UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MODELOS MATEMÁTICOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Débora da Rocha de Paula Santos

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

Campo Mourão,
2025

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

MODELOS MATEMÁTICOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Débora da Rocha de Paula Santos

Orientador:
Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em educação matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Junho de 2025

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Paula Santos, Débora da Rocha de
Modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental / Débora da Rocha de Paula Santos. -- Campo Mourão-PR,2025.
114 f.

Orientador: Michele Regiane Dias Veronez.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2025.

1. Educação Matemática. 2. Modelagem Matemática. 3. Modelos matemáticos. 4. Anos Iniciais. 5. Ensino Fundamental. I - Dias Veronez, Michele Regiane (orient). II - Título.

Débora da Rocha de Paula Santos

"MODELOS MATEMÁTICOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL."

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Presidente da Comissão Examinadora
UNESPAR/Campo Mourão

Profa. Dra. Veridiana Rezende
Membro da Banca
UNESPAR/Campo Mourão

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
Membro da Banca
UEM/Maringá

Resultado: aprovada

Campo Mourão
Junho/2025

Dedico o presente trabalho à Deus, por me dar força, sabedoria e saúde para trilhar este caminho, iluminando cada passo e me sustentando em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, que em sua infinita bondade fez uma promessa ao meu coração e fielmente a cumpriu. Esta jornada foi marcada por desafios intensos, por momentos de silêncio, cansaço e incertezas, mas em todos eles, o Senhor se fez presente, conduzindo meus passos, sustentando minha fé e renovando minhas forças quando eu já não via saída. Cada detalhe deste percurso carrega o cuidado e a presença dele, que nunca me deixou desistir.

Agradeço à minha família, meu alicerce de amor e apoio incondicional. À minha mãe, pelas orações que me acompanharam em cada etapa desta jornada, fortalecendo-me com sua fé e carinho. Ao meu pai, pelo apoio constante, e a todos os familiares que me incentivaram a não desistir e a seguir perseverando.

De forma muito especial, agradeço ao meu marido, Maurício Lourenço dos Santos, por sua imensa paciência, pelo amor, apoio incondicional e incentivo diário. Sua compreensão diante das minhas ausências, a escuta atenta, o cuidado constante e a força que me ofereceu em todos os momentos foram fundamentais para que eu pudesse seguir firme até aqui. Sem o seu apoio, este caminho teria sido muito mais difícil.

À minha orientadora, professora Michele Regiane Dias Veronez, minha profunda gratidão pela escuta generosa, pelas orientações sempre atentas e pela confiança no meu trabalho. Sua dedicação, sensibilidade e compromisso foram fundamentais na construção deste percurso.

Agradeço também às professoras da banca, Lilian Akemi Kato e Veridiana Rezende, pelas contribuições valiosas, pelos olhares atentos e pelas sugestões que enriqueceram esta pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM), agradeço pelo conhecimento compartilhado, pela dedicação e pelo compromisso com a formação de cada discente. Às amigas de caminhada, que estiveram ao meu lado dividindo angústias, anseios e conquistas, minha sincera gratidão.

Ao Grupo de Estudos sobre Práticas de Modelagem na Educação Matemática – GEPMEM, agradeço pelas ricas trocas durante as reuniões, pelos aprendizados construídos coletivamente, pelos momentos de partilha, amizade, incentivo e cuidado.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esta caminhada fosse possível e repleta de aprendizado.

RESUMO

Investigar acerca dos modelos matemáticos desenvolvidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática é nosso interesse. Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa empírica com respaldo na abordagem qualitativa de pesquisa e nos pautamos nos referenciais teóricos da Modelagem Matemática na Educação Matemática para subsidiar nosso estudo e tecer nossas inferências e considerações. No processo analítico consideramos atividades de modelagem matemática desenvolvidas por crianças cujas idades variam entre 9 e 10 anos, de uma turma de quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Neste relatório de pesquisa, cujo formato é multipaper, apresentamos o estudo realizado a partir de dois artigos, que articulados, tratam a temática em foco. No primeiro artigo investigamos: O que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? Os materiais de análise correspondem às imagens dos registros escritos das crianças e às transcrições das gravações, que consideram os debates instaurados nas aulas. Da análise inferimos sobre alguns aspectos que contribuem na e para a construção de modelos matemáticos pelas crianças e eles aparecem explicitados na seção de resultados e discussões desse artigo. Ainda como resultados afirmamos que tais aspectos decorrem (emergem) das características sob as quais podemos conceber tais modelos na modelagem na Educação Matemática. Ademais, concluímos que esses aspectos estão associados à articulação de três eixos: características da própria modelagem, o papel do professor e as ações das crianças. No segundo artigo buscamos responder à questão: Que características carregam os modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por crianças dos Anos Iniciais? No processo de análise consideramos capturas de imagens das produções das crianças, transcrições das gravações das aulas e das discussões nos pequenos grupos em atividades de modelagem. Os resultados indicam que os modelos matemáticos das crianças assumem representações diversas, tais como pictóricas, textuais, aritméticas, entre outras. Eles também atendem aos interesses das crianças, ou seja, são produzidos em associação com os conhecimentos que elas têm e a partir das estratégias que estabelecem na dinâmica colaborativa promovida pelas atividades de modelagem matemática. De modo geral, as representações utilizadas pelas crianças correspondem a recursos familiares à faixa etária delas e, em parte, resultam de estímulos provocados pela professora|pesquisadora. Conjuntamente, os resultados dos dois artigos indicam que a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais é uma prática relevante quando favorecida por contextos que estimulam a investigação, a interlocução e a mobilização de saberes prévios. Além disso, as especificidades observadas nos modelos matemáticos produzidos pelas crianças apontam para a importância de considerar as formas próprias de expressão delas e os modos como atribuem sentido às situações investigativas. Tais resultados reiteram a necessidade de práticas pedagógicas que reconheçam o potencial formativo da modelagem matemática desde os primeiros anos da escolarização e os alcances que a modelagem matemática têm quando se é dada atenção ao modelos matemáticos produzidos pelas crianças, já que eles são fruto de um processo progressivo, respaldado em avaliação, interpretação e reflexão.

Palavras-chave: Educação Matemática 1; Modelagem Matemática 2; Modelos matemáticos 3; Anos Iniciais 4; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

We are interested in investigating the mathematical models developed by children in the early years of elementary school in mathematical modeling activities. To this end, we conducted empirical research based on a qualitative approach and drew on the theoretical frameworks of Mathematical Modeling in Mathematics Education to support our study and inform our inferences and considerations. In the analytical process, we considered mathematical modeling activities developed by children aged 9 and 10 in a fourth-grade class at a public school. In this research report, in a multi-paper format, we present the study based on two articles that, together, address the topic in question. In the first article, we investigated: What contributes to and contributes to the construction of mathematical models by children in the early years of elementary school? The analytical materials consisted of images of the children's written records and transcripts of the recordings, which considered the discussions held in class. From the analysis, we inferred some aspects that contribute to and for the construction of mathematical models by children, and these are explained in the results and discussions section of this article. Furthermore, we assert that these aspects arise from (emerge from) the characteristics under which we can conceive such models in modeling in Mathematics Education. Furthermore, we conclude that these aspects are associated with the articulation of three axes: characteristics of the modeling itself, the role of the teacher, and the children's actions. In the second article, we sought to answer the question: What characteristics do mathematical models carry in mathematical modeling activities developed by children in the Early Years? In the analysis process, we considered screenshots of the children's productions, transcriptions of class recordings, and small group discussions during modeling activities. The results indicate that children's mathematical models assume diverse representations, such as pictorial, textual, arithmetic, among others. They also serve the children's interests, that is, they are produced in association with their knowledge and based on the strategies they establish in the collaborative dynamics promoted by mathematical modeling activities. In general, the representations used by children correspond to resources familiar to their age group and, in part, result from stimuli provided by the teacher/researcher. Taken together, the results of both articles indicate that the construction of mathematical models by children in the Early Years is a relevant practice when fostered by contexts that encourage investigation, dialogue, and the mobilization of prior knowledge. Furthermore, the specificities observed in the mathematical models produced by children highlight the importance of considering their own forms of expression and the ways in which they attribute meaning to investigative situations. These results reiterate the need for pedagogical practices that recognize the formative potential of mathematical modeling from the earliest years of schooling and the impact that mathematical modeling has when attention is paid to the mathematical models produced by children, as they are the result of a progressive process, supported by assessment, interpretation, and reflection.

Keywords: Mathematical Education 1; Mathematical Modeling 2; Mathematical Models 3; Initial Years 4; Elementary Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Situação inicial e situação final na Modelagem Matemática 16
Figura 1.2: Ciclo de modelagem matemática 17
Figura 1.3: Momentos de familiarização em atividades de modelagem 18
Figura 1.4: Indicadores da modelagem matemática nos Anos Iniciais, conforme Tortola (2016) 22
Figura 1.5: Organização da dissertação 36
Figura 2.1: Síntese da atividade: Cortinas na escola 51
Figura 2.2: Síntese da atividade: Câmeras na escola 52
Figura 2.3: Modelo matemático (largura X altura) que relaciona as medidas das janelas 56
Figura 2.4: Modelo matemático que indica que há dois tamanhos diferentes de janela 57
Figura 2.5: Modelo matemático que fornece uma resposta ao problema 59
Figura 2.6: Resposta ao problema das cortinas 60
Figura 2.7: Vista superior da escola 62
Figura 2.8: Informações sobre os cômodos e sobre a quantidade de cômodos com câmeras 64
Figura 2.9: Modelos matemáticos produzidos para descobrir a distribuição de câmeras na escola 66
Figura 2.10: Processo de construção dos modelos matemáticos na atividade “Cortinas na escola”. 68
Figura 2.11: Processo de construção dos modelos matemáticos na atividade “Câmeras na escola”. 70
Figura 2.12: Aspectos que contribuem na e para a construção de modelos matemáticos 71
Figura 3.1- Síntese da atividade: Quantidade de água 87
Figura 3.2- Modelo textual: Quantidade de água 87
Figura 3.3- Cálculos realizados pelas crianças 88
Figura 3.4- Modelo tabular: Quantidade de água 89
Figura 3.5- Síntese da atividade: Personalização de avatares em jogo eletrônico 91
Figura 3.6: Modelo pictórico: Personalização de avatares 91
Figura 3.7: Representação aritmética da solução do problema 92
Figura 3.8- Síntese da atividade: Livros na biblioteca 94
Figura 3.9- Modelo aritmético na atividade: Livros na biblioteca 95
Figura 3.10- Modelo textual: Livros na biblioteca 95
Figura 3.11- Síntese da atividade: Queimadas-Desmatamento 97
Figura 3.12- Organização dos dados da reportagem 98
Figura 3.13: Modelo aritmético na atividade: Queimadas-Desmatamento 99
Figura 3.14: Modelo tabular e Modelo textual 100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1: As atividades de modelagem matemática que compuseram o corpus investigativo……..……32

Quadro 3.1 : Modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais……..…….102

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GPMEM	Grupo de Estudos sobre Práticas de Modelagem na Educação Matemática
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

SUMÁRIO

1. CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO 12
1.1 Minha caminhada: da docência à presente pesquisa! 12
1.2 Algumas considerações acerca da modelagem matemática na Educação Matemática: entendimentos e modos de fazer 13
1.3 Modelagem matemática na sala de aula dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 19
1.4 Modelos matemáticos nos Anos Iniciais: possíveis configurações 23
1.5 Delimitação da problemática de pesquisa 28
1.6 Percurso metodológico da pesquisa 28
1.7 O cenário de investigação 31
1.8 As atividades de modelagem matemática desenvolvidas 32
1.9 A estrutura da dissertação 34
2.0 Referências 36
2. CAPÍTULO II – O QUE VEM ASSOCIADO AOS MODELOS MATEMÁTICOS QUANDO ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA SÃO DESENVOLVIDAS POR CRIANÇAS? 41
2.1 Introdução 42
2.2 Sobre Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 43
2.3 Modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 45
2.4 Encaminhamento metodológico 48
2.5 Os modelos matemáticos nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: como eles emergiram 53
2.6 Resultados e discussões 67
2.7 Considerações Finais 71
2.8 Referências 73
3. CAPÍTULO III – ESPECIFICIDADES DOS MODELOS MATEMÁTICOS PRODUZIDOS POR CRIANÇAS DOS ANOS INICIAIS 76
3.1 Introdução 76
3.2 Considerações sobre o fazer modelagem matemática nos Anos Iniciais 78
3.3 Modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: compreensões e configurações possíveis 81
3.4 Opções metodológicas 84
3.5 Modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais 86
3.6 Resultados e discussões 101
3.7 Considerações Finais 104
3.8 Referências 106
4. CAPÍTULO IV – CONSIDERAÇÕES FINAIS 109
Referências 114

1. CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

1.1 Minha caminhada: da docência à presente pesquisa!

O desejo por aprofundar meus estudos teve início ainda durante os estágios realizados no curso de Formação de Docentes, que cursei simultaneamente ao Ensino Médio. Essa formação foi um marco importante na minha trajetória, pois me proporcionou a experiência prática em sala de aula e a oportunidade de compreender os desafios enfrentados pelos professores que atuam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Posteriormente, quando cursei a graduação em Pedagogia pela Universidade Estadual do Paraná (Unespar) - Campus de Campo Mourão, atuando concomitantemente como professora, tive oportunidade de aliar teoria e prática, relacionando aspectos da minha formação acadêmica com o exercício da minha profissão de professora de turmas dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Essa vivência docente revelou realidades que me inquietavam. Percebi que muitas crianças tinham pouco interesse pela Matemática e tinham dificuldade em estabelecer conexão entre essa disciplina e situações práticas do cotidiano. Embora algumas crianças parecem ter afinidade com a Matemática, muitas outras parecem desmotivadas por não enxergar a utilidade da Matemática em suas vidas. O fato de ter me deparado com essa diversidade de perfis e interesses das crianças, despertou em mim uma necessidade de entender aspectos relacionados aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, me levou a enxergar a sala de aula como um espaço não apenas de ensino, mas também de investigação e construção de conhecimentos, tanto para as crianças quanto para mim enquanto professora.

Essa constatação me despertou alguns questionamentos, por exemplo: como criar estratégias que envolvam todas as crianças, independentemente de suas afinidades ou dificuldades iniciais? Tais inquietações passaram a guiar minha prática em sala de aula e, mais tarde, me moveram a avançar nos estudos. Com esse interesse investigativo, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM).

O processo inicial nesse programa de pós-graduação representou um divisor de águas na minha formação, pois, ao entrar em contato com a Modelagem Matemática[1] (tema até então desconhecido para mim), percebi uma possibilidade dessa alternativa pedagógica junto aos

[1] Neste relatório de pesquisa, opta-se por grafar *Modelagem Matemática* com iniciais maiúsculas quando se trata do campo de pesquisa na área da Educação Matemática e *modelagem matemática* em letras minúsculas quando se refere às atividades realizadas em sala de aula.

meus interesses didáticos. Sob os estudos indicados por minha orientadora e com o suporte do Grupo de Estudos sobre Práticas de Modelagem em Educação Matemática (GEPMEM), comecei a compreender como a modelagem pode contextualizar o aprendizado e conectar os conceitos matemáticos às experiências reais das crianças.

Ao aprofundar minhas leituras e participar das discussões no grupo de pesquisa fui gradualmente percebendo que a Modelagem Matemática oferece uma oportunidade para as crianças ressignificar conceitos de maneira mais ativa. Minha vivência como professora, aliada ao meu envolvimento com a modelagem matemática, fortaleceu minha convicção de que a Modelagem Matemática pode ser uma alternativa pedagógica interessante para aproximar a Matemática à realidade das crianças Foi a partir dessa percepção que surgiu o foco específico da minha pesquisa, que consiste em investigar acerca dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Os desafios vividos em sala de aula, meu desejo constante de melhorar a prática docente e o interesse pela Matemática me impulsionaram a buscar respostas para questões que sempre estiveram presentes no meu cotidiano. Essa articulação com a prática me faz olhar a pesquisa não apenas como um exercício acadêmico, mas como uma oportunidade de contribuir para a melhoria do ensino da Matemática, especialmente nos Anos Iniciais, etapa importante para a formação do pensamento matemático. Nesse sentido, minha trajetória pessoal e profissional está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento da investigação a qual me proponho.

O desenvolvimento da minha pesquisa não representa apenas mais uma etapa acadêmica na minha trajetória, mas simboliza a concretização de uma inquietação que surgiu desde meu primeiro contato com a sala de aula. Cada descoberta, cada reflexão e cada aprendizado ao longo desse percurso carregam um significado e denotam o meu interesse em contribuir para que a Matemática se torne mais acessível, envolvente e capaz de enriquecer a experiência de aprendizagem de todas as crianças.

1.2 Algumas considerações acerca da modelagem matemática na Educação Matemática: entendimentos e modos de fazer

A Modelagem Matemática embora tenha sido cunhada no contexto da Matemática Aplicada, na qual é reconhecida como método de pesquisa, já existia antes de sua formalização. De acordo com Biembengut (2009), “o termo ‘modelagem matemática’ como processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação-problema de alguma área do conhecimento encontra-se já no início do século XX na literatura de Engenharia e Ciências

Econômicas, por exemplo" (p. 7). No âmbito da Educação Matemática, ela começou a ganhar destaque a partir da década de 1980, consolidando-se como uma alternativa para articular situações do cotidiano com a Matemática.

> A Modelagem Matemática na educação brasileira tem como referência singulares pessoas, fundamentais no impulso e na consolidação da modelagem na Educação Matemática, tais como: Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Meyer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, que iniciaram um movimento pela modelagem no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, conquistando adeptos por todo o Brasil (Biembemgut, 2009, p. 8).

A partir desse período, a conceituação e a caracterização da Modelagem no campo da Educação Matemática "[...] têm tido diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas científicas" (Almeida, Silva; Vertuan, 2012, p. 12).

O avanço da Modelagem na Educação Matemática, tanto em termos teóricos como práticos, leva a uma variedade de caracterizações, que vem associada à diferentes formas de compreender o que é a modelagem, qual seu papel no ensino e como ela pode ser desenvolvida. Essas caracterizações assumem contornos distintos entre os pesquisadores da área, conforme as práticas pedagógicas que desenvolvem e os referenciais teóricos que adotam. Alguns autores a consideram uma metodologia (Burak, 2014; Biembengut; Hein, 2003) defendendo que ela deve estar presente de forma contínua no ambiente escolar, e não apenas ocasionalmente. Outros a veem como uma alternativa pedagógica (Almeida, Silva; Vertuan, 2012; Almeida; Brito, 2005) e tomam isso como pressupostos acerca de como eles compreendem a modelagem. Há também aqueles que interpretam a modelagem como uma concepção de Educação Matemática (Caldeira, 2009) ou, como um ambiente de ensino e aprendizagem (Barbosa, 2001).

Essas diferentes caracterizações atribuem à modelagem matemática características próprias, como os objetivos que ela visa alcançar, o papel que atribui ao professor e ao aluno, e os modos como os conteúdos matemáticos são mobilizados. Apesar das diferenças, todas convergem no entendimento de que a modelagem matemática está intrinsecamente associada à relação entre fenômenos reais e a Matemática, sendo um ponto comum que permeia todas as abordagens.

Tais caracterizações também se articulam com as práticas pedagógicas e finalidades educativas que se busca atingir. Quando se pretende que ela faça parte da prática pedagógica do professor, com foco no ensino de conceitos matemáticos, Galbraith (2012), sugere a

modelagem matemática como veículo, ou seja, como meio para construir modelos para aprender matemática. Nessa mesma direção, a modelagem também é caracterizada como uma alternativa pedagógica. Nas palavras de Almeida e Dias (2004) a modelagem compreendida dessa forma corresponde a:

> [...] uma alternativa para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, que pode proporcionar aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos da Matemática (p.25).

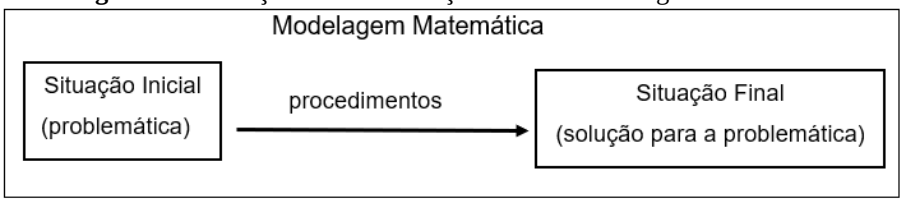
Com o passar dos anos, a compreensão da modelagem matemática como uma alternativa pedagógica passou a assumir contornos mais específicos, sobretudo no que diz respeito à sua estrutura, aos objetivos de ensino e às etapas que compõem a atividade. Nesse sentido, a modelagem matemática, passa a ser assumida por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 9), como "uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático". Nessa caracterização, a modelagem matemática corresponde à atividade de busca por uma solução para o problema e, nessa busca, conceitos e procedimentos matemáticos se fazem necessários. Atividades de modelagem, portanto, tem potencial para possibilitar "uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos não matemáticos com o apoio da matemática" (Almeida; Sousa; Tortola, 2015, p. 3).

Ao compreender uma atividade de modelagem matemática nesses moldes, Almeida, Silva e Vertuan (2012) apresentam que

> uma atividade desse tipo pode ser descrita por uma situação inicial (problemática), uma situação final desejada (que representa a solução para a situação inicial) e um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para transitar da situação inicial para a situação final (p. 12).

Nessa caracterização é indicada que existe uma transição da situação-problema inicial para uma solução final desejada (Figura 1.1). Essa transição, segundo Almeida, Silva e Vertuan, ocorre por meio de encaminhamentos e procedimentos que conectam a situação inicial à situação final, destacando o papel da modelagem matemática como uma alternativa pedagógica.

Figura 1.1: Situação inicial e situação final na Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12)

Os procedimentos referidos nessa Figura 1.1 envolvem ações como a busca e coleta de informações, a identificação e escolha de variáveis, a formulação de hipóteses, a simplificação do problema, a obtenção de uma representação matemática (o modelo), a resolução do problema por meio de procedimentos apropriados e, por fim, a análise e validação da solução obtida, garantindo a adequação do modelo ao problema. A representação matemática, que se materializa através do modelo, carrega uma conexão entre a situação-problema inicial e a solução desejada.

O conceito de "modelo matemático" é frequentemente debatido em relação à sua concepção, criação e função no contexto da modelagem matemática. Neste campo, o modelo é visto como a estrutura que "dá forma" à solução do problema, enquanto a modelagem é a atividade de busca dessa solução (Almeida; Tortola; Merli, 2012). Dar forma à solução envolve descrever as características do fenômeno sob a perspectiva do problema utilizando uma linguagem matemática ou um sistema conceitual (Lingefjärd, 2006; Lesh; Carmona; Hjalmarson, 2006). Isso requer a identificação de elementos e relações matemáticas que guiem a resolução do problema (Doerr; English, 2003).

