os alunos indiquem as coordenadas de 4 pontos que pertencem a função, neste caso a função afim caracterizada como constante, e que as coordenadas sejam diferentes.

Espera-se que os alunos observem e identifiquem que se comparados os valores de x e y pode-se estabelecer o padrão de que independentemente da lei de formação escolhida, o valor de x irá variar, mas o valor de y sempre será igual ao valor indicado na função. Por exemplo:

-se a função for $h(x)=3$, os valores de y sempre serão 3, enquanto os valores de x podem variar;
 -se a função for $h(x)=1.5$ os valores de y sempre são 1.5, enquanto os valores de x podem variar.

9. Tomando como base o padrão observado conforme as coordenadas x e y em cada caso (função afim caracterizada como crescente, decrescente ou constante), escreva a relação entre x e y por meio de uma expressão algébrica (possui letras e números) que represente a relação em cada um dos casos a seguir:

- a. Padrão das coordenadas da função crescente:

Espera-se que, com base nas descrições dos padrões observados, os alunos consigam escrever em termos matemáticos as relações:

1º exemplo: $y = x + x$ ou $y=2x$ ou $f(x)=x+x$ ou $f(x)=2x$

2º exemplo: $y = x + x + x + 1$ ou $y = 3x + 1$ ou $f(x) = x + x + x + 1$ ou $f(x) = 3x + 1$

3º exemplo: $y = x - 2$ ou $f(x) = x - 2$

b. Padrão das coordenadas da função decrescente:

Espera-se que, com base nas descrições dos padrões observados, os alunos consigam escrever em termos matemáticos as relações:

1º exemplo: $y = -x - x - x$ ou $y = -3x$ ou $g(x) = -x - x - x$ ou $g(x) = -3x$

2º exemplo: $y = -x - x + 3$ ou $y = -2x + 3$ ou $g(x) = -x - x + 3$ ou $g(x) = -2x + 3$

3º exemplo: $y = -x - 4$ ou $g(x) = -x - 4$

c. Padrão das coordenadas da função constante:

Espera-se que, com base nas descrições dos padrões observados, os alunos consigam escrever em termos matemáticos as relações:

1º exemplo: $y = 3$ ou $h(x) = 3$

2º exemplo: $y = 1.5$ ou $h(x) = 1.5$

10. É possível obter/determinar o valor da coordenada y do ponto sem ter o valor de x?

Espera-se que os alunos observem e indiquem que para obter o valor de y é necessário, primeiro, indicar/escolher o valor para x. No caso da função constante, os valores de y será sempre o mesmo, independentemente do valor de x.

11. Tomando como base as respostas das questões 3, 4, 5, 7 e 8, qual é a variável independente (a que você escolhe)? E qual é a variável dependente (que muda a partir dessa escolha)?

Espera-se que os alunos observem que as coordenadas de y dos pontos, nos três casos, dependem dos valores de x. Logo, x é a variável independente e y é a variável dependente.

12. Observe as coordenadas dos pontos pertencentes ao gráfico da função que foram registradas nas questões 3, 4, 5, 7 e 8. Perceba que, para cada ponto, a variável x assume um valor. Em cada ponto há quantos valores de y correspondentes a esse valor de x?

Espera-se que os alunos indiquem que para cada valor de x existe um valor de y correspondente.