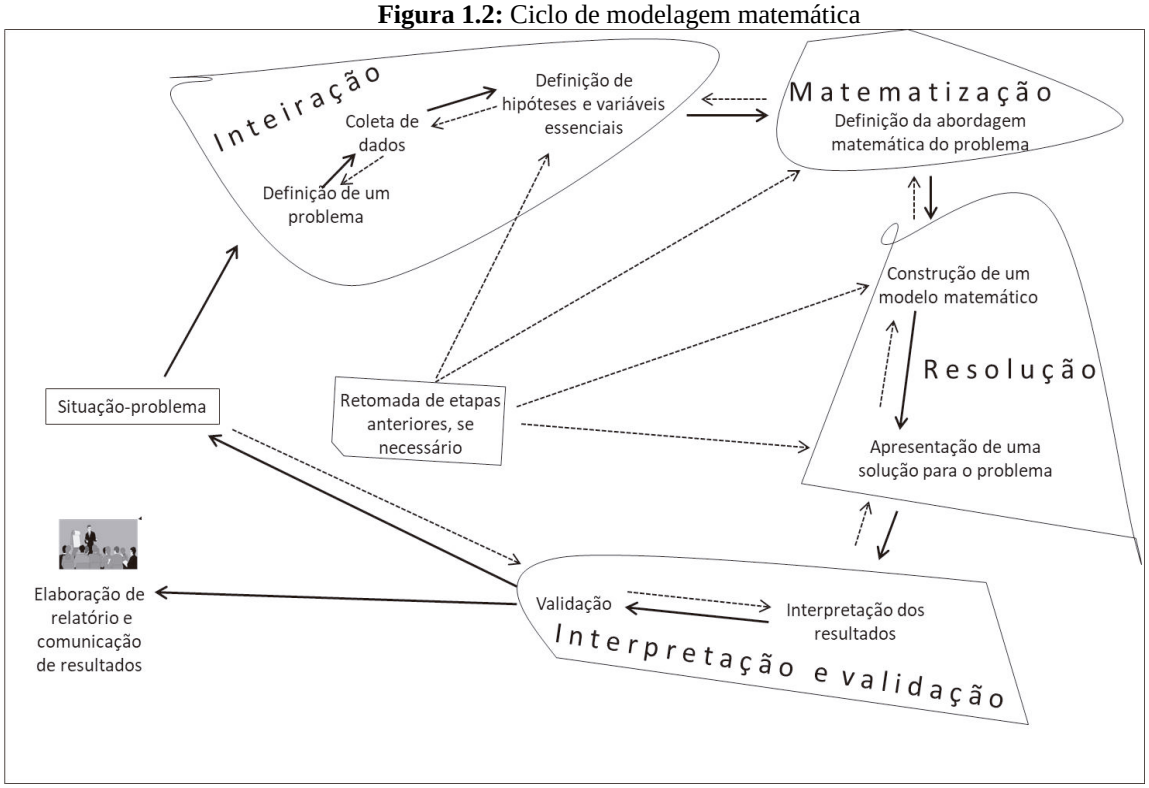
De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), um modelo matemático é definido como “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso em linguagem ou estrutura matemática, e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema” (p. 13). Nesse contexto, o modelo matemático se manifesta como uma representação de alguma coisa, ou seja, uma representação que congrega uma versão simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Assim, o modelo se apresenta como uma versão simplificada da realidade sob a perspectiva dos investigadores. Almeida, Sousa e Tortola (2015) também enfatizam que um modelo deve incorporar características essenciais do fenômeno em questão para indicar possíveis soluções para problemas relacionados.

A utilização de modelos depende do conhecimento dos fatos e fenômenos observados, permitindo que o comportamento dos sistemas reais seja compreendido (D’Ambrósio, 2009). Os modelos matemáticos variam em complexidade e sofisticação para atender aos objetivos específicos da situação (English, 2016). Além disso, podem ser classificados como descritivos

ou normativos dependendo do contexto de aplicação (Blum; Niss, 1991). No ambiente educacional, os modelos são cruciais para facilitar a introdução de novos conceitos matemáticos e científicos (Barbosa, 2009).

Assumir que a atividade de modelagem envolve uma transição entre a situação inicial e a final, remete compreender que nesse trânsito diversos procedimentos são mobilizados. Almeida, Silva e Vertuan (2012) esclarecem que esses procedimentos se organizam no que eles denominam fases da modelagem matemática, a saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. Na fase inteiração, aborda-se a compreensão da situação-problema. A fase matematização envolve o levantamento de hipóteses e a definição de variáveis. A resolução requer a aplicação de conceitos matemáticos para criar o modelo, enquanto a interpretação e validação envolvem a discussão e a confirmação da solução obtida. Sendo essas fases inerentes ao processo de modelagem, Almeida, Silva e Vertuan (2012), defendem que elas podem não acontecer de maneira linear. Nesse sentido, há entendimento de que atividades de modelagem matemática são cíclicas e, portanto, provocam constantes "idas e vindas" entre as fases ao longo do desenvolvimento da atividade, conforme ilustrado na Figura 1.2.

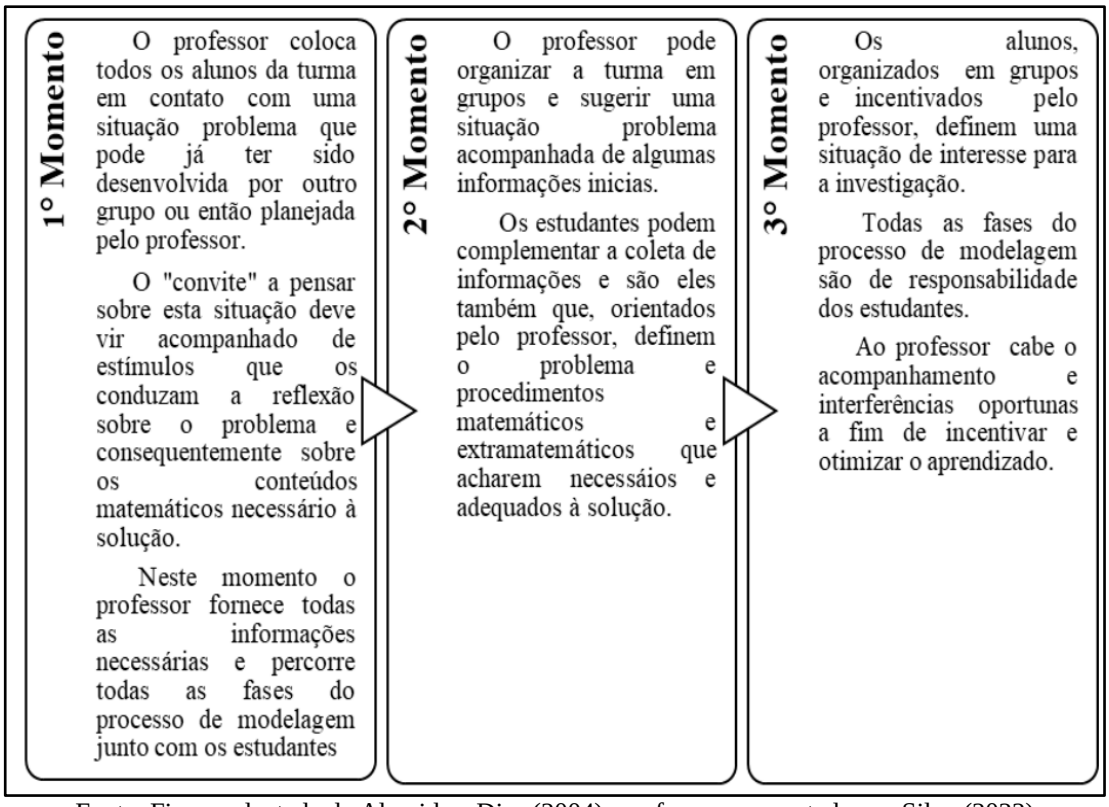
Figura 1.2: Ciclo de modelagem matemática



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021).

Embora o ciclo de modelagem matemática sugira encaminhamentos associados ao fazer modelagem na sala de aula, nele, não contém orientações explícitas sobre as ações dos alunos e do professor ao desenvolver atividades de modelagem matemática. Diante disso, é importante considerar que o envolvimento dos alunos com a modelagem matemática deve ocorrer de forma gradativa, permitindo que, ao longo das atividades, eles se acostumem ao ambiente de modelagem na sala de aula. Nesse sentido, pensando nesse processo de familiarização, Almeida e Dias (2004) propõem que a introdução da modelagem matemática em sala de aula pode se dar a partir do que denotam por momentos. Essas autoras, portanto, enunciam três momentos de familiarização, que é apresentada aqui a partir de uma releitura (Figura 1.3) feita por Silva (2022).

Figura 1.3: Momentos de familiarização em atividades de modelagem



Fonte: Figura adaptada de Almeida e Dias (2004), conforme apresentado por Silva (2022)

Segundo Almeida e Dias (2004), à medida que realizam as atividades nos diferentes momentos, a compreensão dos modeladores sobre o processo de modelagem, a resolução dos problemas em estudo e a reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando. Em síntese, a modelagem matemática nas salas de aula, como uma alternativa pedagógica, permite articular conceitos matemáticos com situações do cotidiano.

Essa compreensão gradativa do fazer modelagem é especialmente relevante quando se trata dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em que as crianças estão em processo de construção de habilidades cognitivas, comunicativas e simbólicas. Ainda que os pressupostos teóricos da modelagem matemática sejam comuns aos diferentes níveis de ensino, sua aplicação com crianças requer adaptações, tanto no que se refere à seleção das situações-problema quanto às formas de representação e validação dos modelos produzidos.

Considerando essas especificidades, torna-se necessário voltar o olhar para a modelagem matemática nos Anos Iniciais, foco das próximas seções, na qual se discutem as configurações que esse trabalho assume quando realizado com crianças dessa etapa do ensino, sobretudo no que tange ao tipo de problema trabalhado, às estratégias utilizadas pelas crianças e às formas que seus modelos matemáticos assumem.

1.3 Modelagem matemática na sala de aula dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A modelagem matemática tem se mostrado viável e relevante já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nessa etapa, as crianças estão desenvolvendo habilidades fundamentais de leitura, escrita e pensamento lógico, o que a torna uma das mais importantes fases na educação, pois é nela que as crianças formam suas opiniões e iniciam a construção de conceitos matemáticos (Nonomura, 2012). Como argumentam Dooren et al. (2011),

> Embora a modelagem matemática seja geralmente associada a cursos terciários [Ensino Superior] ou, de forma crescente, com o nível de educação secundário [Ensino Médio], uma exposição inicial das ideias essenciais de modelagem pode fornecer uma base sólida para aplicar matemática competentemente já no nível da escola primária [anos iniciais do Ensino Fundamental] (Dooren et al., 2011, p. 47-48).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que orienta as redes de ensino no Brasil, destaca a importância de aplicar procedimentos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para abordar e resolver problemas cotidianos e sociais (Brasil, 2018). No entanto, embora a BNCC enfatize a resolução de problemas, o que se observa nas salas de aula muitas vezes é a predominância de práticas simplificadas. Muitas vezes, as informações já estão matematicamente formuladas, e a tarefa do aluno é organizar as informações para chegar a uma resposta utilizando operações conhecidas (Doerr; English, 2003).

Diante disso, a modelagem matemática surge como uma alternativa às práticas escolares ainda marcadas por atividades mecanizadas, que muitas vezes limitam a aprendizagem à

aplicação de operações básicas (Doerr; English, 2003). Ao se depararem com situações reais, as crianças têm a oportunidade de explorar, levantar hipóteses, testar estratégias e desenvolver ideias próprias. Assim, a modelagem matemática favorece o desenvolvimento da criatividade, do pensamento crítico, da argumentação, da capacidade de comunicar ideias, serem mais habilidosos na resolução de problemas, o que são aspectos para a formação do pensamento matemático desde os primeiros anos escolares (Tortola, 2016; Luna, Souza; Santiago, 2009).

Apesar de a modelagem ser uma prática comum em outras etapas da escolarização, sua configuração nos Anos Iniciais apresenta particularidades que merecem destaque. Como defende Tortola (2016), existe um "modo de agir característico" dessa fase, que envolve ações específicas, diretamente relacionadas à idade das crianças, ao seu repertório linguístico, às formas como organizam o pensamento e às estratégias de ensino mais adequadas para esse momento.

> Essas particularidades contemplam, de forma sintética, a ludicidade associada aos interesses dos alunos durante a escolha do tema e formulação do problema; discussões voltadas para a apresentação da matemática aos alunos, que estão no início de sua jornada escolar; o uso da matemática para expressar as regularidades observadas e generalizar situações, o que implica na construção de modelos matemáticos característicos (desenhos, gráficos pictóricos e gráficos de barras, operações aritméticas, textos, tabelas etc.); o uso de materiais manipuláveis para auxiliar no entendimento da situação e na resolução do problema; a maneira que os alunos justificam seu desenvolvimento matemático, amparada na língua materna; a organização dos alunos, tanto no que diz respeito à disposição em grupos, quanto aos seus registros; e a socialização dos resultados, que deve ser incentivada por meio de questionamentos de colegas e do professor (Tortola, 2016, p.269).

De maneira geral, essas particularidades estão conectadas ao que o autor chama de "forma de vida" dos Anos Iniciais, um conjunto de hábitos, interesses, linguagens e práticas próprias da infância. As crianças enxergam os problemas de maneira diferente dos alunos mais velhos e se expressam por meio de múltiplas linguagens: oral, corporal, gráfica, pictórica e simbólica (ainda em construção). Esses elementos sugerem que, mais do que adaptar a tarefa ou atividade de modelagem matemática para as crianças, é necessário reconhecê-la como uma prática genuína, com linguagem, estrutura e objetivos próprios. Como ressalta Burak (2014), a linguagem assume papel central nesse processo, pois a representação simbólica matemática ainda está em formação nessa etapa.

Nesse sentido, destaca-se o estudo de Tortola (2016), em que motivado a compreender os encaminhamentos que crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental dão para atividades de modelagem matemática, que configurações podem assumir tais atividades quando desenvolvidas por alunos desse período escolar, como eles entendem tais atividades e como

eles lidam com a matemática e com a linguagem que emerge dessas atividades. Para isso, em sua tese a partir da análise do que as crianças realizaram durante as atividades (os chamados "encaminhamentos"), Tortola (2016), identificou oito indicadores que revelam características comuns nesse processo.

Esses indicadores foram organizados em três categorias, ou seja, conjuntos que agrupam os aspectos mais relevantes observados. Juntos, esses grupos formam o que o autor denomina "configurações de modelagem matemática" específicas para os diferentes anos da etapa: uma configuração para o 1º ano, outra para o 2º e 3º anos, e uma terceira para o 4º e 5º anos. Essas configurações representam um modo típico, sem caráter rígido ou exclusivo, pelo qual as crianças dos Anos Iniciais enfrentam e constroem as atividades de modelagem matemática.

Além disso, Tortola (2016) discute o que é essencial em uma atividade de modelagem matemática, destacando quais ações, processos e características devem estar presentes para que uma atividade possa ser considerada de modelagem, especialmente nessa faixa etária. Nesse sentido, os oito indicadores obtidos a partir da análise dos encaminhamentos dos alunos oferecem um panorama do que pode ser considerado essencial para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos Anos Iniciais. A Figura 1.4 apresenta uma síntese desses indicadores.

Figura 1.4: Indicadores da modelagem matemática nos Anos Iniciais, conforme Tortola (2016)

Indicadores	Considerações nos Anos Iniciais
Definição do tema e coleta de informações	Pode ser desafiadora no 1º ano pela ausência de alfabetização. O professor pode fornecer textos curtos com informações selecionadas. Para turmas mais avançadas, propõe-se a busca conjunta de dados em laboratórios ou com materiais trazidos de casa. Na ausência desses, o professor pode indicar fontes alternativas (jornais, revistas, sites) e pedir que os alunos tragam materiais para discussão em sala.
Formulação do problema	A organização em grupos pode favorecer a construção e, quando as crianças não conseguem formular um problema, o professor pode fazer sugestões, sem defini-lo por completo.
Discussões	As crianças demonstram participação ativa, o que pode gerar conversas em excesso, especialmente em turmas grandes. O professor pode iniciar com grupos pequenos, como duplas, e ampliá-los gradualmente. Nos primeiros anos, especialmente no 1º e 2º ano, trabalhar com várias atividades ao mesmo tempo pode dificultar as discussões, devido à maior necessidade de orientação dos alunos. Por isso, recomenda-se que, nas atividades de modelagem com temas escolhidos pelos alunos, o professor trabalhe um único tema por vez com toda a turma, favorecendo o foco e a participação coletiva.
Idealização da situação	Cabe ao professor destacar as variáveis, hipóteses e simplificações envolvidas, promovendo conversas e incentivando anotações para que, em futuras atividades, as crianças consigam reconhecê-las com mais facilidade.
Formulação do modelo matemático	Etapa é vista como fundamental, pois permite a criação de estruturas matemáticas que ajudam a observar regularidades, generalizar a situação e discutir relações com outros contextos.
Apresentação da resposta para o problema	Frequentemente, as crianças apresentam respostas oralmente, sem registro. Incentivar o registro dessas respostas contribui para o uso da linguagem matemática em acordo com as regras convencionadas, pois os registros colocam em evidência como os alunos estão interpretando e seguindo tais regras, podendo o professor intervir, caso necessário.
Avaliação dos resultados	Ao longo do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática o professor deve chamar atenção das crianças quanto à necessidade de avaliação dos resultados. A retomada frequente das informações pode ajudar as crianças a produzir modelos matemáticos que estão em acordo tanto com a situação-problema, quanto com as regras da matemática. A validação do modelo matemático também deve ser requerida.
Socialização dos encaminhamentos	A socialização dos encaminhamentos é um momento em que as crianças têm a oportunidade de revisitar seu encaminhamentos e aprender a se comunicar matematicamente. Para isso, o professor pode solicitar que façam apresentações, que mostrem seus registros aos colegas, que falem a respeito do que foi feito. Pode fazer questionamentos para orientar as apresentações e incentivar outros alunos a também fazer.

Fonte: Adaptado de Tortola (2016)

Tortola (2016) também destaca o papel fundamental do professor nesse processo, pois é ele quem ajuda as crianças a perceberem e desenvolverem esses indicadores, garantindo que as etapas do trabalho de modelagem não sejam negligenciadas. Então, a mediação docente torna-se um dos pilares da modelagem nos Anos Iniciais. Cabe ao professor propor situações

que façam sentido para as crianças, mediar os debates, incentivar o uso de diferentes formas de representação, valorizar os saberes prévios e estimular a produção de significados ao longo do processo.

Essa postura está alinhada ao que Silva e Klüber (2014) identificam como cinco aspectos que favorecem um ensino significativo nos Anos Iniciais: 1) o aluno como sujeito da aprendizagem; 2) o professor como mediador do processo; 3) o ensino problematizador; 4) o ensino dialógico e investigativo; 5) o ensino interdisciplinar. Para esses autores, a modelagem matemática é especialmente adequada para crianças porque, quando bem conduzida, "não inibe nem retira delas o seu direito de pensar e agir" (p.20), promovendo uma atitude ativa no processo educativo.

Diversas obras discutem e ajudam a ampliar nossas compreensões sobre a modelagem nos Anos Iniciais, abordando tanto aspectos teóricos quanto práticos (Tortola, 2012, 2016; Pelaquim; Silva, 2024; Silva; Veronez, 2024; Veronez; Santos, 2023; English, 2003; English; Watters, 2004; Luna; Souza, 2009; Gomes, 2018; Gomes; Silva, 2021; Teodoro, 2018; Triguero; Kato, 2022; Nunomura, 2021; Santos, 2022; Ramos; Franchi, 2024, entre outras). Esses estudos discutem como a modelagem matemática pode ser pensada desde os primeiros anos escolares, destacando sua viabilidade e os benefícios que oferece quando integrada ao cotidiano das crianças.

A viabilidade dessa proposta também é ressaltada na obra *Conversas para quem gosta de modelagem matemática* (Kato et al., 2022), que reúne experiências desde os Anos Iniciais até o Ensino Superior. Nos capítulos voltados à Educação Infantil e aos Anos Iniciais, observa-se como a modelagem pode emergir de situações reais vivenciadas pelas próprias crianças, promovendo aprendizagens contextualizadas, reflexivas e colaborativas. A obra vem para destacar que a modelagem matemática é possível em todas as etapas da escolarização, especialmente nos Anos Iniciais, quando vinculada às experiências prévias dos alunos, favorecendo a investigação, a criatividade e o pensamento crítico.

1.4 Modelos matemáticos nos Anos Iniciais: possíveis configurações

Desde os primórdios da civilização, a humanidade tem se dedicado a criar representações para descrever fenômenos naturais e sociais, de modo a buscar compreender o mundo ao seu redor. Essas representações, chamadas de modelos, permitiram o avanço do conhecimento em diferentes áreas, como ciências naturais, engenharia e economia. A construção de modelos sempre esteve atrelada à necessidade de organizar informações,

interpretar dados e prever comportamentos de diferentes sistemas, como os fenômenos climáticos, os processos biológicos, as interações sociais ou as dinâmicas econômicas, entre outros.

De acordo com o dicionário Ferreira (2010), um modelo pode ser definido como uma "representação de algo a ser reproduzido". Essa definição amplia a ideia de que um modelo não é o próprio objeto de estudo, mas sim uma tentativa de representá-lo de maneira simplificada, com base em características relevantes e reconhecíveis. Os modelos podem assumir diferentes formas (diagramas, tabelas, equações, gráficos), dependendo do propósito e do contexto em que são utilizados e do que se quer olhar e do que se pode olhar.

No campo da Matemática, os modelos matemáticos são utilizados para representar, explicar e “tornar presentes” situações que, muitas vezes, nem sempre são matemáticas em sua origem, mas que podem ser analisadas por meio da matemática. Um modelo matemático é um sistema conceitual ou explicativo expresso por meio da linguagem matemática, destinado a descrever ou explicar o comportamento de outros sistemas (Almeida, Silva; Vertuan, 2012).

Tais modelos não se restringem à resolução de problemas exclusivamente matemáticos, podendo ser aplicados em diferentes áreas do conhecimento, como Arte e Engenharia. Para Biembengut e Hein (2009, p. 12), "um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando expressões numéricas, fórmulas, diagramas, gráficos, representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, entre outros". Maaß define modelo como sendo (2010, p. 287), “uma representação simplificada da realidade; tem uma intenção específica e leva em consideração alguns aspectos da realidade”.

Nesse contexto, a modelagem matemática surge como uma prática que busca resolver problemas ao utilizar esses modelos, que não apenas representam soluções, mas também moldam e estruturam a busca por respostas, como discutido por Almeida, Tortola e Merli (2012).

Os modelos matemáticos, construídos em atividades de modelagem, enquanto representações construídas com diferentes finalidades, como prever fenômenos, descrever comportamentos ou ilustrar conceitos, devem carregar características da situação em estudo, ou seja, precisam manter relação com os elementos do problema que se pretende resolver. É necessário que esses modelos carreguem elementos da situação em estudo, ou seja, aspectos relevantes do contexto original precisam estar presentes na estrutura do modelo. Além disso, precisam ser testados frente ao problema proposto, avaliando se suas representações, cálculos e interpretações são coerentes com a realidade que se busca compreender.

O modelo deve ser capaz de oferecer uma resposta à questão levantada, ou até mesmo configurar-se como a própria resposta. Essa concepção é sustentada por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.13), que afirmam que "um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema". Assim, o modelo matemático ganha sentido não apenas como uma representação, mas como uma construção que, ao articular dados da realidade e estruturas matemáticas, permite investigar, interpretar e atuar sobre um determinado fenômeno ou situação.

Ao refletir sobre a presença dos modelos matemáticos no contexto educacional, é preciso considerar que sua forma de construção, representação e aplicação pode variar conforme o nível de desenvolvimento dos alunos. A complexidade dos conceitos envolvidos, os recursos simbólicos utilizados e a própria mediação docente assumem contornos específicos quando se trata de crianças em processo de alfabetização matemática. Assim, ainda que os fundamentos da modelagem estejam presentes em todas as etapas do ensino, sua configuração nos primeiros anos escolares exige uma abordagem adaptada às possibilidades das crianças.

Nos Anos Iniciais, os modelos matemáticos ganham configurações distintas, Tortola e Almeida (2018), menciona que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental apresentam particulares "especialmente no que se refere à simbologia matemática e à produção de modelos matemáticos e seu uso na apresentação de respostas para o problema em estudo em cada situação investigada" (p.146).

Desta forma, nesse nível de ensino a configuração de modelo matemático ganha algumas especificidades. English (2003), nos apresenta que a atividade de criar modelos matemáticos, proporcionada pela modelagem, é uma ferramenta que deve ser incorporada aos objetivos da educação matemática desde os primeiros anos de escolaridade. Essa prática auxilia no desenvolvimento do raciocínio matemático, especialmente na interpretação e explicação de sistemas que possuem uma estrutura complexa, abrangendo diferentes áreas da matemática e promovendo a fluência na linguagem matemática em vários contextos.

Doerr e English (2003) afirmam que um modelo matemático é constituído por um conjunto de elementos, operações, relações e regras, servindo para descrever, explicar ou prever o comportamento de um sistema conhecido, relacionado a situações do mundo real. Esses modelos possibilitam a descrição, explicação e previsão de fenômenos por meio de uma linguagem que pode variar desde a notação simbólica até a utilização de diagramas e gráficos. Assim, ao considerar as orientações do professor e os conhecimentos das crianças, podemos obter "modelos de variados níveis de sofisticação" (English, 2016, p. 187).

Tortola (2016) observa que os modelos matemáticos têm características específicas em relação à simbologia, podendo ser representados de diferentes formas, desde que estejam estruturados e baseados em conceitos matemáticos. Essas representações podem incluir esquemas, gráficos, desenhos e materiais manipuláveis, ajudando as crianças a compreender as relações matemáticas nas situações reais (Doerr; English, 2003). E Tortola e Silva (2021) confirma essa visão indicando que,

> Se olharmos para os modelos produzidos nas atividades e analisarmos o contexto em que foram produzidos, percebemos que os desenhos, as sequências de operações e os textos são os meios que os alunos dos anos iniciais têm à disposição para representarem seus modelos matemáticos (p.23).

Além disso, segundo Tortola e Silva (2021), o desenvolvimento de modelos depende do planejamento, da comunicação e da responsabilidade compartilhada entre crianças e professores. Esse ambiente colaborativo permite que as crianças discutam, avaliem e revisem suas hipóteses coletivamente. Nesse sentido, English (2010), destaca cinco princípios fundamentais que devem orientar as propostas de modelagem matemática nos Anos Iniciais, que incluem:

> (a) *O Princípio da Significância Pessoal* — Os problemas são elaborados de forma que as crianças possam se relacionar e compreender a situação complexa apresentada; (b) *O Princípio da Construção do Modelo* — Um problema de modelagem deve exigir que as crianças desenvolvam uma construção, descrição, explicação ou previsão matemática explícita de um sistema complexo significativo. Esses modelos devem ser matematicamente significativos, com foco nas características estruturais subjacentes (ideias-chave e suas relações) do sistema em questão; (c) *Princípio da documentação do modelo* — Problemas de modelagem devem encorajar as crianças a externalizar seu pensamento e raciocínio o máximo possível e de diversas maneiras, incluindo a criação de listas, tabelas, gráficos, diagramas e desenhos. A exigência de incluir descrições e explicações das etapas que seguiram na construção de seus modelos também é uma característica importante; (d) *Princípio da Autoavaliação* — O design do problema deve incluir critérios suficientes para permitir que as crianças determinem se o modelo final é eficaz e atende adequadamente às necessidades do cliente ao lidar com o sistema complexo em questão (e sistemas relacionados). Tais critérios também permitem que as crianças avaliem e revisem progressivamente suas criações à medida que trabalham no problema; e (e) *Princípio da Generalização do Modelo* — Os modelos criados devem ser aplicáveis a outras situações problemáticas relacionadas. (English, 2010, p. 288-289, tradução nossa)

Esses princípios fundamentais servem como um guia para a implementação da modelagem matemática nos Anos Iniciais, auxiliando os professores a planejar atividades que sejam acessíveis para as crianças. É justamente nesse contexto que as classificações de modelos

matemáticos construídos pelas crianças, como as apresentadas por Tortola (2016), se mostram essenciais para compreender as diversas formas pelas quais os alunos representam e resolvem problemas matemáticos. Em um artigo desenvolvido por Tortola e Almeida (2016), a partir de uma atividade proposta a 112 estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, foram identificados sete tipos de modelos matemáticos construídos pelas crianças ao interpretarem uma atividade sobre o crescimento das unhas: descritivos, aritméticos (aditivo e multiplicativo), gráficos (geométricos e pictóricos), tabulares e textuais.

Já em sua tese de doutorado, intitulada *Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais*, Tortola (2016) identificou, além desses, os modelos algébricos, ampliando a tipologia de estruturas matemáticas utilizadas pelas crianças. Essas classificações evidenciam a capacidade das produções das crianças dos Anos Iniciais, demonstrando que, mesmo em etapas iniciais da escolarização, as crianças são capazes de mobilizar diferentes formas de representação para resolver problemas contextualizados.

Essas classificações de Tortola (2016) muito embora não seja rígida, ela nos ajuda a compreender características das produções das crianças dos Anos Iniciais ao desenvolverem atividades de modelagem matemática. Tortola e Silva (2021) também ressaltam que os modelos produzidos podem guiar as práticas em sala de aula. O foco do professor não deve se restringir apenas ao resultado final do problema; é essencial que ele ofereça orientações que ajudem as crianças a tomarem consciência de suas ações. Dessa forma, eles poderão perceber relações matemáticas a partir das características das situações do mundo real e produzir respostas adequadas por meio de modelos matemáticos.

Dessa forma, os modelos desenvolvidos pelas crianças dos Anos Iniciais, ainda que simplificados, servem como uma ponte entre o conhecimento abstrato e as vivências práticas das crianças. Eles podem ser definidos como representações que emergem a partir de suas experiências, conhecimentos prévios e da mediação do professor, refletindo não apenas suas aprendizagens, mas também seus processos de pensamento e interpretações sobre o mundo ao seu redor. Esses modelos permitem que as crianças explorem, interpretem e expliquem situações reais por meio da matemática.

Construções simbólicas e estruturadas, esses modelos podem se manifestar de diversas formas, como desenhos, esquemas, textos e representações manipulativas, dependendo da complexidade da situação abordada e do nível de desenvolvimento das crianças. Além de representarem o que as crianças pensam e compreendem, os modelos são, simultaneamente, um reflexo do processo de aprendizagem e um instrumento que favorece o raciocínio lógico, a

resolução de problemas e a criatividade matemática. Assim, contribuem para preparar as crianças a compreender e interagir com o mundo ao seu redor.

1.5 Delimitação da problemática de pesquisa

A Modelagem Matemática favorece a aproximação entre a vida cotidiana das crianças e os conceitos matemáticos trabalhados na escola com o objetivo de ensinar e a aprender Matemática. Essa articulação tem despertado o interesse de diversos pesquisadores que, ao focalizar a modelagem nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, abordam diferentes enfoques. Alguns discutem o desenvolvimento de práticas em sala de aula, outros se dedicam à análise dos discursos produzidos pelas crianças durante as atividades, à formação de professores que atuam nessa etapa da escolaridade ou, ainda, às relações com diferentes referenciais teóricos e à construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais (English, 2003; English; Watters, 2004; Luna; Souza, 2009; Gomes, 2018; Gomes; Silva, 2021; Teodoro, 2018; Tortola, 2012, 2013; Triguero; Kato, 2022; Nunomura, 2021; Santos, 2022).

Nosso olhar, por sua vez, é investigar acerca dos modelos matemáticos desenvolvidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática. Tal interesse surgiu da experiência da pesquisadora, associado a sua experiência como professora nesse nível de escolaridade. Essa problemática também permeia os focos de interesse do Grupo de Estudos sobre Práticas de Modelagem na Educação Matemática (GEPMEM), no qual a pesquisadora é uma das participantes.

Para realizar a investigação desejada, que tem cunho empírico, formulamos duas questões auxiliares:

1. O que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?
2. Que características carregam os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática?

1.6 Percurso metodológico da pesquisa

Com vistas aos objetivos que se relacionam à problemática desta investigação, optamos por uma abordagem qualitativa de pesquisa. Conforme Alves-Mazzotti (1998), esse tipo de abordagem permite ao pesquisador compreender e interpretar como as pessoas agem, pensam, sentem e interpretam as situações que enfrentam. Creswell (2007) complementa que a pesquisa

qualitativa possibilita ao pesquisador interpretar os dados com base na descrição detalhada de cenários e sujeitos, e por meio de análises que categorizam o significado emergente. Essa interpretação ocorre após o pesquisador filtrar os dados com suas próprias lentes pessoais e teórico-metodológicas.

O papel dual do pesquisador, que também atua como professor regente da turma correspondente ao nosso cenário investigativo, é um aspecto relevante a ser considerado. Bodgan e Biklen (1994) destacam que, ao estar imerso no campo de estudo e nos aspectos característicos do fenômeno investigado, o pesquisador adquire uma visão ampla e significativa dos dados produzidos. O contato direto e prolongado com o ambiente e com os sujeitos participantes torna o pesquisador o principal instrumento da investigação.

Campos e Araújo (2015) interpretam essa dualidade professor|pesquisador como uma forma de intervenção prática e pedagógica. As autoras usam a representação da barra vertical como uma metáfora visual dessa interdependência. Ela simboliza a relação dialética entre os dois papéis, indicando que, apesar de serem distintos e, por vezes, incompatíveis, cada um depende do outro para se constituir e se desenvolver. Campos e Araújo (2015, p.329) compreendem a relação entre pesquisa e prática pedagógica no sentido de que “elas fazem parte de uma unidade única, se influenciam e se desenvolvem mutuamente; são diferentes, têm propósitos diferentes, podem ser incompatíveis, mas uma pressupõe constitui a outra”. Além disso, essa interconexão entre esses diferentes papéis é interessante para enriquecer tanto a prática pedagógica quanto a pesquisa.

Para a realização dessa pesquisa, que tem caráter empírico, assumimos as orientações de Almeida e Dias (2004) que sugerem a implementação gradativa da modelagem matemática. Tal sugestão é denotada por três momentos, os quais consideram ações distintas tanto de crianças como do professor. No nosso estudo, foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática relativas ao segundo e terceiro momentos.

O tema "Quantidade de água", gerou uma atividade de modelagem matemática segundo orientações de Almeida e Dias (2004) no que concerne ao segundo momento de familiarização. Ou seja, nesse segundo momento, a orientação é a de que o professor proponha um tema para estudo, cabendo as crianças coletar dados, definir variáveis, formular hipóteses, simplificar e obter um modelo que favoreça a resolução do problema. Todas essas ações, no entanto, são orientadas e supervisionadas pelo professor.

As demais atividades desenvolvidas seguiram orientações de Almeida e Dias (2004) no que se refere ao terceiro momento de familiarização. Nesse terceiro momento, a orientação é de que as crianças, organizados em grupos, sejam incentivados a conduzir um processo de

modelagem a partir de um problema escolhido por eles, sendo orientados pelo professor. As temáticas dessas atividades foram: “Personalização de avatares em jogo eletrônico”, “Livros da biblioteca”, “Queimadas-Desmatamento”, “Cortinas na escola”, “Câmeras na escola”. O tema “Cortinas na escola”, dois grupos decidiram focar nessa temática e então a professora sugeriu que trabalhassem em conjunto para unir esforços na busca por uma solução para o problema identificado.

Para o desenvolvimento dessas atividades foram considerados aspectos do fazer modelagem matemática apresentados na seção intitulada: *Algumas considerações acerca da Modelagem na Educação Matemática: entendimentos e modos de fazer*, bem como o entendimento de que atividades de modelagem matemática são essencialmente cooperativas. Sendo assim, todas as atividades que foram desenvolvidas nessa pesquisa empírica foram realizadas com as crianças organizadas em grupos.

Para a produção dos dados recorremos ao recurso de gravação em áudio das aulas. Além das transcrições dessas gravações, compuseram nossos dados, os registros escritos das crianças e as anotações feitas pela pesquisadora em seu diário de campo. Para realizar as gravações foi utilizado um gravador e/ou celular em cada grupo, de modo a captar as falas das crianças, no âmbito dos grupos, com maior clareza. Os registros escritos das crianças incluem suas anotações, resoluções e desenhos que produziram ao longo do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

O processo analítico se deu à luz dos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática. Para tanto, no primeiro artigo selecionamos fragmentos, sejam produções escritas ou falas, do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática produzidas pelas crianças. Além disso, selecionamos e utilizamos episódios, que entendemos como recortes específicos das interações e atividades das crianças. Nossa atenção concentrou-se nas argumentações, decisões e direcionamentos evidenciados pelas crianças ao longo do desenvolvimento das atividades. Esses fragmentos das atividades de modelagem matemática realizadas pelos grupos, tiveram como objetivo compreender como os modelos foram sendo construídos, ajustados e validados ao longo das propostas investigadas. Para garantir o anonimato das crianças participantes, utilizamos identificações codificadas (A1, A2, A3, etc.), sem distinção por grupo. Os diálogos selecionados destacam momentos em que as crianças construíram, reformularam ou refletiram

sobre seus modelos. Para nos referirmos à professora|pesquisadora[2], adotamos a abreviação "Prof.".

No segundo artigo, adotamos uma abordagem interpretativa para a análise, focando na compreensão das ações, decisões e justificativas das crianças durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Inicialmente, realizamos uma leitura detalhada dos materiais coletados, como transcrições, produções escritas, imagens e registros de campo, para nos familiarizarmos com os dados e localizar episódios que evidenciassem a construção dos modelos. A partir dessa imersão, selecionamos trechos representativos dos diálogos e registros, destacando as formas como as crianças aplicaram seus conhecimentos, utilizaram diferentes recursos (tabelas, desenhos, esquemas) e desenvolveram estratégias para quantificar e argumentar. Demos atenção especial para preservar as expressões originais das crianças, ressaltando tanto os aspectos matemáticos quanto comunicativos do processo. Para garantir confidencialidade, as crianças foram identificadas por siglas (A1, A2, A3, etc.) e a professora|pesquisadora referida como "Prof.". As interpretações foram construídas com base na articulação entre os dados coletados e os referenciais teóricos que sustentam a modelagem matemática nos Anos Iniciais.

1.7 O cenário de investigação

A investigação apresentada neste relatório teve a sala de aula de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental como cenário. Essa turma era composta por 33 crianças, com idades variando entre 9 e 10 anos. A estrutura da escola municipal a qual essa turma faz parte contém além das salas de aula, uma cozinha, almoxarifado, sala de direção, sala de coordenação, secretaria, espaço de recreação, biblioteca, refeitório, quadra de futsal, entre outros.

A seleção desse 4º ano, no entanto, está apoiada no fato de a professora|pesquisadora ser a professora regente dessa turma e do interesse em desenvolver práticas colaborativas com essas crianças, já que eram participativos. Vale destacar que a professora|pesquisadora não tinha qualquer experiência com modelagem matemática, tampouco as crianças. Assim, essa turma de crianças nunca havia realizado atividades de modelagem matemática até o início da presente investigação e o contato da professora com essa alternativa pedagógica foi acontecendo junto

[2] Ao longo deste relatório de pesquisa, a barra vertical (|) será utilizada como recurso visual para representar a relação dialética entre os papéis de professor e pesquisador, conforme a proposta de Campos e Araújo (2015).

aos estudos associados ao desenvolvimento da pesquisa. Isso também no sentido prático: de desenvolver atividades de modelagem matemática.

A pesquisa foi iniciada em maio de 2024, quando as crianças desenvolveram suas primeiras atividades de modelagem matemática, com as seguintes temáticas: “Gestão de frutas na escola” e “Organização da saída escolar em dias de chuva”. Esses temas surgiram de um acordo entre eles e a professora|pesquisadora e tais atividades foram desenvolvidas como forma de colocar as crianças em contato com atividades dessa natureza.

Contudo, as sete atividades que são discutidas nesta investigação, tiveram seu processo de produção de dados realizado nos meses de julho e agosto, nas quintas e sextas-feiras. No Quadro 1 trazemos uma síntese das informações relacionadas a essas atividades, bem como o período em que foram desenvolvidas.

Quadro 1.1: As atividades de modelagem matemática que compuseram o corpus investigativo

Momentos de familiarização	**Temas**	**Quantidade de aulas**	**Crianças dos grupos**
2° Momento	Quantidade de água	3h/a	Grupo 1: A18,A15, A29, A12 Grupo 2: A14, A8,A9,A14, A16. Grupo 3: A4, A25, Grupo 4: A3, A4, ,A5, A26, Grupo 5: A8,A9, A14, A16. Grupo 6: A6,A13, A20, A22,
3° Momento	Cortinas na escola (grupo 1) Cortinas na escola (grupo 2)	5 h/a	A13, A17, A20, A22, A23,A31. A3, A10, A21,A26,A25
	Câmeras na escola	4h/a	A8,A9,A14, A16,A27
	Personalização de avatares em jogos eletrônicos	4h/a	A1, A6, A12, A30,A24.
	Livros da biblioteca	5h/a	A2,A15, A18, A19,A28
	Queimadas- Desmatamento	5h/a	A4, A5,A7,A11,A29.

Fonte: A autora

Na sequência, trazemos de forma sintética informações relativas às atividades de modelagem matemática que compõem nossa investigação.

1.8 As atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Ao longo da investigação foram desenvolvidas algumas atividades de modelagem matemática, cujas temáticas e informações principais são apresentadas a seguir. As duas

primeiras atividades, “Cortina na escola” e “Câmeras na escola”, serão discutidas no primeiro artigo deste relatório de pesquisa, e as demais “Personalização de avatares em jogos eletrônicos!”, “Quantidade de água”, “Livros da biblioteca” e “Queimadas-Desmatamento”, serão discutidas no segundo artigo.

No primeiro artigo serão discutidas atividades de modelagem, seguindo os pressupostos do terceiro momento de familiarização (Almeida e Dias, 2004). A atividade com a temática “Cortinas na escola” foi motivada por um desafio relacionado à luminosidade excessiva nas salas de aula, com o objetivo de investigar: Qual a quantidade de tecido necessária para produzir cortinas para as janelas da escola? A principal hipótese levantada sugeria que a quantidade de tecido dependeria da largura e altura da janela. Durante a resolução, as crianças realizaram medições e cálculos envolvendo largura e altura das janelas. A outra atividade presente no artigo 1 tem a temática “Câmeras na escola”, a qual o problema proposto foi: A distribuição das câmeras de segurança nos espaços da escola foi feita de forma adequada? Ambas as atividades permitiram observar como as crianças mobilizaram conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais, articulando medidas, quantificações e análises críticas em contextos de situações reais para elas.

No segundo artigo serão apresentadas atividades cujo encaminhamento em sala de aula seguiu as orientações do segundo momento de familiarização e do terceiro momento de familiarização, conforme Almeida e Dias (2004). A atividade “Quantidade de água”, realizada no inverno, surgiu a partir de uma questão levantada por uma criança que, diante da estação mais fria, questionou se a quantidade de água ingerida deveria mudar. Isso levou a turma a investigar: Todas as pessoas precisam beber a mesma quantidade de água por dia ou isso varia de acordo com alguma característica? As hipóteses formuladas indicavam que a quantidade de água consumida diariamente está relacionada ao peso corporal e que a quantidade de água recomendada é proporcional ao peso corporal (35 ml por kg). As crianças investigaram essas questões e descobriram que a quantidade de água necessária varia de acordo com o peso corporal.

A atividade com a temática “Personalização de avatares em jogos eletrônicos” abordou a questão: Quantos visuais diferentes podem ser criados para o avatar no jogo? O interesse das crianças os levou a explorar combinações possíveis de roupas para a personagem e a investigar como problemas com essa configuração podem ser resolvidos.

A atividade com a temática “Livros da biblioteca” teve o seguinte problema para estudo: A biblioteca tem livros suficientes para todos os alunos? As crianças realizaram pesquisas e análises que as levaram à seguinte conclusão: o aumento das queimadas está relacionado à

redução da cobertura florestal, mas também pode ser influenciado por outros fatores, como ações humanas, políticas públicas e interesses econômicos.

Na próxima seção, apresentamos a organização do relatório no formato multipaper, detalhando como cada capítulo se conecta ao objetivo geral da investigação e às atividades descritas.

1.9 A estrutura da dissertação

A estrutura do relatório que compõe esta dissertação segue as diretrizes do formato multipaper, uma escolha fundamentada em estudos de alguns autores na área da Educação Matemática, como Garnica (2011), Barbosa (2015) e Mutti e Klüber (2018), que destacam as vantagens do formato multipaper na construção de dissertações e teses. Entre os argumentos favoráveis apontados, esses estudiosos ressaltam que esse formato permite uma maior diversidade de perspectivas, adaptando-se às necessidades específicas de cada artigo. Além disso, favorece a ampliação da disseminação do trabalho, incentiva a colaboração entre pesquisadores e possibilita a exploração de diferentes aspectos de um tema.

Nesse sentido, Duke e Beck (1999) complementam que o formato multipaper oferece aos pesquisadores a possibilidade de analisar múltiplos aspectos de sua pesquisa, por meio de dados e objetivos distintos. Esta flexibilidade permite compreensões de diferentes aspectos sobre o objeto de pesquisa, que se conectam entre si em relação a um mesmo tema e problema de pesquisa. Com isso, cada artigo pode explorar uma dimensão específica do tema, ao mesmo tempo que contribui para uma compreensão mais profunda e integrada do objeto de estudo.

Com base nessa estrutura o relatório está organizado em quatro capítulos, sendo que cada um corresponde a uma parte da investigação, mas todos se inter-relacionam para atender ao objetivo geral: investigar acerca dos modelos matemáticos em atividades de modelagem desenvolvidas por crianças dos Anos Iniciais.

O Capítulo I corresponde à Introdução, no qual apresentamos considerações acerca da modelagem matemática e, mais especificamente, nos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Informações relativas ao contexto investigado, aos aspectos metodológicos adotados, aos propósitos desta investigação, seu objetivo e as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelas crianças, também são descritas nesse capítulo, que constitui-se uma introdução estendida, característica de relatório de pesquisa que tem formato multipaper.

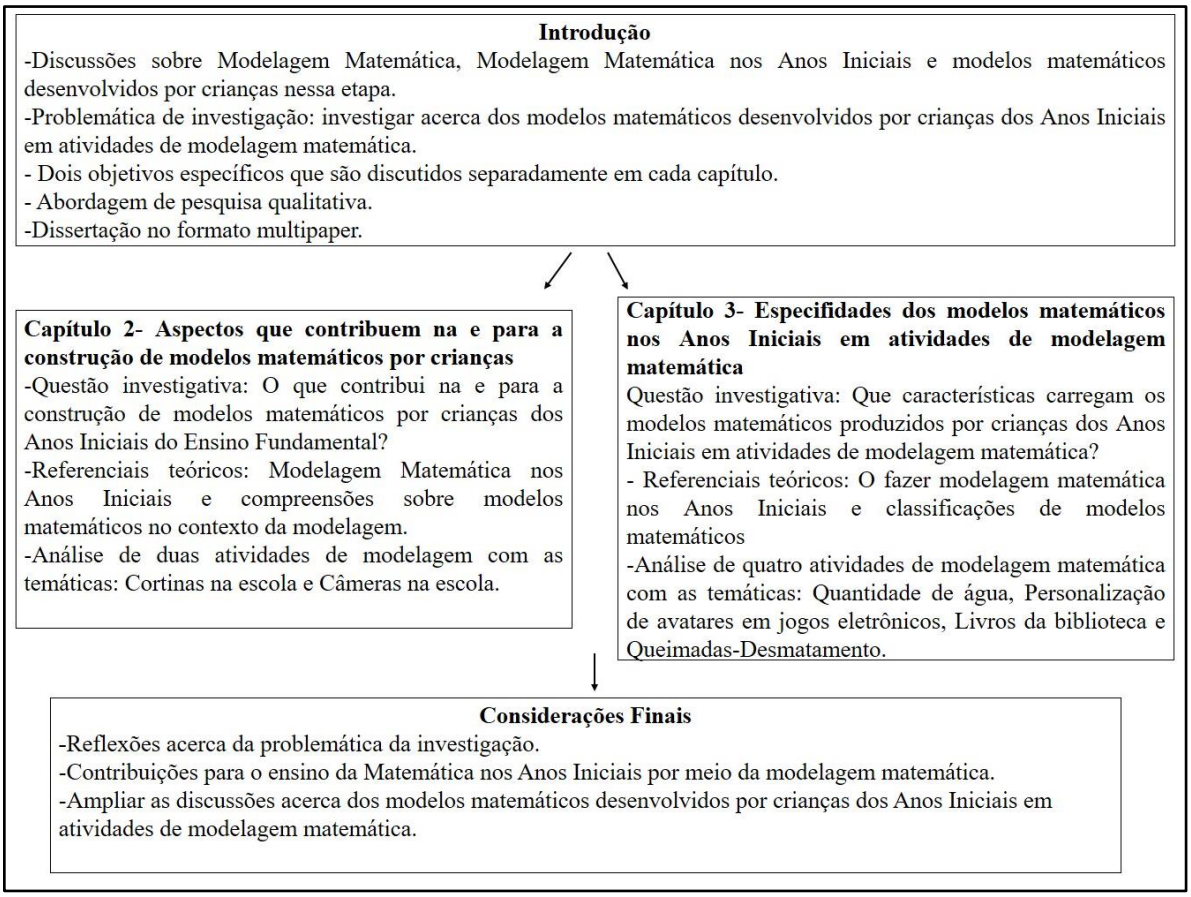
O Capítulo II, descrito em forma de artigo, é intitulado: *Aspectos que contribuem na e para a construção de modelos matemáticos por crianças.* Nele temos como questão investigativa: O que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? As discussões, no entanto, assumem princípios da abordagem qualitativa de pesquisa, de modo que nosso foco não está na quantificação dos resultados, mas na valorização do desenvolvimento e das ações dos sujeitos em seu ambiente natural (Bogdan; Biklen, 2010). Nosso olhar, nesse artigo, fica direcionado para as escolhas das crianças, suas argumentações, decisões e direcionamentos, especificamente relacionadas à produção do modelo matemático, no contexto de duas atividades de modelagem matemática que desenvolveram.

O Capítulo III que corresponde ao artigo 2, com o título: *Especificidades dos modelos matemáticos nos anos iniciais em atividades de modelagem matemática,* também se caracteriza como uma investigação empírica que busca refletir sobre a questão: Que características carregam os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática? Com a intenção de responder à questão proposta, direcionamos nosso olhar às produções das crianças, analisando-as à luz dos referenciais de modelagem matemática que trazem discussões sobre os modelos matemáticos. Essa investigação também segue os princípios da abordagem qualitativa de pesquisa e, no processo analítico, consideramos quatro atividades de modelagem matemática.

Por fim, no Capítulo IV, nomeado: Considerações Finais, apresentamos nossas reflexões acerca da problemática investigada. Com base nos resultados específicos de cada artigo, buscamos estabelecer articulações que evidenciem aspectos relacionados aos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Tecemos contribuições de modo a ampliar o debate acerca da modelagem matemática nos Anos Iniciais, sobretudo, focalizando aspectos do modelo matemático nesse nível de escolaridade.

Na Figura 1.5 ilustramos como se organiza a estrutura desta investigação.

Figura 1.5: Organização da dissertação



Fonte: A autora.

2.0 Referências

ALMEIDA, L. M. W. ; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação (UNESP),** v. 11, p. 1-16, 2005.

ALMEIDA, L. W., CASTRO, E. M. V. ; SILVA, M. H. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto online. **Alexandria**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 17, n. 22, p. 19 - 35, out., 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 6, 2015.

ALMEIDA, L. M. W. ; VERTUAN, R. E. . Discussões sobre como fazer modelagem matemática na sala de aula. In:**Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Lourdes Maria Werle de Almeida; Eleni Bisognin; Jussara de Loiola Araujo. (Org.) 1ed.Londrina: EDUEL, v. 1, p. 19-44, 2011.

ALMEIDA, L. M. W; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática–Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes?/Mathematical Modeling–What We're Dealing with: Different Models or Different Languages?. **Acta Scientiae**, v. 14, n. 2, p. 215-239, 2012.

ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. A. P. (2021). Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, 12(2), 1–27. https://doi.org/10.26843/rencima.v12n2a1

ALVES-MAZZOTTI, A. Parte II – O Método nas Ciências Sociais. *In:* ALVES-MAZZOTTI, A. J., GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. Campinas: Mercado de Letras**, v. 1, p. 347-367, 2015.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria** - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais**... Caxambu: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. Ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira; das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n.2, p. 7-32, jul. 2009.

BLUM, W; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational studies in mathematics**, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 12 ed. Porto: Porto, 2010.

BORROMEO FERRI, R. Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. **Educação e Matemática**: Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa, n. 110, p. 19-25, nov./dez. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília,2018.

BRASIL, Ministério da Educação, (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF.

BURAK, D. Modelagem Matemática nos diferentes níveis de ensino: uma perspectiva. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2014. **Anais...** Campo Mourão, 2014.

CALDEIRA, A. D.. Modelagem Matemática: um outro olhar. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** v. 2, n. 2, p. 33-54, 2009.

CAMPOS, I.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador|professor. **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n..2, p. 324-339 maio/ago. 2015.

CRESWELL, John W.; CRESWELL, J. David. **Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Penso Editora, 2021.

D'AMBRÓSIO, U. **Mathematical Modelling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions.** Journal of Mathematical Modelling and Application, Blumenau, v. 1, n. 1, 2009, p. 89-98.

DOERR, H. M.; ENGLISH. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education,** Reston, v. 34, n. 2, 2003,p. 110-136.

DOOREN, W. V.; et al. Word problem classification: a promising modelling task at the Elementary Level. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. 279 (Eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling.** New York: Springer, 2011. p. 47-56.

DUKE, N. K.; BECK, S.W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, 2003, p. 3-18.

ENGLISH, L. Modeling with complex data in the primary school. In: LESH, R. et al. (Eds.). **Modeling students' mathematical modeling competencies.** New York, London: Springer, 2010. p. 287-300.

ENGLISH, L. D. Developing early foundations through modeling with data. In C. Hirsch (Ed), Annual perspectives in mathematics educations: Mathematical Modeling Mathematics. p. 187- 195. Reston: **NCTM**- National Council of Teachers of Mathematics. 2016.

ENGLISH, L.; WATTERS, J. Mathematical modelling with young children. In: HØINES, M. J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.). **Proceedings of the 28th Conference of the International**

Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 2. Bergen: IGPME, 2004. p. 335-342.

FERREIRA, A. B. H. **Mini Aurélio**: o dicionário da língua portuguesa. 8. ed. Curitiba: Positivo, 2010.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar.** 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GOMES, J. C. S. P.; SILVA, K. A. P. Prática de Modelagem Matemática nos anos iniciais: um olhar para o processo de formação. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 11, n. 2, 2021, p. 1-23.

KATO, L. A. et al. **Conversas com quem gosta de modelagem matemática**. Ponta Grossa: Texto e Contexto, 2022. 240 p. ISBN 978-65-88461-88-4.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Models and Modeling. In: A**nnual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education**, 28, Mérida. Proceedings... Universidad Pedagógica Nacional: Mérida, 2006, p. 92-95.

LINGEFJÄRD, Thomas. Faces da modelagem matemática. **ZDM** , v. 38, p. 96-112, 2006.

LUNA, A.V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas séries iniciais: o gérmen da criticidade. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Santa Catarina, n. 2, p. 135-157, 2009.

MAAβ, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. **Teaching Mathematics and Its Application**, v 24, n. 2-3, p. 61-74, 2005.

MAAß, K. **Classification scheme for modelling tasks.Journal für Mathematik-Didaktik**,31(2), 285-311, 2010.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

MUTTI, G. S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, SIPEQ, 5, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**, Foz do Iguaçu: SEPQ; UNIOESTE, 2018.

NISS, M. Prescriptive modelling - challenges and opportunities. In: STILLMAN, Gloria Ann; BLUM, Werner; BIEMBENGUT, Maria Salett (eds.). **Mathematical modelling in education research and practice**: cultural, social and cognitive influences. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 67-79.

NUNOMURA, A. R. T. **Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para os registros de representação semiótica**. 2021. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RAMOS, K; FRANCHI, R. H.O.L.. Diálogos evidenciados em prática de Modelagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 4, p. 1-19, 2024.

SANTOS, R. F. **O uso da modelagem para o ensino da Função seno no ensino médio**. 2014. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade 69 de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

SANTOS, T. F. **Um modo de ver e significar a modelagem matemática nos anos iniciais à luz da semiótica**. 2022. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – [Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão-PR, 2022.

SILVA, L. M. **Modelagem Matemática**: um olhar a partir de triângulos epistemológicos/ Liane Maria da Silva. Guarapuava, 2022. xiii, 90 f. : il. ; 28 cm

SILVA, V. S; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexões e apologia aos seus usos. ALENCAR, Edvonete Souza de; LAUTENSCHLAGER, Etiene. **Modelagem Matemática nos anos iniciais.** São Paulo: Sucesso, p. 07-24, 2014.

TEODORO, F. P. **A recontextualização da Modelagem Matemática na prática pedagógica nos anos iniciais**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, 2018.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. da. Sobre modelos matemáticos nos anos iniciais: das pesquisas às práticas. **Em Teia**, Pernambuco, v. 12, n. 3, 2021, p. 1-26.

TRIGUERO, L. F.; KATO, L. A. Articulações entre os significados denotativos e conotativos para o conceito de proporção: uma experiência com Modelagem Matemática nos anos iniciais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1–25, 2022.

VERONEZ, M. R. D **As funções dos signos em atividades de Modelagem Matemática.** Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

2. CAPÍTULO II – ASPECTOS QUE CONTRIBUEM NA E PARA CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS POR CRIANÇAS

Resumo

Considerando articulações entre Modelagem Matemática na Educação Matemática e os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, esse artigo se ocupa de discutir acerca da seguinte questão: O que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? Nosso olhar se direciona, portanto, para as escolhas, argumentações, decisões e direcionamentos das crianças que culminaram na produção de seus modelos matemáticos. Tais modelos foram produzidos por crianças de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental, cujas idades variam entre 9 e 10 anos, ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática. As atividades têm como temáticas: cortinas e câmeras na escola. Os materiais de análise correspondem às imagens dos registros escritos das crianças e às transcrições das gravações, que consideram os debates instaurados nas aulas. Tais dados foram analisados qualitativamente a partir do interesse de discutir acerca da questão investigativa supracitada. Da análise identificamos aspectos, que contribuem na e para a construção de modelos matemáticos por crianças, que se relacionam com as características dos modelos matemáticos, na forma como são concebidos na Modelagem Matemática. Destacamos que esses aspectos também estão relacionados à mediação docente e às interações entre as próprias crianças e revelam que a construção dos modelos é um processo dinâmico, pautado na articulação entre conhecimentos prévios, experiências cotidianas e o desenvolvimento coletivo das ideias matemáticas, evidenciando a importância de um ambiente colaborativo e de uma mediação pedagógica sensível às necessidades das crianças.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Modelos matemáticos; Anos Iniciais.

Abstract/Resumen

Considering the connections between Mathematical Modeling in Mathematics Education and the Early Years of Elementary School, this article discusses the following question: What contributes to and contributes to the construction of mathematical models by children in the Early Years of Elementary School? Our focus, therefore, is on the choices, arguments, decisions, and directions of the children that culminated in the production of their mathematical models. These models were produced by children in a 4th-grade class, aged 9 and 10, during the development of two mathematical modeling activities. The activities focused on curtains and cameras in school. The materials for analysis consisted of images of the children's written records and transcripts of the recordings, which considered the discussions that took place in class. These data were analyzed qualitatively based on the interest in discussing the aforementioned research question. From the analysis, we identified aspects that contribute to and contribute to the construction of mathematical models by children, which relate to the characteristics of mathematical models as they are conceived in Mathematical Modeling. We emphasize that these aspects are also related to teacher mediation and interactions among the children themselves. They reveal that model construction is a dynamic process, based on the articulation of prior knowledge, everyday experiences, and the collective development of mathematical ideas, highlighting the importance of a collaborative environment and pedagogical mediation sensitive to children's needs.

Keywords: Mathematical modeling; Mathematical models; Early Years.

2.1 Introdução

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental as crianças começam a interagir com conhecimentos matemáticos a partir de contextos que são familiares a eles. Sendo a Modelagem Matemática[3] uma alternativa pedagógica que se destaca por aproximar problemas do mundo real à Matemática, permitindo que as crianças explorem situações cotidianas, vemos nela, possibilidades de desenvolver um estudo no qual as crianças podem mobilizar conhecimentos e viver experiências que favorecem a exploração de conceitos matemáticos. Além disso, podem discutir matemática a partir de situações de diferentes contextos e, ao mesmo tempo, desenvolver sua comunicação matemática.

Para o desenvolvimento deste estudo consideramos a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica que consiste na investigação de problemas associados a fenômenos reais a partir de lentes da Matemática (Almeida; Silva e Vertuan, 2012). Nessa compreensão, as atividades de modelagem matemática nos Anos Iniciais podem favorecer a construção de conhecimentos e permitir que as crianças assumam papéis ativos no processo de busca por solução para o problema eleito para estudo. Almeida, Silva e Vertuan (2012), destacam que, a modelagem matemática é uma atividade de busca por solução para um problema por meio de modelos matemáticos, em que "o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se 'torna presente' por meio deste modelo" (p. 13). Assim, o modelo matemático, ao 'dar forma' à solução do problema, possibilita que as crianças se envolvam na construção da solução do problema e na compreensão do processo.

A discussão acerca da Modelagem Matemática trazida neste artigo focaliza, sobremaneira, os modelos matemáticos, em particular, os modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, para discutir acerca dessa temática, destacamos alguns estudos que articulam Modelagem Matemática aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, dentre eles, aqueles que abordam a implementação prática em sala de aula (English, 2003; English; Watters, 2004), a construção de significados nos discursos das crianças durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (Luna, Souza, 2009; Almeida , Tortola, 2014) e a formação docente para conduzi-las (Gomes, 2018; Gomes; Silva, 2021; Teodoro, 2018). Consideramos também, pesquisas que discutem conexões da modelagem

[3] Neste artigo, opta-se por grafar *Modelagem Matemática* com iniciais maiúsculas quando se trata do campo de pesquisa na área da Educação Matemática e *modelagem matemática* em letras minúsculas quando se refere às atividades realizadas em sala de aula.

matemática, nesse nível de escolaridade, com diferentes referenciais teóricos (Tortola, 2012; 2016; Nunomura, 2021; Santos, 2022).

Os debates instaurados nesses estudos e a inquietação advinda do estudo de Tortola (2016), no qual se discute, de modo mais pontual, em torno da produção de modelos matemáticos nos Anos Iniciais, nos incentivou a eleger a seguinte questão de investigação: O que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?

Para debater acerca dessa questão, realizamos uma pesquisa empírica e nos respaldamos nos pressupostos da abordagem qualitativa de pesquisa. Assim, as inferências que ora trazemos são fruto de um olhar qualitativo acerca das ações e produções das crianças de um quarto ano do Ensino Fundamental, ao longo do desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática. Nosso interesse com essa questão é ampliar a compreensão sobre a produção de modelos matemáticos nesse nível de escolaridade e discutir os aspectos que exercem influência no processo de construção de tais modelos.

Cabe destacar que em Tortola e Silva (2021) é feita uma discussão em torno da construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e de como tal construção pode orientar práticas pedagógicas em sala de aula. Porém, nosso interesse se sustenta em compreender como os modelos matemáticos emergem nas atividades desenvolvidas pelas crianças, bem como os elementos que participam dessa dinâmica de construção, sejam eles estratégias adotadas, recursos mobilizados, interações entre os participantes ou decisões tomadas ao longo do processo.

Sendo assim, o artigo segue a seguinte estrutura: Sobre Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Encaminhamento metodológico; Os modelos matemáticos nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: como eles emergiram; Resultados e discussões e, por fim, as considerações finais seguidas das referências.

2.2 Sobre Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A aprendizagem de Matemática no contexto escolar requer alternativas pedagógicas que conectem os conteúdos matemáticos às realidades e experiências das crianças. Nesse cenário, a Modelagem Matemática, discutida na Educação Matemática há mais de quatro décadas (Biembengut, 2009), tem se destacado como uma alternativa relevante tanto para o ensino

quanto para a aprendizagem.

Ao ser incorporada à prática pedagógica do professor, a Modelagem Matemática pode ser compreendida como veículo, que se caracteriza pelo propósito de "construir modelos para aprender matemática" (Galbraith, 2012, p.5). Dessa forma, ela se apresenta como uma alternativa metodológica para o ensino da Matemática, caracterizada pela interação dinâmica entre o problema inicial, os procedimentos e conceitos utilizados e a solução final obtida (Almeida, Silva e Vertuan, 2012).

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática envolve a busca por informações, seleção de variáveis, formulação de hipóteses, simplificações, construção do modelo matemático, interpretação da solução e sua comunicação. Essas ações acontecem ao longo das fases denominadas: inteiração, quando há exploração e compreensão de aspectos da situação-problema; matematização, fase em que os dados são traduzidos para a linguagem matemática; resolução, fase na qual acontece a construção do modelo matemática; e interpretação e validação, fase em que se realiza a análise e adequação da solução (Almeida, Silva e Vertuan, 2012). Embora organizadas de forma sequencial, essas fases são flexíveis e permitem ajustes.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a modelagem matemática assume também essa configuração, mas, de modo particular, essas fases têm algumas especificidades que levam em conta características e necessidades dessa etapa escolar (Tortola, 2016). Contudo, esse autor defende a importância da modelagem matemática como uma alternativa pedagógica na prática com crianças, argumentando que, sob orientação do professor, elas podem problematizar situações reais fundamentadas na matemática e despertar seus modos de pensar. Além disso, há indicativos de que atividades de modelagem matemática desempenham um papel essencial na mobilização, construção e produção de conhecimentos e que, nesse processo, as crianças têm oportunidade de lidar com dados complexos em contextos desafiadores e significativos, o que contribui para o desenvolvimento de seu pensamento crítico e reflexivo (English, 2010).

Investigações como a de Teodoro e Kato (2021) complementam a discussão sobre modelagem nos Anos Iniciais ao identificarem que a apropriação de linguagens adequadas e a contextualização das atividades são essenciais para facilitar o aprendizado. Elas também destacam que essa prática, nesse nível de escolarização, tem se ocupado de particularidades e necessidades desse nível de ensino, utilizando ações já consolidadas em sala de aula, o que incentiva o planejamento e a condução dessas atividades.

No mesmo sentido, Jocoski (2020) observou que as práticas de modelagem promovem um ambiente de aprendizagem ativo e interdisciplinar, onde as crianças se sentem valorizadas

e participam ativamente do processo. Os resultados de sua pesquisa indicam que essa prática envolve ações de mediação do professor e o envolvimento coletivo das crianças. Além disso, destaca que a modelagem permite o uso de tecnologias, possibilita um trabalho interdisciplinar com diferentes áreas de conhecimento e fortalece a relação entre escola e família.

Em relação ao papel desempenhado pela modelagem matemática para contribuir para a formação cidadã das crianças, Silva e Kato (2012) relatam que ela propicia "muitas oportunidades nas quais os estudantes podem levar as discussões da sala de aula para o seu cotidiano, à conscientização acerca do seu papel na sociedade, bem como provocar mudanças na sua forma de ver o mundo" (p.818).

O destaque dado à modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino da Matemática nos Anos Iniciais, também se efetiva nas discussões que focalizam os modelos matemáticos como meio de promover conhecimentos. Luna, Souza e Santiago (2009) relatam que estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental reconhecem que os modelos matemáticos retratam parcelas de aspectos da sociedade e servem como meio para discutir implicações sociais, políticas e econômicas. Em Almeida e Tortola (2014), os autores concluem, ao analisarem como crianças de 8 a 9 anos do quarto ano utilizam a linguagem em atividades de modelagem matemática, que a construção dos modelos matemáticos é subsidiada pelo uso da linguagem natural e numérica. Além disso, destacam que tais modelos conduzem à resolução das situações-problema propostas.

De modo geral, os modelos matemáticos decorrentes do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática são produzidos à medida que os estudantes interagem com a situação-problema, mobilizam conhecimentos matemáticos e desenvolvem representações para responder às questões propostas. Nesse sentido, compreender as especificidades desses modelos no contexto dos Anos Iniciais se faz importante para ampliar discussões acerca da modelagem matemática nesse nível de escolaridade.

A seguir, apresentamos algumas compreensões de modelos matemáticos e suas características no contexto dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

2.3 Modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

O conceito de "modelo matemático" tem sido amplamente debatido, especialmente em relação à sua definição, criação e função no contexto em que aparece. Segundo Ferreira (2010), desde os primórdios da civilização, a tentativa de descrever fenômenos foi mediada por modelos, que podem ser entendidos como representações de algo a ser reproduzido. Na

Educação Matemática, de modo geral, os modelos matemáticos são usados para finalidades diversas e, de forma particular, na Modelagem Matemática na Educação Matemática, eles desempenham papéis, nas salas de aula, que podem culminar para finalidades pedagógicas.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) o modelo matemático é reconhecido como um "sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso em linguagem ou estrutura matemática" (p. 13), cujo objetivo é representar, descrever ou explicar o comportamento de sistemas, geralmente não matemáticos. Nessa compreensão, a construção de modelos matemáticos, em modelagem matemática, ocorre dentro de um processo no qual se busca uma solução para o problema inicial, ou seja, acontece na fase resolução; fase que envolve a construção de um modelo matemático para descrever a situação, analisar seus aspectos relevantes e responder às questões formuladas.

Doerr e English (2003) esclarecem que os modelos matemáticos correspondem a representações matemáticas e podem se manifestar em forma de esquemas, gráficos, desenhos, tabelas ou descrições em linguagem natural. Independente da forma, esses modelos matemáticos não devem servir apenas "como subsídios para a argumentação e a comunicação de resultados" (Tortola; Silva, 2021, p. 4), mas promover revisões conceituais e aprendizados novos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico e da formação cidadã (Barbosa, 2004; Silva; Kato, 2012).

A construção de um modelo matemático, se relaciona também a uma outra fase denominada matematização. Para Tortola (2016), a matematização é um processo que precisa ser mediado pelo professor, uma vez que, especialmente nos Anos Iniciais, as crianças podem não possuir experiências prévias com modelagem matemática.

> A busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Daí que a segunda fase da modelagem matemática é caracterizada por "matematização", considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições são realizadas a partir da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido [...] (Almeida, Silva e Vertuan, 2012, p. 16).

Na busca por resolver o problema matemático evidenciado na fase matematização é que modelos matemáticos podem ser utilizados ou produzidos. Em particular, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os modelos matemáticos podem permitir que as crianças estabeleçam conexões entre conceitos matemáticos e situações reais. Como nos lembra Barbosa (2009), os modelos matemáticos podem ser utilizados para "oferecer argumentos para sustentar a

introdução de um novo conceito" (p. 77), e oferecer definições, ou até ordenar fenômenos de outras áreas da ciência por meio da matemática. Contudo, para que os modelos matemáticos ganhem essa abrangência é importante a mediação do professor e participação ativa das crianças. Nesse contexto, Tortola e Silva (2021) destacam que a construção de modelos nesse nível de escolaridade precisa considerar: planejamento, responsabilidade compartilhada e comunicação, e que a mediação do professor é o que ajuda as crianças a transitar entre os conhecimentos cotidianos e os conceitos matemáticos formais.

Sendo um modelo matemático uma representação externa à mente das crianças, que vem expressa em termos matemáticos, essa representação pode assumir diferentes formas, como linguagem natural, numérica, tabular, gráfica ou figural (Tortola, 2012), e pode servir como ponte para outras linguagens matemáticas. Assim, a construção do modelo possibilita que as crianças compreendam suas ações, percebam as relações matemáticas presentes no mundo real e explorem estratégias para resolver problemas.

Tortola e Almeida (2013, p. 625) asseveram que "mais importante do que o modelo obtido é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural". Ao discutir a respeito da construção do modelo matemático nos Anos Iniciais, Tortola (2016, p. 263) aponta que as crianças produzem "uma diversidade de estruturas matemáticas que podem contribuir para a observação das regularidades e generalização da situação, assim como podem constituir o ponto de partida para a discussão de relações entre diferentes situações". Essa diversidade de modelos torna a experiência de modelagem matemática em sala de aula distinta daquela observada em outros níveis de ensino. O modelo matemático nesse nível de escolaridade ganha uma configuração diferente dos modelos matemáticos construídos em outros contextos de ensino (Tortola, 2016), mas mesmo assim favorece com que, a partir dele, seja possível responder ao problema investigado.

A modelagem matemática, quando proposta a crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tem se orientado em alguns princípios, com a intenção de que as oportunidades de aprendizagem matemática sejam estendidas a todas as crianças. Nesse sentido, English (2010) apresenta cinco princípios para a modelagem matemática nessa etapa da educação: o princípio da significação pessoal, o princípio da construção do modelo, o princípio da documentação do modelo, o princípio da autoavaliação e o princípio da generalização do modelo.

O princípio da significação pessoal prevê que os problemas sejam elaborados de forma a possibilitar que as crianças compreendam e se relacionem com as situações propostas. O princípio da construção do modelo requer que as crianças desenvolvam uma estrutura

matemática para descrever, explicar e prever aspectos da situação, destacando características estruturais, ideias-chave e suas relações. O princípio da documentação do modelo enfatiza a necessidade de externalizar o pensamento por meio de representações diversas, como listas, tabelas, gráficos, diagramas e descrições, detalhando os passos que levaram à construção do modelo. A obrigação de incluir descrições e explicações sobre os passos que resultam na construção de seus modelos é também uma característica importante. O princípio da autoavaliação permite que as crianças analisem a eficácia de seus modelos, e que avaliem e revisem progressivamente as suas criações à medida que resolvem o problema. Por fim, o princípio da generalização do modelo estabelece que as representações criadas devem ser aplicáveis a outras situações semelhantes.

Todos esses princípios que orientam a modelagem matemática colaboram para a exploração de diferentes representações e estratégias, bem como conferem ao modelo matemático possibilidades de estabelecer relações entre conceitos matemáticos e situações reais. Uma vez que os modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental assumem diferentes formas e desempenham um papel na interpretação e organização de situações matemáticas, a mediação do professor e o uso de múltiplas representações vem como possibilidade para comunicar pensamentos. Daí o nosso interesse de investigar acerca dos modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

2.4 Encaminhamento metodológico

Apoiamos o desenvolvimento desse estudo na abordagem qualitativa de pesquisa, uma vez que ele tem características como as destacadas por Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50):

> a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; [...] a investigação qualitativa é descritiva; [...] os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; [...] os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; [...] o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Também consideramos como encaminhamento metodológico as assertivas de Almeida e Dias (2004) em relação à implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula. Essas autoras asseveram que "[...] na medida em que o aluno vai realizando as atividades nos diferentes momentos [...]", a sua compreensão acerca do processo de Modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando (Almeida e Dias, 2004, p. 26). Ademais, elas consideram importante que o

envolvimento das crianças com a modelagem matemática seja introduzido de maneira gradual, evoluindo conforme a familiaridade delas e, também da professora, com essa alternativa pedagógica. Em relação ao papel do professor na condução de atividades de modelagem matemática, seguimos as orientações de Almeida, Silva e Vertuan (2012), que nos colocam que ao professor cabe o papel de acompanhar e realizar intervenções oportunas a fim de estimular e potencializar o aprendizado.

As atividades que fundamentam a discussão deste artigo, cujas temáticas são: “Cortinas na escola” e “Câmeras na escola”, foram desenvolvidas por uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental, cujas idades variam entre 9 e 10 anos, de uma escola pública no interior do Paraná, composta por 33 crianças. Cabe destacar que tanto as crianças quanto a professora, que também atuou como pesquisadora, não tinham experiência prévia com modelagem matemática e que o contato com essa abordagem foi se desenvolvendo gradativamente ao longo do ano letivo de 2024.

Seguindo nossos encaminhamentos metodológicos, as crianças foram organizadas em seis grupos, cada um trabalhando em uma proposta específica, conforme seus temas de interesses. Para a coleta dos dados recorremos ao uso de celulares para capturar imagens do desenvolvimento das atividades, bem como gravadores de voz, em cada um dos grupos, a fim de registrar discussões que conduziram as crianças a desenvolver tais atividades. Além disso, as produções das crianças foram recolhidas para análise e a professora se utilizou de um diário de campo para registrar observações relevantes.

A atividade de modelagem matemática intitulada "Cortinas na escola" surgiu a partir da influência de outras atividades de modelagem que foram desenvolvidas em momentos anteriores com a turma, de forma a promover certa familiarização das crianças, e também da professora|pesquisadora,[4] com a modelagem matemática. Essas experiências prévias tinham como característica comum a abordagem de situações problemáticas vinculadas ao contexto escolar, como a organização das frutas na escola e a organização do portão em dias de chuva. Ao vivenciarem essas propostas, as crianças passaram a se familiarizar não apenas com a ideia de investigar situações reais, mas também com a possibilidade de levantar problemas que fazem parte do seu cotidiano na escola.

Nesse sentido, considera-se que tais experiências contribuíram para ampliar o repertório das crianças sobre o que pode ser um "problema investigável" na modelagem, influenciando-

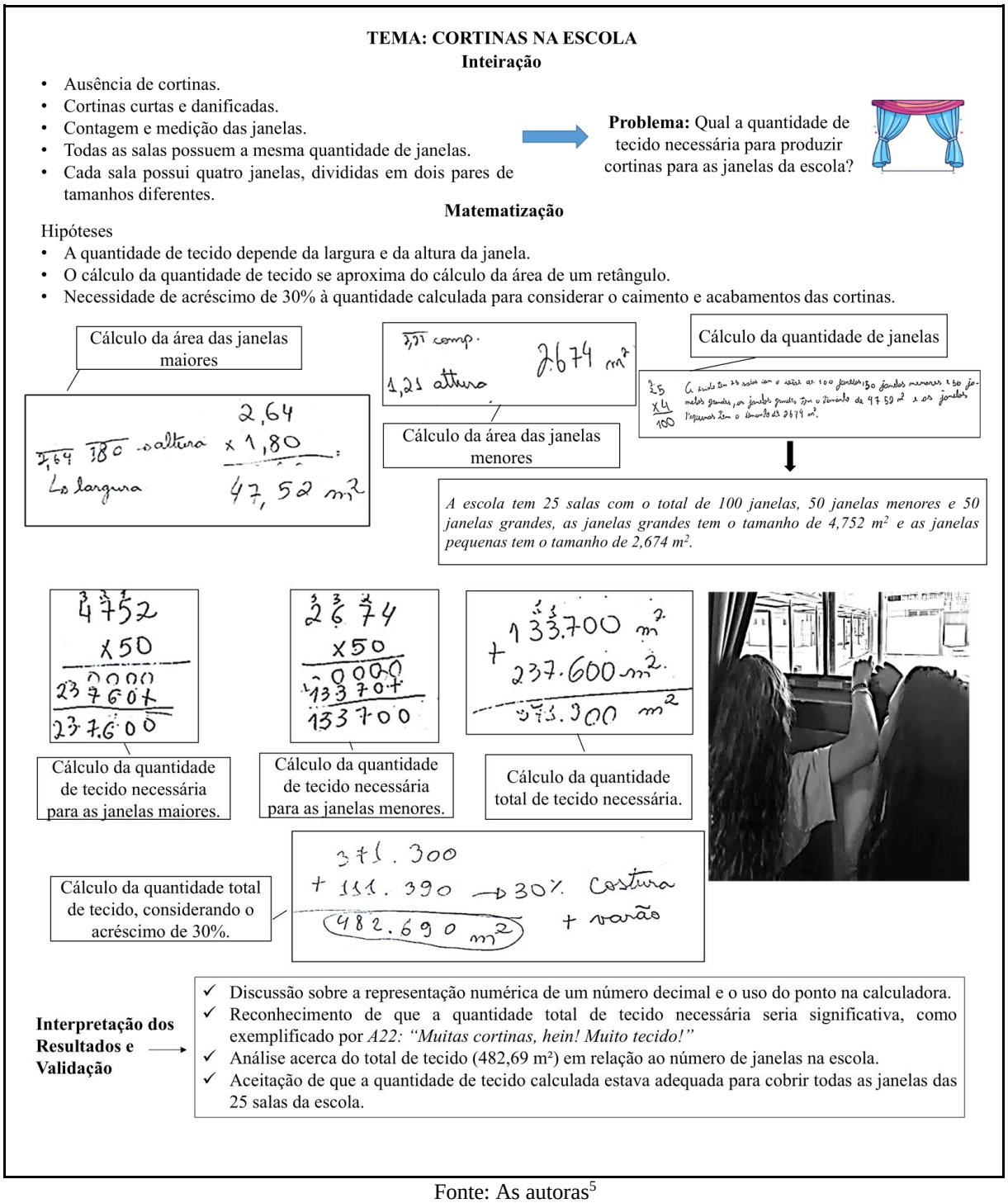
[4] Para nos referirmos à professora|pesquisadora, cuja atuação envolve a dualidade e a interdependência dos papéis de educadora e pesquisadora, representada aqui pela barra vertical (|), conforme a metáfora proposta por Campos e Araújo (2015).

os a propor, desta vez, uma situação também relacionada à escola. A motivação para a escolha desse tema se relaciona à luminosidade da sala de aula a qual estudavam, uma vez que esta sala havia sido recentemente construída e, até a metade do ano letivo ainda não tinha cortinas. Essa ausência de cortinas causava desconforto devido ao excesso de luz natural, especialmente quando era utilizado projetor de imagens.

Na investigação desse tema, as crianças perceberam que outras salas também enfrentavam problemas semelhantes. Havia salas com persianas danificadas ou insuficientes para cobrir completamente as janelas. Essa observação foi reforçada ao relembrar experiências que tiveram em outras salas. A motivação para o estudo dessa problemática também ganhou força ao relatarem que como eles mudam de sala ano a ano, era melhor pensar na possibilidade de todas as salas terem suas cortinas trocadas. As crianças, portanto, identificam a ausência ou inadequação das cortinas como um problema real e relevante em seu ambiente escolar, e ficam motivadas a buscar soluções para esse problema.

Entre os seis grupos constituídos na turma, dois decidiram focar na temática de fabricação de cortinas para as salas de aula. A professora sugeriu que esses dois grupos trabalhassem em conjunto para unir esforços na busca por uma solução para o problema identificado: Qual a quantidade de tecido necessária para produzir cortinas para as janelas da escola? A atividade foi realizada ao longo de três aulas, e sua síntese está apresentada na Figura 2.1.

Figura 2.1: Síntese da atividade: Cortinas na escola



Fonte: As autoras[5]

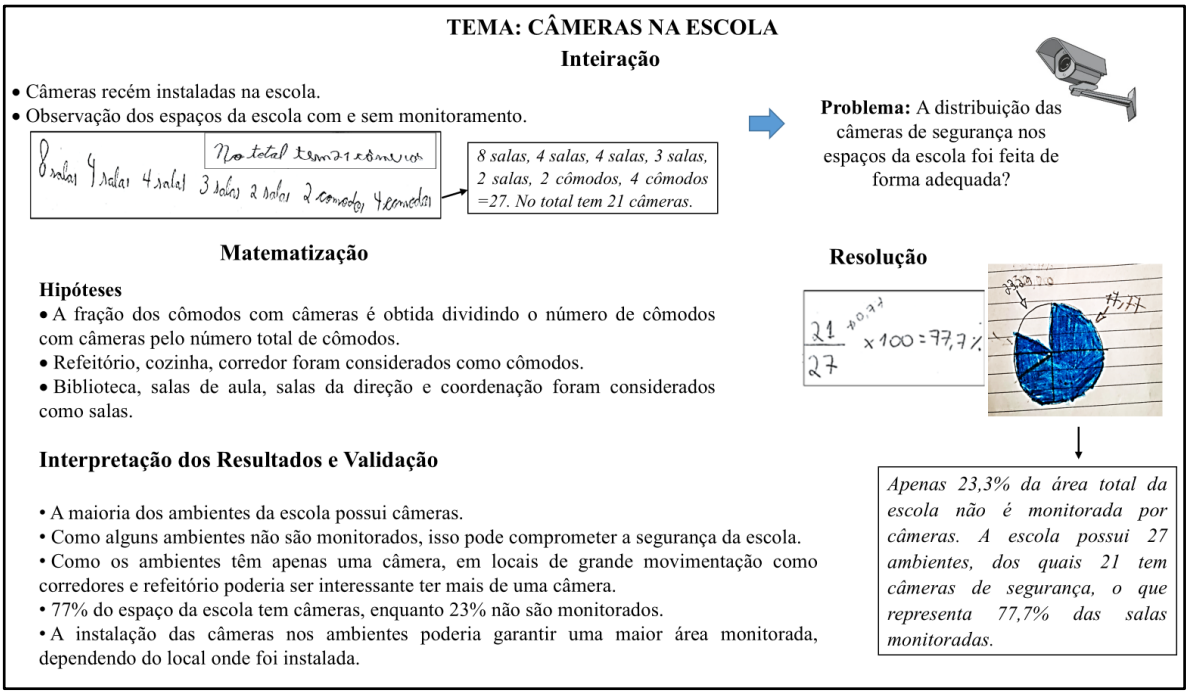
A outra atividade de modelagem matemática trazida para discussão tem o tema: "Câmeras na escola". O interesse por esse tema foi motivado pela curiosidade das crianças em compreender a distribuição das câmeras de segurança nos ambientes internos da instituição

[5] *Alguns registros apresentam imprecisões nos cálculos realizados pelas crianças, as quais serão analisadas nas seções seguintes.*

escolar. A escola havia acabado de instalar câmeras de segurança e as crianças já haviam notado que alguns ambientes tinham monitoramento e outros, não. Essa constatação gerou uma série de questionamentos sobre os critérios de instalação e a abrangência da vigilância. Diante disso, as crianças buscaram analisar se a distribuição das câmeras de segurança nos espaços da escola era adequada. A relevância do problema está associada à preocupação com a segurança escolar e à compreensão das medidas adotadas para garanti-la.

O problema foi, portanto, assim formulado: A distribuição das câmeras de segurança nos espaços da escola foi feita de forma adequada? e o grupo que dedicou-se à sua resolução era composto por cinco crianças. A atividade foi desenvolvida ao longo de três aulas. A síntese do desenvolvimento dessa atividade é apresentada na Figura 2.2.

Figura 2.2: Síntese da atividade: Câmeras na escola



Fonte: As autoras

Para a análise dos dados, com vistas a refletir acerca da seguinte questão investigativa: O que contribui na e para a elaboração de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? concentramos atenção nas argumentações, decisões e direcionamentos das crianças. Os recortes das aulas são trazidos na forma de episódios. Tais episódios foram organizados de modo a evidenciar os momentos que permearam a elaboração dos modelos matemáticos, seja por meio de interações, justificativas, conflitos ou avanços na resolução do problema. Para garantir o anonimato, utilizamos símbolos (A1, A2, A3, e assim por diante, sem diferenciação em qual grupo estavam) na apresentação dos episódios que retratam diálogos

associados ao desenvolvimento das atividades que selecionamos para discussão. Para nos referirmos à professora pesquisadora utilizamos a abreviação “Prof.”

Na seção a seguir buscamos elucidar o processo de produção de modelos matemáticos em atividades de modelagem desenvolvidas por crianças dos Anos Iniciais.

2.5 Os modelos matemáticos nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: como eles emergiram

na Atividade 1: Cortinas na escola

Diante da necessidade observada pelas crianças, de cobrir as janelas das salas de aula da escola com cortinas de tecido, e do reconhecimento de que esse seria um problema que gostariam de resolver, elas enunciam o seguinte problema (real): qual a quantidade de tecido necessária para produzir cortinas para as janelas da escola? A proposta de estudar esse problema, identificado pelas crianças, veio alicerçada em experiências anteriores implementadas pela professora|pesquisadora na intenção de familiarizar as crianças com a modelagem matemática.

A atividade foi desenvolvida em um ambiente colaborativo por dois grupos de crianças, um de seis integrantes e outro com cinco. Por ambos os grupos terem interesse em investigar sobre as cortinas nas salas de aula, a professora sugeriu que eles trabalhassem em conjunto, com vistas a unir esforços na intenção de propor solução que visasse a instalação de cortinas em todas as salas de aula, considerando a quantidade de janelas em cada sala e suas dimensões como etapa inicial do planejamento. Nesse trabalho colaborativo, as crianças buscaram compartilhar cálculos e estratégias utilizadas, permitindo interação entre eles.

O Episódio 1 retrata o momento no qual as crianças discutem, após realizarem as medidas das janelas a partir do uso de uma fita métrica, sobre o que fazer com os valores correspondentes às medidas das janelas.

Episódio 1

A17: *E se juntarmos esse com esse?* (Referindo-se à medida da largura e altura da janela).
A22: *Acho que vamos ter que juntar um resultado com o outro* (estão sugerindo realizar a soma das medidas das dimensões da janela).
[...] As crianças solicitam a professora e aguardam sua presença para continuar as discussões.
Prof.: *Para descobrir o que devemos fazer?* ... (silêncio)
Prof.: *Lembra que calculamos a área? Como fizemos isso?*
A20: *Temos que somar.*

Prof.: *Lembram que calculamos a área do portão* (referindo-se à outra atividade de modelagem matemática desenvolvida anteriormente)*, o que fizemos?*
A22: *Acho que somamos. Não... espera, acho que foi vezes.*
Prof.: *Isso aí, multiplicamos.*

As falas de A17 e A22 (*E se juntarmos esse com esse?* e *Acho que vamos ter que juntar um resultado com o outro)* sugerem que as crianças buscavam por uma estratégia para resolver o problema, contudo, não estavam confiantes com o direcionamento que estavam propondo. Essas falas também indicam uma tentativa de busca por conexão entre as medidas obtidas e o problema a resolver. Nesse momento, as crianças pareciam estar preocupadas em operar com os números que representavam as medidas das janelas, porém sem qualquer reflexão sobre o que buscavam de fato.

Embora as crianças aludem uma operação matemática a partir da fala: "*juntar um resultado com o outro*", elas não a realizam e solicitam a professora. Ao requerem a presença da professora no grupo, sinalizam que precisam de uma confirmação dela para proceder aos cálculos. Elas poderiam operar com os valores das medidas das janelas do jeito que estavam pensando, mas, em vez disso, recorrem à professora, o que evidencia o papel da mediação docente na matematização do problema, como destacado por Tortola (2016), ao enfatizar que a orientação do professor nos Anos Iniciais se faz importante quando as crianças precisam utilizar conceitos matemáticos para resolver problemas reais. Nesse sentido, a interação entre professor e crianças atua como suporte para a transição de um problema real para um problema matemático.

Essa mediação da professora, embora demasiadamente explícita (*Lembra que calculamos a área? Como fizemos isso?)*, colabora para uma matematização do problema real, ou seja, depõe uma transição de linguagens: o problema real ganha conotação de um problema matemático.

Mesmo com a indicação de que o problema poderia ser resolvido utilizando-se do conceito de área, as crianças não relacionam tal conceito ao preenchimento de uma superfície e, dessa forma, não estabelecem de imediato que para obter a área da janela haveria necessidade de multiplicar suas dimensões: comprimento e largura. A fala de A20 (*temos que somar),* indica falta de compreensão do conceito de área, bem como, falta de entendimento sobre o que buscavam para resolver o problema. Isso também é identificado na fala de A22 (*Acho que somamos. Não... espera, acho que foi vezes),* que sugere a realização de cálculos matemáticos sem qualquer reflexão sobre o que o resultado dessas duas operações matemáticas representam em relação ao problema em estudo.

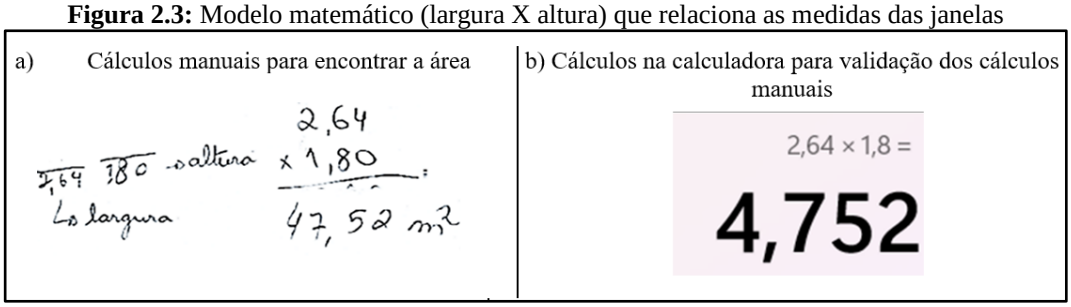
O fato das crianças indicarem essas duas operações matemáticas, de forma aleatória, mesmo após terem sido incentivadas pela professora a relembrar o cálculo da área do portão, realizado no contexto do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática por elas desenvolvida anteriormente, indica que, embora a noção de área já tivesse sido explorada, sua aplicação em um novo contexto não aconteceu de forma imediata, carecendo, portanto, de apoio docente.

Esse fato corrobora a afirmação de Burak e Martins (2015), de que nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental o trabalho com modelos matemáticos “, na maioria das vezes, os modelos prontos, como exemplo: as expressões matemáticas para o cálculo de área de uma superfície e de equações lineares e quadráticas, dentre outras” (p.104) não leva à compreensão do que está em jogo na aplicação desses modelos ditos prontos. Como destacam os autores, o uso de modelos prontos, como o cálculo de área, “deve considerar o desenvolvimento e o ajuste de expressões e/ou operações matemáticas para se examinar melhor e mais adequadamente um caso em estudo” (Burak; Martins, 2015, p. 105). Essa oportunidade de reflexão acerca de um conceito matemático constitui-se em um momento privilegiado e rico para a formação do pensar matemático.

Muito embora a intervenção da professora tenha sido muito diretiva, ela permitiu que as crianças formulassem o modelo matemático adequado ao problema. Ao relacionar a situação ao cálculo de área, foi possível as crianças determinarem a área das janelas, multiplicando sua altura por sua largura. Esse processo reflete o princípio da construção do modelo, descrito por English (2010), pois envolve a formulação de uma estrutura matemática para descrever a situação, destacando as características principais do problema e suas relações.

Dessa forma, o modelo matemático (largura x altura) ocorreu a partir da interação entre o conhecimento prévio das crianças (experiências anteriores com cálculo de área), o contexto da atividade (a necessidade real de instalar cortinas) e o suporte da professora (mediação e retomada do conceito de área). Ao realizar essa multiplicação, as crianças estabelecem uma relação direta entre as dimensões da janela e a quantidade de tecido necessária. Esse procedimento de multiplicação entre altura e largura é ilustrado na Figura 2.3.

Figura 2.3: Modelo matemático (largura X altura) que relaciona as medidas das janelas



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

O procedimento das crianças ao realizar o cálculo ilustrado na Figura 2.3a revela que elas apresentam dificuldades com números decimais e, portanto, com o uso da vírgula. O aceite do valor 47,52m² por elas calculado indica que ainda não estavam relacionando o resultado calculado à quantidade de tecido, que responderia à solução do problema. Também sinaliza que não realizaram qualquer reflexão em torno do valor calculado e da sua coerência, visto que a multiplicação realizada considerava os números 2,64 e 1,80. Ao utilizarem a calculadora para validar seus cálculos manuais, passam a considerar os valores exibidos no visor (Figura 2.3b), mas não fazem qualquer comentário a respeito dessa escolha.

Outro ponto que destacamos é que nos registros escritos as crianças continuam a usar o ponto como separador, possivelmente, por influência da forma como estão acostumados a representar números inteiros e a separar suas classes. Isso sugere que, embora já tivessem algum contato com a notação decimal, ainda não compreendiam que o uso da vírgula, se difere do uso do ponto e que para representar números decimais se faz necessário o uso da vírgula. Apesar dessas limitações, o uso da calculadora pelas crianças sugere uma preocupação delas em validar os resultados e pode ser entendido como um movimento inicial em direção ao estabelecimento de relações entre os valores numéricos e a quantidade de tecido.

Ao analisar as produções das crianças no âmbito de seus grupos a professora chama a atenção para o fato dos tamanhos das janelas.

Episódio 2

Prof.: *Mas tem um pequeno detalhe: Essas janelas são do mesmo tamanho daquelas outras?* (Referindo as janelas com dimensões contrárias)
Todos: *Não!*
A22: *Vamos ter que medir a outra também.*

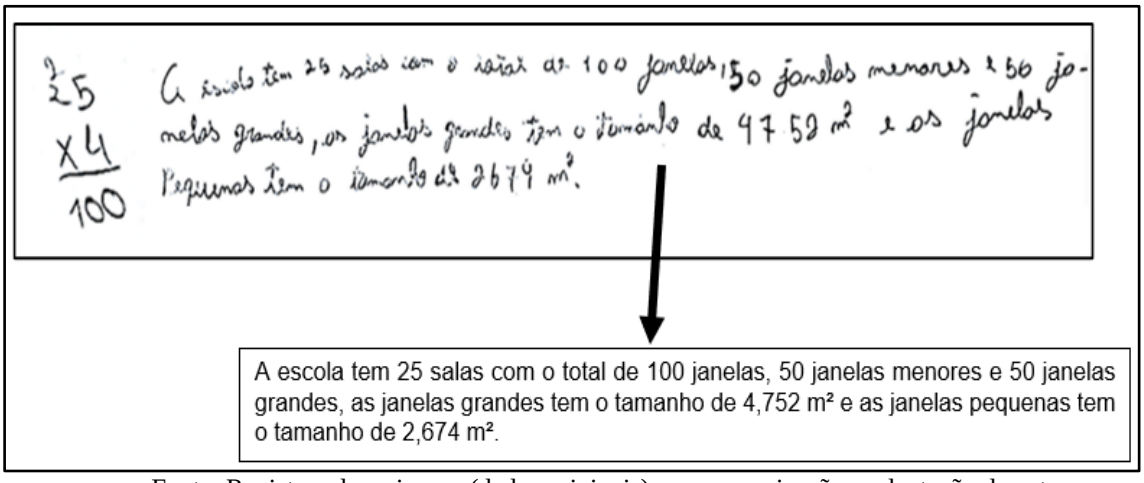
A fala de A22 *(Vamos ter que medir a outra também)* revela a compreensão da necessidade de medir as janelas que têm tamanhos diferentes da janela medida inicialmente. Essa compreensão também depõe que as crianças compreendem que janelas de tamanhos diferentes, precisam de uma quantidade de tecido também diferente. Ou seja, as suposições

iniciais passam a ser repensadas e levam as crianças a revisar suas representações. Como sugerido por Tortola e Silva (2021), esse é o momento de "retomada da situação", no qual as crianças precisam coletar novos dados e reformular suas abordagens.

Ao considerarem que as janelas têm dimensões diferentes, revisitam seus cálculos e, realizam outros, visando elaborar uma resposta ao problema. A revisão feita pelas crianças exemplifica o caráter interativo da modelagem. Embora o modelo matemático para cálculo da área tenha se mantido (multiplicação de largura por altura), foi preciso ajustar os valores das dimensões das janelas para que a área de cada uma delas pudesse ser calculada. Reconhecemos que esse refinamento contribui para a consolidação da compreensão matemática, incentivando as crianças a desenvolverem um olhar mais crítico sobre suas próprias formulações.

Após realizarem os novos cálculos, considerando todas as janelas, as crianças buscam sistematizar as informações obtidas elaborando um registro escrito que expresse a quantidade de salas, o total de janelas e as respectivas áreas calculadas. Esse registro, apresentado na Figura 2.4, evidencia um avanço no processo de resolução do problema, demonstrando que as crianças foram capazes de organizar os dados de forma articulada, aproximando-se de uma resposta mais estruturada para o problema em questão. Contudo, alguns aspectos relativos à compreensão e ao uso da notação decimal ainda permanecem como desafios para o grupo.

Figura 2.4: Modelo matemático que indica que há dois tamanhos diferentes de janela



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

A resposta ao problema escrita pelas crianças na forma textual (Figura 2.4), nos permite inferir que o entendimento acerca dessa resposta em relação ao problema ainda precisava entrar em processo de consolidação. A quantidade de tecido informada pelas crianças desconsidera o uso da vírgula e, nesse sentido, revela certa dificuldade na compreensão do sistema de

numeração decimal ou na leitura de medidas com parte decimal. Também revela que elas não interpretam a resposta dada em relação ao problema que estava sendo resolvido.

O Episódio 3 retrata o diálogo mediado pela professora sobre o que fazer com os resultados das áreas obtidos, com vistas a indicar a quantidade de tecido que deveria ser comprada.

Episódio 3

A21: *Eu sei. Professora. 4,752X 2,675.*
Prof.: *Por que vezes 2,675?*
A21: *Eu não sei.*
A26: *Não, não é certo. Seria 50 x 2,675.*
Prof.: *Por quê?*
A26: *Porque são 50 janelas dessas e das outras.*
Prof.: *Tenta aí.*
As crianças realizam os cálculos conforme proposto por A26 sobre a área das janelas e após logo solicitam a professora e aguardam sua presença para continuar as discussões.
Prof.: *E agora? O que fazer?*
A26: *É 237,600 vezes 133,700.*
A21: *Não é vezes, é um mais o outro: 237,600 + 133,700.*

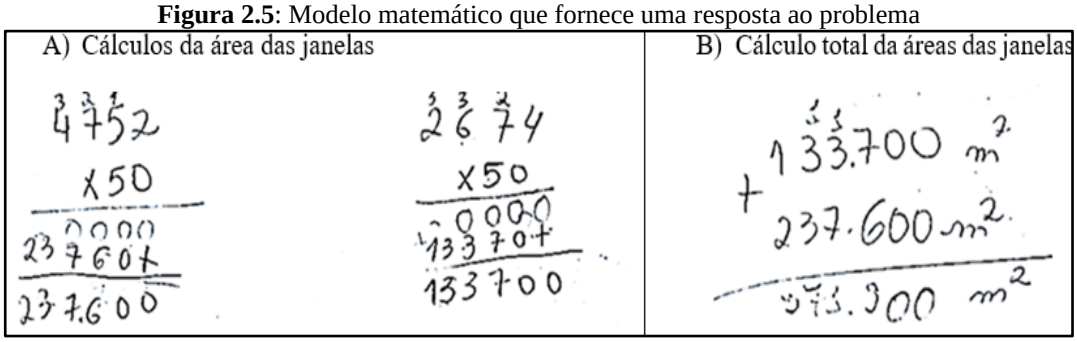
Na interação entre professora e crianças expressa no Episódio 3, observa-se um processo de construção coletiva de conhecimento matemático associado à resolução do problema. A fala de A21 *(Eu sei. Professora. 4,726 X 2,675)* denota que essa criança ainda não havia compreendido como era necessário operar com os números obtidos para resolver o problema. Ou seja, parecia que os números obtidos estavam descolados de uma situação real. Inferimos, portanto, que a operação de multiplicação sugerida por ela foi proposta de forma mecânica, sem qualquer reflexão acerca do que essa operação significava no contexto do problema em estudo.

Por outro lado, a fala de A26 *(Não, não é certo. Seria 50 x 2,675),* além de refutar a proposta de resolução indicada por A21, indica uma possibilidade de resolução do problema. A intervenção da professora, ao questionar e incentivá-los a "*tentar aí"*, mostra que ela buscou orientar as crianças a repensar suas estratégias, sem fornecer uma resposta imediata.

Conforme mostra a Figura 2.5A, os cálculos foram realizados seguindo a proposta de A26. Ainda assim, a mediação da professora se mostrou necessária para validar as operações efetuadas e promover avanços na compreensão do problema. Os registros evidenciam erros na escrita dos números, pois eles não são considerados como números decimais. O uso do ponto como separador decimal, em vez da vírgula, pode indicar falta de compreensão de que, no sistema brasileiro, o ponto separa classes de ordem e a vírgula separa a parte inteira da parte decimal na representação de um número racional.

Ainda no Episódio 3, é possível perceber que as crianças seguem reformulando e validando suas estratégias à medida que avançam nas discussões. Quando A26 sugere a multiplicação ("*É 237,600 vezes 133,700*") e A21 intervém com uma operação distinta ("N*ão é vezes, é um mais o outro: 237,600 + 133,700*"), nota-se um esforço colaborativo para interpretar a situação, embora ainda persistam dificuldades conceituais na manipulação dos valores numéricos.

Figura 2.5: Modelo matemático que fornece uma resposta ao problema



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

O Episódio 4 retrata que, apesar das crianças terem chegado a um resultado (Figura 2.5B), a intervenção da professora se faz necessária para ampliar o escopo da análise do problema, levando-os a considerar outros aspectos relevantes, como o varão e as barras do cortina, algo não discutido até o presente momento.

Episódio 4

Prof.: *Mas vejam bem… (*mostrando a janela da sala*) a minha cortina vai ter somente esse tamanho aqui (*referindo-se à área dentro da janela*). Temos que considerar mais alguma coisa? O tecido é só para aquela parte. Tem que considerar algo a mais?*
A21: *O tamanho a mais.*
A26: *Da linha.*
A21*: Tem o varão [...]*
Prof.: *Mas será que esse espaço a mais é mais da metade da cortina? Essa parte de dentro aqui seria o total (*mostrando a área da janela*). Se fosse 50%, teria que ser mais que metade.*
A25: *É menos.*
Prof.: *Quantos? Será que é 30%? O que é por cento?*
A21: *100.*
Prof.: *Isso, pensa num total de 100, e vamos pegar 30% (*mostra na cortina*).*
A26: *Acho que é isso que sobra para o varão e embaixo.*
Prof.: *Mas como faz isso? (*Silêncio*) Vou ajudar vocês.*

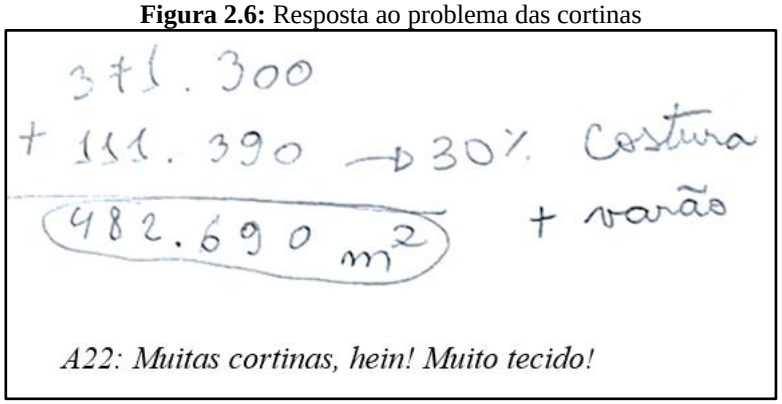
Embora a fala da professora seja explícita e pontual, as respostas das crianças, como "o tamanho a mais", "da linha" e "tem o varão", indicam que reconhecem a necessidade de um ajuste, mas ainda não possuem clareza sobre como quantificá-lo. Esse processo denota certa

construção progressiva de compreensão acerca do problema, ao passo que as crianças mobilizam seus conhecimentos prévios e tentam formular explicações.

A intervenção da professora ao introduzir o conceito de porcentagem, atende à função de "oferecer argumentos para sustentar a introdução de um novo conceito" (Barbosa, 2009, p. 77). Essa intervenção favorece a conexão dos cálculos realizados pelas crianças a um conceito matemático ainda não utilizado, ampliando o repertório delas e sugerindo um olhar adicional no processo de análise e de construção de uma resposta aceitável para o problema em estudo, no caso, o cálculo do tecido adicional necessário para a fabricação da cortina.

Ao introduzir o conceito de porcentagem por meio da pergunta "*O que é por cento?*", a professora busca ativar conhecimentos prévios, e a resposta de A21 (*"100"*) sugere uma noção inicial sobre ele. No entanto, o momento de silêncio após a pergunta da professora: *"Mas como faz isso?"* dá indícios de que as crianças não sabiam como lidar com a porcentagem para incluí-la na resolução do problema. Esse silêncio leva a professora a intervir de forma mais direta e, sinaliza que, embora as crianças compreendam o que era necessário fazer, não sabiam como proceder para finalizar a resolução do problema. Ele também indica que as crianças precisam do apoio e direcionamento da professora para concluir a resolução do problema. Na Figura 2.6 aparecem os cálculos realizados pelas crianças para estimar o total de tecido necessário.

Figura 2.6: Resposta ao problema das cortinas



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

Nesta figura ainda chama a atenção a forma como as crianças registram os resultados numéricos: "371.300", "111.390" e "482.690". O fato do uso do ponto como separador decimal ainda se fazer presente nos registros das crianças parece indicar que eles desconsideram a diferença entre o uso desses dois elementos: ponto e vírgula. Também nos sugere que esse uso é influenciado por dispositivos digitais, jogos, vídeos em outros idiomas ou até mesmo do uso que fazem da calculadora.

Assim, a escolha pelo uso do ponto parece estar associada ao resultado obtido na calculadora, evidenciando que há necessidade de discussões que favoreçam a construção de conhecimento sobre a notação decimal dos números pertencentes ao conjunto dos números racionais. Ainda que esse aspecto não comprometa o raciocínio das crianças no que se refere à enunciação de uma resposta ao problema, ele destaca a importância de práticas pedagógicas que promovam abordagens acerca dos números decimais e de sua representação em dispositivos como a calculadora.

A afirmação de A22: "*Muitas cortinas, hein! Muito tecido!*", contida na Figura 2.6, expressa mais do que um comentário espontâneo. Ela revela uma percepção em torno do resultado obtido como resposta ao problema, indicando que a criança começou a estabelecer conexões entre os números obtidos nos cálculos e a situação real em estudo. Essa manifestação sugere um avanço na interpretação dos resultados e na compreensão do problema, sinalizando que a modelagem contribuiu para a atribuição de sentido aos resultados matemáticos calculados.

Como destacam Almeida, Silva e Vertuan (2012), todo o processo de revisão e adaptação das representações matemáticas, torna-se importante no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e, em particular, a fase "resolução" é a que a construção de um modelo matemático que visa não apenas descrever a situação, mas também analisar aspectos relevantes e responder às questões propostas, possibilitando até previsões sobre o problema estudado. No caso em questão, os modelos matemáticos construídos pelas crianças combinaram relações da matemática a partir do cálculo da área do retângulo com a situação em estudo e ganharam contornos diferentes quando foi considerada a instalação das cortinas na janela. Esse percurso evidenciou um processo de construção progressiva, influenciado por interações entre as crianças, seus conhecimentos em relação à situação e a mediação da professora.

As crianças, ao responderem ao problema que requer a quantidade de tecido necessária para confeccionar cortinas para as janelas da escola, construíram um modelo com base no algoritmo da multiplicação, seguido pela adição de um percentual estimado para margens e varão. O desenvolvimento dessa atividade evidencia que a construção de modelos matemáticos nos Anos Iniciais ocorre de forma progressiva, sendo influenciada pelas interações entre os estudantes, seus conhecimentos prévios, o contexto em foco e a mediação do professor. A retomada de conceitos como área e porcentagem, associada ao refinamento das estratégias das crianças e à incorporação de novos elementos, sinalizam que a modelagem matemática se

desenvolve em um ambiente investigativo e de uma escuta pedagógica sensível, que visa favorecer a produção e evolução dos modelos matemáticos pelas crianças.

na Atividade 2: Câmeras na escola.

A atividade "Câmeras na escola" foi desenvolvida para investigar se a distribuição das câmeras de segurança nos espaços da escola foi feita de forma adequada. O tema surgiu a partir da curiosidade das crianças, já que as câmeras haviam sido recentemente instaladas. A atividade foi realizada por um grupo de cinco crianças, que analisaram quais espaços eram monitorados e refletiram sobre a cobertura de segurança na instituição. O processo começou com a coleta de dados, na qual as crianças identificaram os cômodos da escola utilizando uma planta baixa disponibilizada pela professora (Figura 2.7).

Figura 2.7: Vista superior da escola



Fonte: Acervo da professora

Com base nessa imagem, elas realizaram um levantamento nos próprios espaços para verificar a localização das câmeras. Durante o processo de inteiração com o tema, surgiram discussões sobre as operações matemáticas necessárias para resolver o problema identificado, como descrito no Episódio 1.

Episódio 1

Prof.: *Tá, mas quantos são os cômodos cobertos no total?* (Referindo ao total de ambientes analisados).

A15: *Temos que somar ainda.*

A16: *Como assim somar?*

A15: *Somar ué, juntar.*

A16: *24*

A15: *24 cômodos.*

Prof.: *Faz de novo.*

A15: *Somamos, deu 27.*

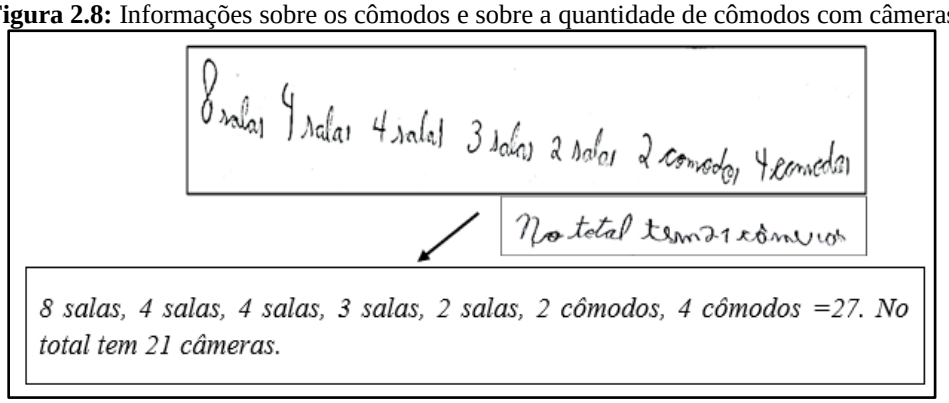
Nesse episódio observa-se um momento em que as crianças organizam e consolidam os dados coletados. A pergunta da professora: "*Tá, mas quantos são os cômodos cobertos no total?*" orienta os alunos a realizarem a contagem dos ambientes monitorados. A fala de A16: "*Como assim somar?*" indica uma dúvida não apenas sobre a operação aritmética a ser realizada, mas sobre o próprio sentido da ação naquele contexto. Essa fala evidencia uma dúvida conceitual sobre a natureza da tarefa naquele momento: não se trata apenas de aplicar uma operação matemática, mas de compreender o que está sendo solicitado e qual a relação entre os dados coletados e a necessidade de contá-los ou organizá-los.

A interação entre A15 e A16 manifesta em suas falas sugere que, ao realizar a contagem dos cômodos, as crianças estão desenvolvendo estratégias para interpretar a situação e verificar a abrangência do monitoramento na escola. Esse momento evidencia a importância da estruturação dos dados como um passo inicial para, posteriormente, construir representações mais elaboradas ou formalizações matemáticas. Esse momento é fundamental para que a construção do modelo matemático possa vir a acontecer. Ao invés de simplesmente aplicar uma operação, as crianças precisam compreender a situação em sua complexidade, elaborando procedimentos que façam sentido no contexto do problema.

Além disso, a dúvida expressa por A16 reflete o caráter investigativo da atividade, na qual o caminho para a resolução não está previamente determinado, mas vai sendo delineado conforme as crianças interagem com os dados, negociam significados e decidem como organizar as informações coletadas.

A Figura 2.8 ilustra a organização inicial dos dados feita pelas crianças, que categorizam os ambientes monitorados conforme o número de salas e outros cômodos, totalizando 27 espaços, sendo que 21 deles têm câmeras. Esse processo de categorização e quantificação dos espaços monitorados indica que as crianças validam suas anotações e refletem acerca da abrangência dos espaços monitorados.

Figura 2.8: Informações sobre os cômodos e sobre a quantidade de cômodos com câmeras



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

Com essas informações, sob mediação da professora, as crianças dão continuidade ao desenvolvimento da atividade de modelagem. O Episódio 2 retrata esse fato.

Episódio 2

Prof.: *O que vocês descobriram? Tem câmeras em todos os lugares?*
A9: *Não, não em todos.*
Prof.: *Para nós descobrirmos isso, então, o que devemos fazer? Qual o número total de cômodos?*
Todos: *27.*
Prof.: *E com câmeras?*
Todos: *21.*
Prof.: *Vocês têm 27 cômodos no total. Agora, queremos saber quantos desses cômodos têm câmeras, mas queremos isso em porcentagem. Então, queremos saber quantos cômodos com câmeras representam em relação ao total de 27 cômodos. Temos 27 cômodos no total, e 21 têm câmeras. A porcentagem é uma forma de expressar essa parte em relação ao todo, dividindo a quantidade de cômodos com câmeras (21) pelo total de cômodos (27) e depois multiplicando por 100.*

Nesse episódio identificamos uma presença forte da ação da professora para o que ela pretendia abordar com as crianças quando os questiona a respeito de "quantos cômodos com câmeras representam em relação ao total de 27 cômodos". O fato dela indicar o uso da porcentagem, de certo modo, limita as discussões das crianças, que poderiam propor diferentes formas de representação, tais como frações, gráficos, tabelas ou esquemas pictóricos. A modelagem matemática pressupõe um espaço para que as crianças testem estratégias variadas, construam sentidos e desenvolvam autonomia na elaboração de modelos. Contudo, se a atuação do professor for determinista essas possibilidades ficam, por vezes, esvaídas. Como nos aconselha Santos (2022), uma aula com modelagem matemática é uma boa oportunidade para considerar experiências e propiciar com que a criança pense sobre elas também sob um ponto de vista da Matemática.

Podemos associar que a condução da professora, no Episódio 2, pode estar relacionada à sua pouca familiaridade com a modelagem matemática. Sobre esse aspecto, Tortola e Silva (2021) argumentam que a participação ativa das crianças podem guiar as práticas pedagógicas de modelagem matemática, favorecendo um olhar para além do resultado final do problema. Nessa perspectiva, o professor pode oferecer intervenções que ajudem as crianças a compreender suas próprias ações e a identificar relações matemáticas presentes nas situações analisadas. Favorecer a construção autônoma de modelos matemáticos pode ser algo que compõe o planejamento do professor. Tortola e Silva (2021) destacam que o planejamento pode ser um aspecto importante para orientar o trabalho docente em atividades de modelagem, especialmente quando o professor ainda tem pouca experiência com essa abordagem.

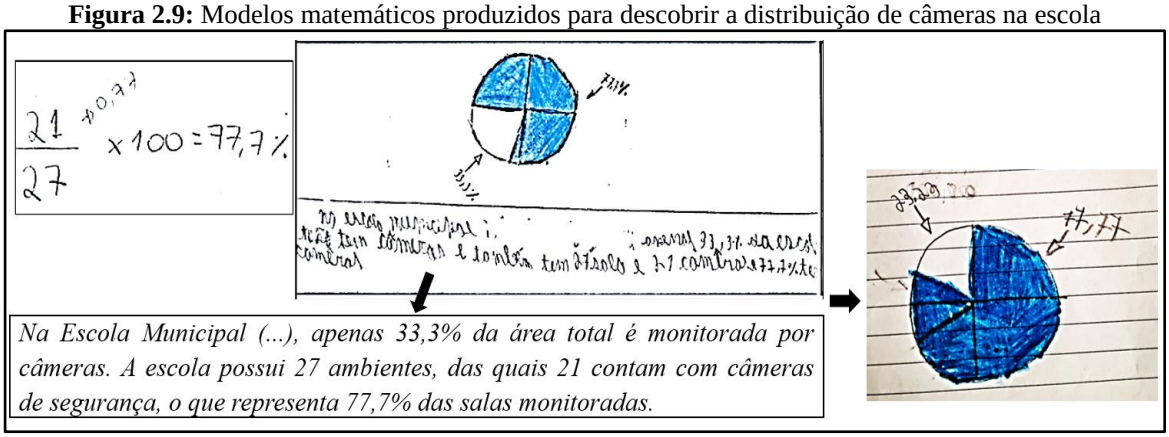
No Episódio 3 retratamos mais uma ação da professora na tentativa de levar as crianças a responderem ao problema, atenta ao conceito de porcentagem.

> **Episódio 3**
> A professora pega e desenha um círculo, dizendo: *"Se fosse para eu pintar 77,7%, quantos vocês pintariam?"* Ela explica que o círculo inteiro representa 100%. Um aluno risca o círculo ao meio.
> ***Prof.:*** *E aí, seria quantos?*
> ***A8:*** *Seria a metade.*
> ***Prof.:*** *E quantos, então, seriam 77,7%? [...] Se 77,7% têm câmeras, quantos por cento não têm?".*

Desse episódio inferimos que a professora busca representar graficamente a porcentagem utilizando-se de um círculo, que pode ser interpretado como uma tentativa de apoiar visualmente a compreensão da relação entre os ambientes monitorados e não monitorados. No entanto, é possível observar que a mediação se mantém centrada na figura do professor.

A ação de dividir o círculo ao meio, de certo modo, ajuda A8 a entender que seria a metade. Esse entendimento pode ser visto como um indicativo de construção de sentido a partir de aproximações intuitivas. A partir da intervenção (incisiva) da professora, as crianças assumem seu encaminhamento e realizam alguns registros, como os dispostos na Figura 2.9.

Figura 2.9: Modelos matemáticos produzidos para descobrir a distribuição de câmeras na escola



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

A representação dos cálculos realizada pelas crianças, ilustrada na Figura 2.9 evidencia que a divisão e a multiplicação foram utilizadas na descoberta de como ficaram a distribuição de câmeras na escola. As crianças dividiram o número de ambientes monitorados (21) pelo total de ambientes existentes na escola (27) e multiplicaram o resultado por 100, obtendo aproximadamente 77%. Inferimos que a representação gráfica (o círculo como um "todo") pode ter ajudado as crianças na compreensão da proporção entre os espaços monitorados e os não monitorados. Mesmo que tenha partido da professora, ao interagir com a imagem e tentar interpretar as frações ou porcentagens, as crianças conseguem atribuir sentido matemático ao problema, a partir desse recurso visual.

Ao serem convidados a expressar por meio de porcentagem o espaço não monitorado, as crianças afirmam que 77% dos ambientes estavam monitorados e que 33% correspondiam aos espaços não monitorados. Foi necessária uma intervenção da professora no sentido de incentivar as crianças a analisarem os dados com mais atenção, que culminou na seguinte observação de um dos estudantes: *"Já sei, não dá 100%"* (A8). A partir dessa constatação, as crianças refazem os cálculos e indicam que, aproximadamente, 23% dos ambientes não contavam com monitoramento.

O processo de chegar a essa resposta, ilustrado na Figura 2.9, sugere que há um desdobramento em torno dos modelos matemáticos produzidos pelas crianças e que tais desdobramentos acontecem devido à uma reflexão, seja ela provocada pela professora ou na interação entre as próprias crianças. Na produção desses registros as crianças realizam operações matemáticas e interpretam uma representação gráfica, que são elementos centrais na construção de modelos nos Anos Iniciais. Como afirma Burak (2010, p. 23), ao se referir à Educação Básica, "muitas vezes, nesse nível de ensino, um modelo simples que reproduza as características do fenômeno estudado, mesmo com uma matemática elementar, é suficiente".

Assim, ainda que o modelo elaborado seja simples, ele revela uma compreensão da situação e do raciocínio proporcional envolvido, coerente com o nível de escolarização das crianças.

A análise da atividade "Câmeras na escola" evidencia que a construção de modelos matemáticos nos Anos Iniciais pode acontecer a partir da articulação entre diferentes formas de representação, como esquemas visuais e operações aritméticas, além da mediação pedagógica. Mesmo diante de uma condução mais diretiva, as crianças puderam interpretar, organizar e quantificar dados. A mobilização de estratégias e a aproximação de conceitos como porcentagem indicam que, mesmo com um repertório matemático ainda em formação, as crianças foram capazes de construir um modelo coerente com a realidade investigada. Essa experiência sugere que a modelagem matemática, mesmo quando iniciada com intervenções mais orientadas, pode favorecer a construção de modelos que expressam raciocínio matemático contextualizado.

2.6 Resultados e discussões

O objetivo de investigar *o que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental* orientou a análise das atividades desenvolvidas e discutidas neste artigo. Tendo esse interesse, buscamos identificar o que influencia a construção de modelos matemáticos nas práticas de modelagem matemática realizadas por crianças.

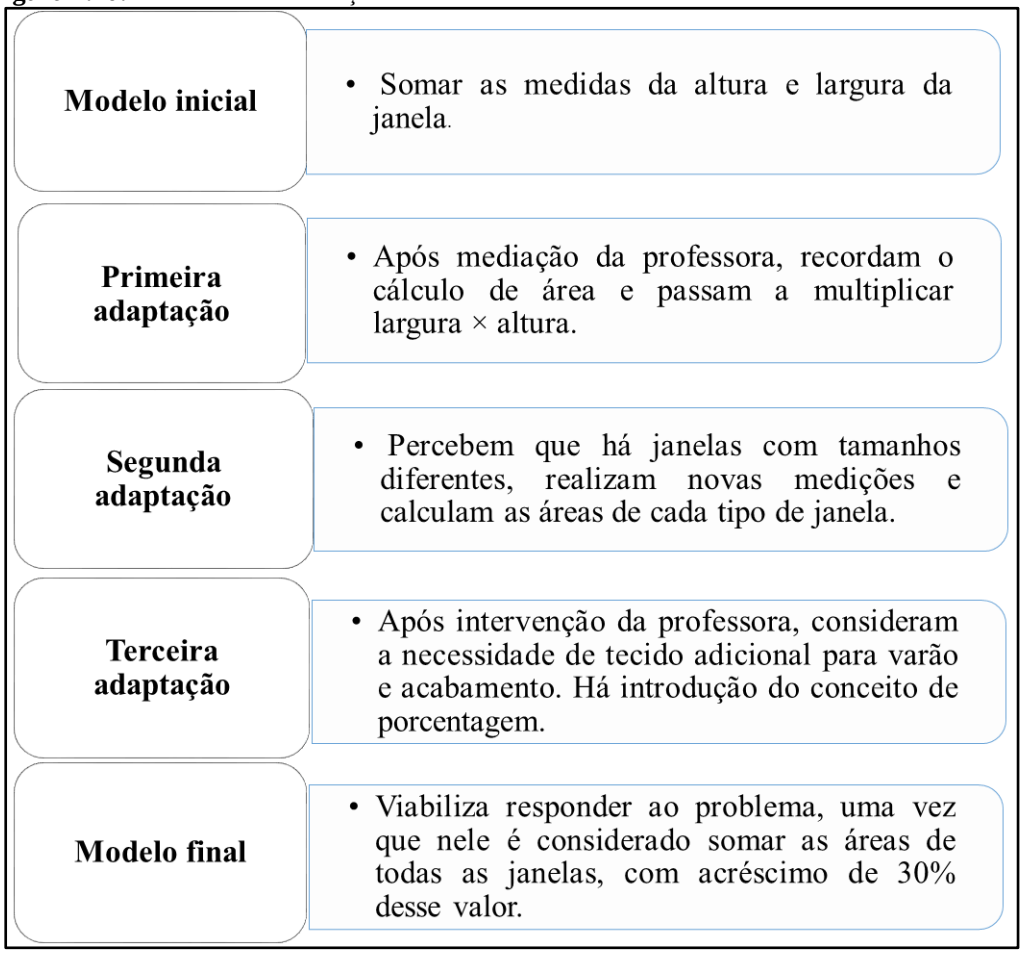
A partir da análise das produções das crianças, das interações em sala e da organização das atividades, identificamos, num sentido amplo, que as crianças e suas experiências, assim como o professor, influenciam na construção dos modelos matemáticos associados ao problema em estudo. O fato das crianças utilizarem seus conhecimentos prévios e o interesse do professor em ensinar um novo conceito também favorecem discussões que culminam na produção de modelos matemáticos.

Na atividade “Cortinas na escola” o processo de construção de modelos matemáticos foi sustentado, num primeiro momento, pelo interesse das crianças em dar uma resposta ao problema, já que elas poderiam se beneficiar com a instalação das cortinas, caso a resposta encontrada fosse aceita e validada pelos representantes da escola. Isso pontua a relevância do princípio da significação pessoal (English, 2010) e evidencia que a modelagem matemática, quando vinculada a situações reais e significativas, favorece o engajamento e a construção de sentidos.

A busca por uma resposta coerente ao problema, nessa atividade, mobilizou pensamentos e ações que foram expressos ora por palavras, ora por representações matemáticas, que foram ganhando formas distintas sempre que algo novo era incorporado. Sendo assim, as crianças respondem ao problema inicial e o fazem a partir de alterações e ampliações no seu modo de pensar sobre a situação analisada.

O percurso que leva à produção de uma resposta ao problema: qual a quantidade de tecido necessária para produzir cortinas para as janelas da escola, é permeado por mobilização de conceitos matemáticos associada às informações coletadas e assumidas como dados para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. A Figura 2.10 retrata as adaptações feitas pelas crianças aos modelos matemáticos por elas mesmas produzidos e que são decorrentes de suas compreensões sobre o fenômeno e sobre a Matemática.

Figura 2.10: Processo de construção dos modelos matemáticos na atividade "Cortinas na escola".



Fonte: As autoras.

Muito embora as crianças não tenham indicado uma expressão matemática que sugere que para saber a quantidade de tecido era necessário somar as áreas totais dos dois tipos de janelas, considerando o percentual de 30% para acabamentos e instalação de cada uma delas, elas consideram tudo isso em sua resposta final, que é aceita como resposta ao problema. No

entanto, nossa interpretação é que essa resposta foi possível devido ao ambiente investigativo e colaborativo possibilitado pela Modelagem Matemática.

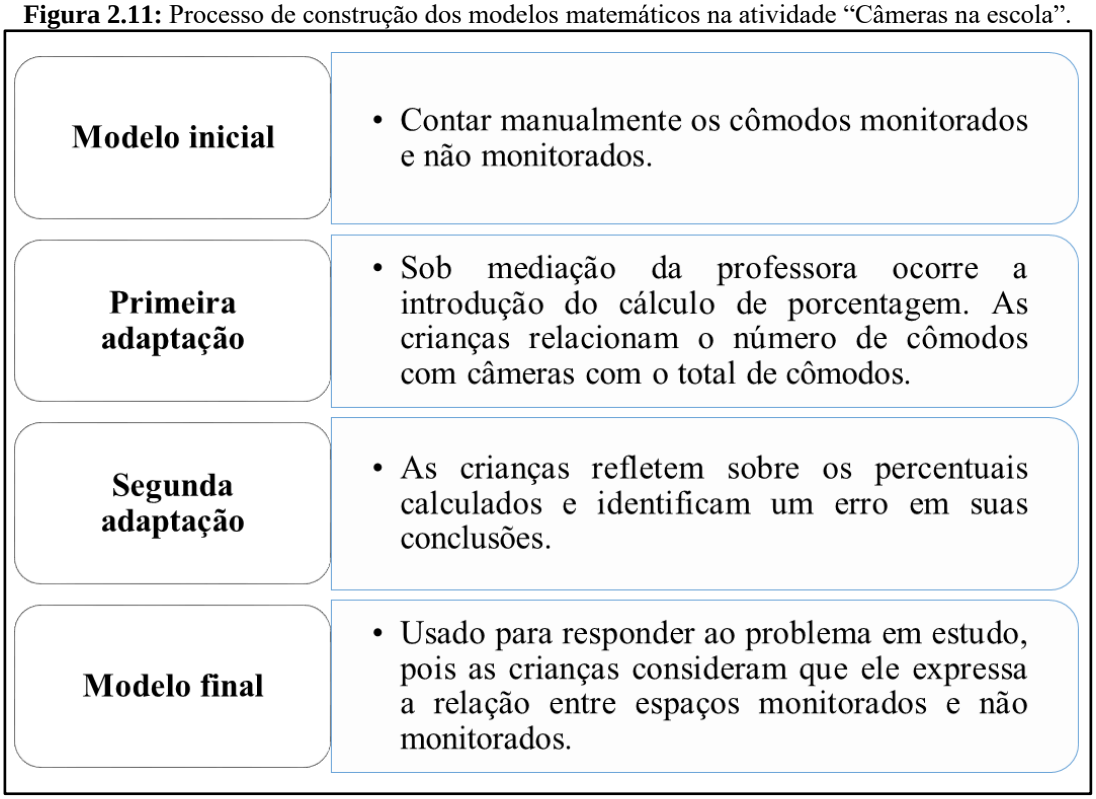
No desenvolvimento da atividade “Câmeras na escola”, o processo de construção de modelos matemáticos também foi marcado por sucessivas reorganizações dos dados e reformulações nas estratégias das crianças. Inicialmente, elas buscaram uma resposta para o problema levantado, que era verificar se a distribuição das câmeras era adequada, a partir da contagem e categorização dos ambientes monitorados.

Esse movimento envolveu o levantamento de informações, a necessidade de organização dos dados coletados e a definição de procedimentos para a análise da situação, aspectos que culminaram em uma resposta, a partir de um modelo matemático que representasse a situação em foco. Assim como na atividade das cortinas, as crianças expressaram seus pensamentos ora verbalmente, ora por meio de registros numéricos e representações gráficas. Esses modelos matemáticos produzidos pelas crianças, foram se transformando à medida que novas interpretações eram incorporadas e correções realizadas.

A cada revisão ou ajuste, por exemplo, na contagem dos cômodos ou ao refletir sobre o percentual de ambientes monitorados, as crianças ampliam sua compreensão acerca do problema e ajustam os modelos iniciais. Nesse percurso se evidencia a presença do princípio da autoavaliação (English, 2010), uma vez que as crianças analisam criticamente suas próprias produções e as reformulam com base em novas informações ou mediações da professora.

A construção da resposta para o problema das câmeras na escola, além de envolver mobilização de conceitos matemáticos articulados às informações relacionadas à situação, favorece a discussão de conceitos matemáticos como porcentagem e formas de representá-la graficamente, utilizando gráfico de setores. A Figura 2.11 ilustra as modificações realizadas pelas próprias crianças em seus modelos matemáticos, revelando como o envolvimento delas com o problema a resolver promove conhecimento sobre a situação e como esses conhecimentos podem se conectar com conceitos matemáticos. As adaptações que os modelos matemáticos sofreram refletem o movimento dinâmico das atividades de modelagem matemática e conexões mais aproximadas de realidade e matemática.

Figura 2.11: Processo de construção dos modelos matemáticos na atividade “Câmeras na escola”.

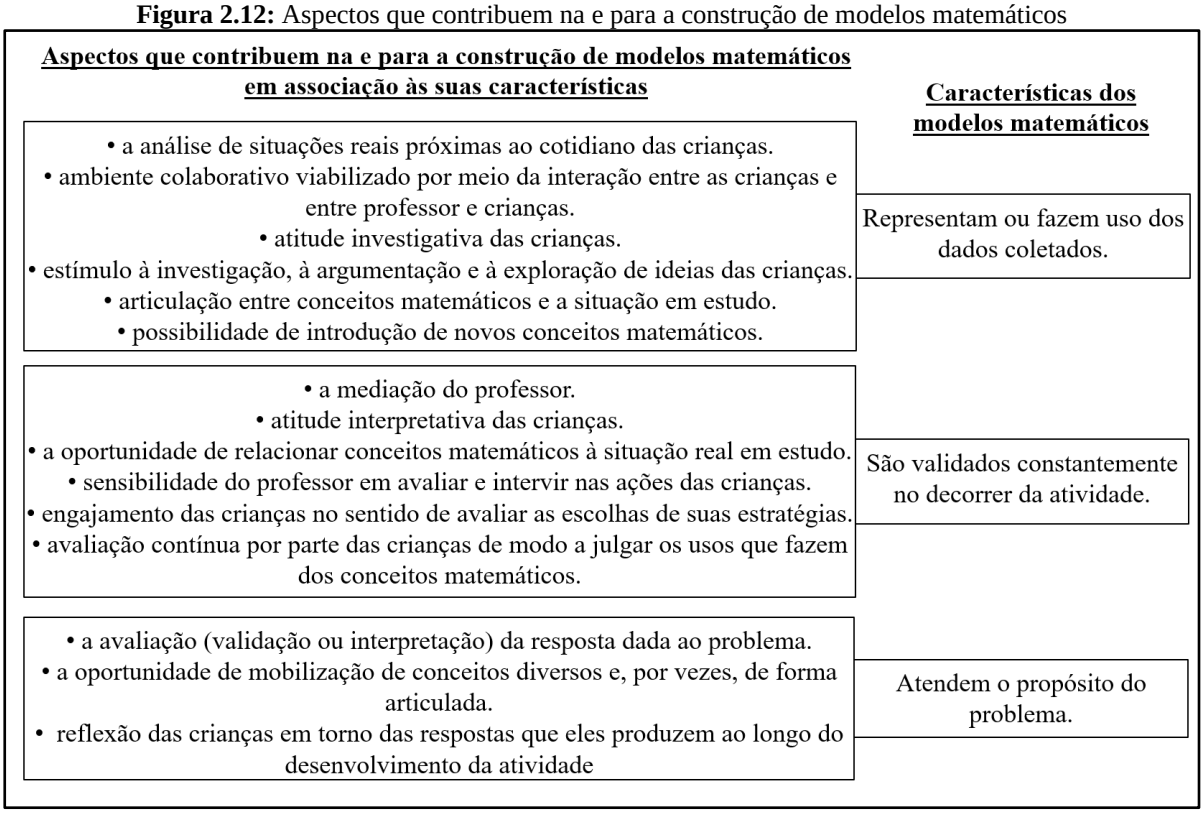


Fonte: A autora.

Nessa atividade, o modelo matemático final vem expresso por meio de um gráfico de setores e indica uma resposta que foi considerada aceita pelas crianças. Muito embora elas não realizem uma reflexão em torno do que significa esse percentual em termos de área de abrangência das câmeras, elas se dão por satisfeitas e encerram a resolução do problema. Nossa interpretação é que a solução obtida responde ao problema que elas tinham para resolver e, nesse sentido, a modelagem matemática se mostra como um caminho para avançar no modo como os problemas podem ser respondidos. Nesse caso a resposta não é necessariamente um número, mas uma representação gráfica.

O desenvolvimento dessas duas atividades de modelagem matemática nos permite inferir que há diversos aspectos que culminam na elaboração de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para sintetizar e organizar esses aspectos, elaboramos a Figura 2.12. Nela, por um lado, indicamos que um modelo matemático se presta no contexto de uma atividade de modelagem matemática, respaldados nos referenciais teóricos de modelagem matemática apresentadas nas seções iniciais deste artigo. Por outro lado, buscamos relacionar essas características dos modelos matemáticos com o fazer modelagem matemática na sala de aula dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Figura 2.12: Aspectos que contribuem na e para a construção de modelos matemáticos



Fonte: As autoras

A Figura 2.12 sintetiza elementos centrais observados nas atividades desenvolvidas e analisadas neste artigo, evidenciando que a construção de modelos matemáticos por crianças nos Anos Iniciais é resultado de uma articulação entre aspectos didáticos, investigativos e interacionais. A presença de situações do cotidiano, a mediação do professor, a valorização da escuta das crianças e o ambiente colaborativo favorecem tanto a emergência quanto o aprimoramento dos modelos produzidos. Além disso, as características dos modelos matemáticos, como representar dados, atender ao propósito do problema e serem validados ao longo da atividade, mostram-se relevantes para compreender o processo dinâmico de produção, revisão e consolidação das ideias matemáticas pelas crianças. Assim, os modelos não são entendidos apenas como produtos finais, mas como construções em movimento que se constituem ao longo da prática investigativa em sala de aula.

2.7 Considerações Finais

As análises realizadas neste artigo permitem refletir sobre a questão investigativa: o que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? A construção dos modelos se apoia em uma articulação entre dimensões

didáticas, investigativas e interacionais, que se manifestam de forma integrada nas práticas de sala de aula.

A mobilização de conhecimentos prévios, o interesse das crianças pelos temas abordados, a natureza dos problemas propostos e o ambiente colaborativo emergem como fatores para o engajamento e a produção de modelos. Esses aspectos criam condições para que as crianças se envolvam ativamente nas tarefas, reorganizem dados, testem estratégias e ajustem suas soluções ao longo do processo, mesmo quando os conceitos matemáticos não são formalizados de maneira explícita.

A mediação docente, por sua vez, revela-se decisiva ao sustentar e ampliar o desenvolvimento das ideias matemáticas. Intervenções oportunas, retomadas coletivas e inserções conceituais contribuíram para o amadurecimento das respostas e para a incorporação de novas representações, como gráficos e porcentagens, que enriqueceram os modelos produzidos. Por outro lado, foi possível identificar lacunas conceituais não exploradas, o que aponta para a importância de uma formação docente que potencialize uma mediação mais sensível aos detalhes do conhecimento matemático.

Os modelos construídos pelas crianças mostraram-se representações pertinentes às situações investigadas, orientadas por propósitos claros e passíveis de validação ao longo das atividades. Longe de serem entendidos como produtos finais e fixos, esses modelos revelaram-se como construções em movimento, processos que envolvem negociação de significados, revisão de ideias e elaboração progressiva de soluções.

Além disso, foram identificadas práticas coerentes com princípios fundamentais da modelagem matemática, como a construção de ideias, a autoavaliação por meio de revisões e correções, e tentativas iniciais de generalização. Esses movimentos evidenciam o valor formativo da modelagem como prática que articula a aprendizagem de conceitos matemáticos a partir de experiências concretas e com sentido.

Em síntese, os resultados obtidos neste artigo indicam que a modelagem matemática, enquanto alternativa pedagógica, promove aprendizagens que vão além da resolução de problemas. Ao articular problemas do cotidiano escolar com conceitos matemáticos, a modelagem favorece um processo integrador que envolve não apenas o desenvolvimento de noções matemáticas, mas também a construção coletiva do conhecimento, a comunicação entre pares e a reflexão crítica sobre as soluções apresentadas. Dessa forma, a modelagem matemática se configura como uma alternativa pedagógica capaz de articular saberes e práticas, contribuindo para uma aprendizagem contextualizada, dinâmica e apropriada aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Espera-se que essas reflexões contribuam para ampliar o entendimento sobre a modelagem nos Anos Iniciais, incentivando práticas que valorizem os caminhos percorridos pelas crianças, reconhecendo a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica importante para o ensino e a aprendizagem da matemática desde os primeiros anos escolares.

2.8 Referências

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, ano 17, n.22, pp. 19-35. Rio Claro SP: SBEM, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012. 158 p.

ALMEIDA, M. W. L.; TORTOLA, E. Modelagem matemática no ensino fundamental: a linguagem de alunos como foco de análise. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 111-142, 2014

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria** - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati,** Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07-32, 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BURAK, D.; MARTINS, M. A. Modelagem matemática nos anos iniciais da Educação Básica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 8, n. 1, p. 92-111, jan./abr. 2015.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

DOERR, H. M.; ENGLISH. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education,** Reston, v. 34, n. 2, 2003, p. 110-136.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, 2003, p. 3-18.

ENGLISH, L. Modeling with complex data in the primary school. In: LESH, R. et al. (Eds.). **Modeling students' mathematical modeling competencies.** New York, London: Springer, 2010. p. 287-300.

ENGLISH, L.; WATTERS, J. Mathematical modelling with young children. In: HØINES, M. J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.). **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2. Bergen: IGPME, 2004. p. 335-342.

FERREIRA, A. B. H. **Mini Aurélio**: o dicionário da língua portuguesa. 8. ed. Curitiba: Positivo, 2010.

GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GOMES, J. C. S. P. **Professoras dos anos iniciais em práticas de Modelagem Matemática**. 2018. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

GOMES, J. C. S. P.; SILVA, K. A. P. Prática de Modelagem Matemática nos anos iniciais: um olhar para o processo de formação. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 11, n. 2, 2021, p. 1-23.

JOCOSKI, J. **Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: possibilidades para o ensino de Matemática.** 2020. 100 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas séries iniciais: o gérmen da criticidade. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Santa Catarina, n. 2, p. 135-157, 2009.

NUNOMURA, A. R. T. **Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para os registros de representação semiótica**. 2021. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

SANTOS, T. F. **Um modo de ver e significar a modelagem matemática nos anos iniciais à luz da semiótica**. 2022. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – [Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão-PR, 2022.

SILVA, C.; KATO, L. A. Quais elementos caracterizam uma atividade de modelagem matemática na perspectiva sociocrítica? **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 817-838, 2012.

TEODORO, F. P. **A recontextualização da Modelagem Matemática na prática pedagógica nos anos iniciais**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, 2018.

TEODORO, F. P.; KATO, L. A. A prática pedagógica com Modelagem Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Em Teia**, v. 12, n. 3, p. 01-25, 2021.

TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. da. Sobre modelos matemáticos nos anos iniciais: das pesquisas às práticas. **Em Teia**, Pernambuco, v. 12, n. 3, 2021, p. 1-26.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Reflexões a respeito do uso da Modelagem Matemática em aulas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 237, p. 619-642, maio/ago. 2013.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Londrina, 2016a. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

3. CAPÍTULO III – ESPECIFICIDADES DOS MODELOS MATEMÁTICOS PRODUZIDOS POR CRIANÇAS DOS ANOS INICIAIS

Resumo

A discussão ora apresentada tem por interesse a seguinte questão de investigação: Que características carregam os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática? Para refletir acerca dessa questão nos respaldamos, teoricamente, nas classificações de modelos matemáticos, tais como: descritivos, aritméticos, gráficos, tabulares, textuais e algébricos e buscamos evidenciar o que subsidiam os modelos matemáticos produzidos pelas crianças no seu fazer modelagem matemática. Para tanto, analisamos os dados produzidos no contexto de uma turma de 4º ano de uma escola pública municipal, cujas crianças tinham idades entre 9 e 10 anos. O estudo tem caráter qualitativo e, nesse sentido, são consideradas em nossas interpretações capturas de imagens das produções das crianças, transcrições das gravações das aulas e das discussões nos pequenos grupos, anotações da professora|pesquisadora realizadas em um diário de campo. Como resultados inferimos que nos modelos matemáticos desenvolvidos pelas crianças há predominância da escrita pictórica e textual, refletindo certa familiaridade delas em desenhar para comunicar seus pensamentos. A escrita textual também é recorrente. Sua presença é marcada pelo interesse das crianças em explicar o que pensaram, contudo, essa escrita normalmente aparece a partir de estímulos provocados pela professora|pesquisadora. A escrita aritmética, por sua vez, também se faz presente, mas sua presença parece se respaldar no interesse da professora|pesquisadora em tornar os conceitos matemáticos presentes. De modo geral, os modelos matemáticos das crianças refletem o uso de operações numéricas básicas, representações visuais e linguagem natural, recursos familiares às crianças nessa faixa etária.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Anos Iniciais; Modelos matemáticos.

Abstract/Resumen

The discussion presented here addresses the following research question: What characteristics are conveyed by mathematical models produced by children in the Early Years during mathematical modeling activities? To reflect on this question, we draw theoretically on classifications of mathematical models, such as descriptive, arithmetic, graphical, tabular, textual, and algebraic, and seek to highlight what underpins the mathematical models produced by children in their mathematical modeling. To this end, we analyzed data produced in the context of a 4th-grade class at a municipal public school, whose children were aged 9 and 10. The study is qualitative in nature, and, as such, our interpretations include screenshots of the children's productions, transcriptions of recordings of classes and small group discussions, and notes from the teacher/researcher's field diary. As a result, we infer that the mathematical models developed by the children predominantly feature pictorial and textual writing, reflecting their familiarity with drawing to communicate their thoughts. Textual writing is also recurrent. Its presence is marked by children's interest in explaining their thoughts; however, this writing typically emerges from stimuli induced by the teacher/researcher. Arithmetic writing, in turn, is also present, but its presence seems to be supported by the teacher/researcher's interest in making mathematical concepts present. In general, children's mathematical models reflect the use of basic numerical operations, visual representations, and natural language—resources familiar to children in this age group.

Keywords: Mathematical modeling; Early Years; Mathematical models.

3.1 Introdução

A Modelagem Matemática[6] tem sido amplamente discutida e, nas últimas duas décadas, pesquisadores, tanto no cenário internacional, como nacionalmente, têm engendrado discussões sobre ela nos diferentes níveis de escolaridade. No entanto, embora as pesquisas sobre Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental venham ganhando espaço, alguns autores destacam a importância de ampliar os estudos nesse nível de ensino (Scheller; Bonotto; Viali, 2016; Souza; Rosa, 2016; Tortola; Almeida, 2018; Teodoro; Kato, 2018; Villa-Ochoa; Soares; Alencar, 2019; Kowalek, 2021; Guerreiro; Malheiros, 2024;)

Diante disso, torna-se necessário compreender como a Modelagem Matemática se configura nos Anos Iniciais, considerando seus objetivos, desafios e contribuições. Em especial, interessa-nos investigar que características carregam os modelos matemáticos desenvolvidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática? Para subsidiar nossas reflexões, focalizamos os modelos matemáticos produzidos por crianças de um 4º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 9 e 10 anos, ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, sob a orientação da professora regente da turma, que é também uma das autoras deste artigo. O processo analítico que subsidia nossas observações e inferências segue pressupostos da abordagem qualitativa de pesquisa e nos pautamos nos referenciais teóricos da Modelagem Matemática e na classificação de modelos matemáticos proposta por Tortola (2016), que compreende os modelos descritivos, aritméticos, gráficos, tabulares, textuais e algébricos.

Para o desenvolvimento desse estudo assumimos que a atividade de modelagem consiste na busca, por meio da matemática, de uma solução para um problema não matemático (Almeida; Silva; Vertuan, 2012). Nesse processo, a produção de modelos matemáticos desempenha papel central, já que possibilita que as crianças desenvolvam "uma diversidade de estruturas matemáticas que podem contribuir para a observação das regularidades e generalização da situação, assim como podem constituir o ponto de partida para a discussão de relações entre diferentes situações" (Tortola, 2016, p. 263).

Compreender como as crianças constroem esses modelos pode contribuir para o fortalecimento de práticas pedagógicas que valorizam a investigação, o raciocínio e a elaboração de soluções matemáticas contextualizadas. A relevância da produção de modelos matemáticos está ancorada em diferentes abordagens teóricas, discutidas na literatura, como a de Tortola (2016), que ao discutir a construção e análise de modelos nos Anos Iniciais, destaca

[6] Neste artigo, opta-se por grafar *Modelagem Matemática* com iniciais maiúsculas quando se trata do campo de pesquisa na área da Educação Matemática e *modelagem matemática* em letras minúsculas quando se refere às atividades realizadas em sala de aula.

o uso de múltiplas representações e a mobilização de estratégias que emergem das interações entre as crianças para lidar com problemas reais. Nesse processo, as crianças são levadas a refletir sobre suas próprias formas de pensar e, sobretudo, sobre o pensar matematicamente.

O modelo matemático nos Anos Iniciais pode ser compreendido como "uma linguagem natural, numérica, tabular, gráfica ou figural, as quais podem servir como ponte para uso de outras linguagens" (Tortola, 2012, p. 152). Nessa perspectiva, os modelos matemáticos produzidos nesse nível de escolaridade podem assumir diferentes formas, como representações aritméticas e pictóricas, tabelas, esquemas e textos elaborados pelas próprias crianças para interpretar e sistematizar informações.

Neste artigo, para discutirmos acerca das características dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais, apresentamos, inicialmente, considerações relacionadas ao fazer modelagem matemática nos Anos Iniciais. Em seguida, abordamos sobre os modelos matemáticos em atividades de modelagem nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Após, descrevemos os aspectos metodológicos da pesquisa e, em seguida, tecemos reflexões sobre os modelos produzidos pelas crianças. Por fim, esboçamos nossas considerações e reflexões.

3.2 Considerações sobre o fazer modelagem matemática nos Anos Iniciais

Nesta investigação compreendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica capaz de articular a Matemática escolar a conteúdos extramatemáticos a partir de situações do cotidiano que despertam o interesse das crianças (Tortola, 2012, 2016; Pelaquim; Silva, 2024; Silva; Veronez, 2024; Veronez; Santos, 2023). Nos Anos Iniciais, o fazer modelagem matemática nas aulas está intrinsecamente ligado ao modo como as crianças lidam e discutem sobre fenômenos reais e ao modo como tais fenômenos se fazem presentes nas práticas do professor, considerando as especificidades dessa etapa da escolarização.

No contexto das práticas escolares, a modelagem matemática se apresenta como um fazer que coloca as crianças diante de situações que exigem interpretações e construções matemáticas próprias. Para Fox (2006, p. 225), trata-se de "atividades reveladoras do pensamento que exigem que as próprias crianças desenvolvam interpretações matemáticas das situações". De modo semelhante, Tortola e Almeida (2016, p. 85) afirmam que esse tipo de prática, "coloca o aluno frente a situações autênticas que ele presencia, ou pode vir a presenciar em sua vida, e o leva a interpretá-las com o auxílio da matemática" (Tortola; Almeida, 2016, p. 85).

Assim, o fazer modelagem nos Anos Iniciais exige atenção às particularidades do desenvolvimento infantil, como os modos de linguagem das crianças, o uso de materiais manipuláveis e o espaço para a oralidade. Isso implica, como destacam Souza e Luna (2014, p. 62), que "as atividades de modelagem propostas pelos professores dos Anos Iniciais se moldam às práticas de ensino específicas dos professores deste nível". Nessa direção, o professor tem a responsabilidade de criar condições didáticas que favoreçam a investigação, a formulação de hipóteses, a elaboração de estratégias e a validação de respostas, com apoio do trabalho coletivo.

Nesse nível de ensino, o docente responsável pela Matemática geralmente também ministra outras disciplinas. Assim, o professor polivalente, ao atuar como mediador e desafiar as crianças a buscar respostas, pode incentivá-los a considerar diferentes aspectos dos problemas e a mobilizar conhecimentos diversos, de diferentes áreas do conhecimento. Essa característica lhe permite integrar conteúdos de várias áreas do conhecimento, de modo a enriquecer o trabalho com problemas contextualizados (Ramos; Franchi, 2024).

Como no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática podem ser contemplados diversos procedimentos, como: coleta de dados, definição de variáveis, formulação de hipóteses, simplificações, obtenção do modelo, validação, comunicação e interpretação de resultados, articulá-los ao conhecimento sobre a problemática e à familiarização com o tema, é, de certa forma, promover a compreensão e resolução de um problema real por meio de recursos matemáticos (Ferreira; Sousa 2021).

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2016), esses procedimentos se manifestam no que os autores caracterizam por fases da modelagem matemática, a saber: inteiração, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação. Na inteiração há o primeiro contato com a situação-problema, a partir do levantamento de informações e dados que conduzem à formulação do problema. Na matematização envolve a transição da linguagem natural para a linguagem matemática, utilizando-se de hipóteses, variáveis e simplificações. Na resolução busca-se responder ao problema por meio da criação ou uso de um modelo matemático. Por fim, na interpretação de resultados e validação, avalia-se a viabilidade dos resultados, tanto sob a perspectiva matemática quanto em relação à situação-problema inicial.

Em relação à implementação de atividades de modelagem matemática nas salas de aula dos Anos Iniciais, entendemos que a inserção gradativa, apontada por Almeida e Dias (2004) se faz relevante. Isso, especialmente, considerando que as crianças precisam se familiarizar com propostas investigativas e, por outro lado, os professores também necessitam de segurança e incentivo para desenvolver práticas com essa característica (Teodoro; Kato, 2021). Conforme

já observado por Tortola (2016), a ação do professor é algo importante nas práticas de modelagem matemática nos Anos Iniciais. Nelas, há necessidade da orientação docente e um cuidado no sentido de colaborar com as crianças, sem ditar caminhos ou respostas.

Embora os momentos de familiarização com a modelagem matemática propostos por Almeida e Dias (2004) não tenham sido originalmente pensados para os Anos Iniciais, eles oferecem subsídios importantes para refletir sobre como as crianças podem se familiarizar com esse tipo de atividade. Essas autoras enunciam tal familiarização considerando três momentos.

> Em um primeiro momento, são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor; Posteriormente, uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado; Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor (Almeida; Dias, 2004, p.25).

Transpondo essa familiarização para os Anos Iniciais, entendemos que cada um desses momentos representa um avanço no grau de autonomia das crianças, tanto na formulação de hipóteses quanto na construção e validação dos modelos. A iniciação com modelagem matemática em um sentido mais tímido, favorece com que as crianças desenvolvam uma compreensão inicial dos procedimentos envolvidos. Progressivamente, eles podem ser incentivados a realizar suas próprias investigações, com apoio dos colegas e mediação docente, relacionando conhecimentos acerca da situação com conhecimentos matemáticos.

Tortola (2016) enfatiza que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental envolve um modo de agir característico, com ações e encaminhamentos específicos, que compõem seu procedimento. Ao longo dessas atividades, tornam-se evidentes os entendimentos das crianças sobre a modelagem matemática, bem como particularidades próprias desse nível de ensino. O autor ainda reitera que as especificidades estão relacionadas à idade das crianças, à organização escolar, à abordagem dos conteúdos matemáticos e às estratégias de ensino, o que confere singularidade à prática da modelagem em cada contexto.

Corroborando com essa visão Silva e Klüber (2014), destacam cinco aspectos favoráveis a inserção da modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, considerando

a matriz curricular e o papel polivalente do professor: “1) o aluno como sujeito da aprendizagem, 2) o professor como mediador do processo, 3) o ensino problematizador, 4) o ensino dialógico e investigativo e, ainda, 5) o ensino interdisciplinar” (p.14). Esses aspectos, podem justificar a viabilidade da modelagem nessa etapa de ensino e contribuir para compreender as formas particulares de construção de modelos matemáticos pelas crianças, marcadas por recursos visuais, linguagem natural e estratégias que emergem do diálogo e da investigação em grupo.

Diante do exposto, entende-se que o desenvolvimento de atividades de modelagem nos Anos Iniciais envolve práticas que articulam interações entre as crianças, mediações do professor, formulação de hipóteses e exploração de situações contextualizadas. Tais práticas podem favorecer o surgimento de modelos matemáticos com características específicas, que podem refletir os modos de pensar das crianças e as diferentes respostas dadas às situações investigadas.

3.3 Modelos matemáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: compreensões e configurações possíveis

No contexto das atividades de modelagem matemática, o modelo matemático é entendido como um recurso para a interpretação das situações-problema e para o desenvolvimento de reflexões que conduzam a respostas adequadas. Schrenk (2020) destaca que o modelo auxilia tanto na compreensão da matemática presente quanto no seu desenvolvimento durante o processo investigativo.

Na perspectiva de Almeida, Tortola e Merli (2012), a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio da construção de modelos, sendo o modelo matemático “o que ‘dá forma’ à solução do problema”. Doerr e English (2003) também enfatizam que a representação matemática de uma situação-problema possibilita a formulação de respostas, e que tal representação caracteriza-se como um modelo matemático dessa situação.

De modo geral, o termo modelo matemático é compreendido, na Modelagem Matemática, como um sistema conceitual expresso por uma estrutura ou linguagem matemática (Lesh, Carmona; Hjalmarson, 2006) e pode ser usado para descrever, explicar ou predizer o comportamento de fenômenos (Doerr; English, 2003). Assim, ele é produzido ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e servem como para descrever e analisar fenômenos reais a partir de lentes da matemática.

Nos Anos Iniciais, os modelos matemáticos ganham configurações distintas já que, como nos lembram, Tortola e Almeida (2018), o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental apresentam particulares "especialmente no que se refere à simbologia matemática e à produção de modelos matemáticos e seu uso na apresentação de respostas para o problema em estudo em cada situação investigada" (p.146).

Em uma experiência realizada com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, Triguero e Kato (2022) investigam como os alunos elaboram estratégias para resolver uma situação do cotidiano, envolvendo os custos mensais com animais de estimação. Essa atividade de modelagem matemática, organizada segundo as etapas propostas por Biembengut (2019), permitiu que os alunos construíssem modelos matemáticos com base em dados pesquisados, informações familiares e no uso de operações aritméticas, porcentagem, medidas de valor, massa e tempo. As estratégias desenvolvidas foram compreendidas como modelos matemáticos construídos coletivamente, com função explicativa e descritiva, pois representavam a situação e viabilizaram uma resolução. A análise dessas produções, realizada por meio de mapas conceituais, evidencia que os modelos emergiram da articulação entre significados denotativos, oriundos do ensino regular e significados conotativos, elaborados a partir da vivência dos alunos.

No fazer modelagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a configuração de modelo matemático ganha, portanto, algumas especificidades. Como nos coloca Doerr e English (2003), eles podem ser representados por meio de esquemas, gráficos, desenhos, materiais manipuláveis, colagens e língua natural, os quais constituem sistemas de elementos, operações, relações e regras e servem para descrever, explicar e/ou prever aspectos da situação-problema. Nessa direção, English (2016, p. 187) esclarece que existe uma multiplicidade de modelos matemáticos, de modo que,

> [...] os alunos podem representar seus dados criando listas ou tabelas ordenadas, usando código de cores ou produzindo uma variedade de gráficos. Como resultado, modelos de vários graus de sofisticação são gerados. Independentemente de seus níveis de desempenho matemático, todos os alunos podem produzir um modelo que represente sua própria solução para um determinado problema.

Assumindo essa multiplicidade de formas para os modelos matemáticos, Tortola (2016) apresenta uma classificação para os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais, a saber: aritméticos, gráficos, tabulares, textuais, descritivos e algébricos. Os modelos aritméticos, para Tortola (2016, p. 244), "consistem em uma estrutura utilizada para expressar a relação entre as variáveis do problema e têm como fundamento números e operações

aritméticas elementares". Em uma atividade sobre o crescimento das unhas, desenvolvida com crianças do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, Tortola e Almeida (2016) identificaram dois tipos de modelos aritméticos: aditivos e multiplicativos. Os modelos aditivos consistem em uma sucessão de somas, nas quais o valor mensal de crescimento da unha era repetidamente adicionado para representar o crescimento ao longo do tempo. Por exemplo, considerando que a unha cresce 3 mm por mês, um aluno representou o crescimento em três meses por meio da soma 3 + 3 + 3, totalizando 9 mm. Já os modelos multiplicativos foram construídos a partir da ideia de parcelas iguais, em que as crianças realizaram a multiplicação do valor mensal de crescimento pelo número de meses. Assim, para o mesmo período, outro aluno representou o crescimento como $3 \times 3 = 9$ mm.

No que se refere aos modelos gráficos, Tortola (2016, p. 244) os define como uma "estrutura utilizada para organizar e apresentar dados e informações de maneira objetiva por meio de recursos visuais, que podem ser expressos na forma de figuras geométricas, diagramas, desenhos ou imagens". Em Tortola e Almeida (2016), considerando também a atividade sobre o crescimento das unhas, foram identificados dois subtipos dessa categoria de modelos gráficos: modelos geométricos e modelos pictóricos.

Os modelos geométricos foram utilizados para comparar visualmente valores, por meio de figuras como retângulos ou colunas, organizadas horizontal ou verticalmente, lado a lado ou empilhadas. Já os modelos pictóricos consistem em representações visuais relacionadas, mais diretamente, ao tema da atividade, utilizando imagens, desenhos ou figuras para comunicar os dados e informações da situação-problema. No caso da atividade em questão, os modelos geométricos aparecem na forma de colunas de diferentes alturas e correspondem aos milímetros de unha crescidos a cada mês. Já os modelos pictóricos ilustram os desenhos de dedos com unhas progressivamente maiores, possibilitando uma associação visual do crescimento da unha com o passar do tempo.

Os modelos tabulares, por sua vez, "trata-se de uma estrutura na qual as informações são organizadas na forma de tabelas" (Tortola, 2016, p. 245). Na atividade sobre o crescimento das unhas, analisada por Tortola e Almeida (2016), os modelos tabulares foram empregados por estudantes para registrar, de maneira ordenada, o número de milímetros de unha crescidos em cada mês.

Os modelos textuais, outra categoria apontada por Tortola (2016), correspondem àqueles em que as relações matemáticas entre as variáveis são descritas por meio da linguagem escrita, utilizando a língua materna. Na atividade sobre o crescimento das unhas, analisada por Tortola e Almeida (2016), esse tipo de modelo foi identificado quando as crianças expressaram,

com palavras, que as unhas cresciam a uma mesma quantidade por mês ou descreveram o que aconteceria caso não fossem cortadas.

Os modelos descritivos são quando a "estrutura descreve uma relação entre as variáveis do problema usando língua materna associada a números e operações" (Tortola, 2016, p. 245). Na atividade do crescimento das unhas, esse modelo foi identificado quando as crianças registraram, por exemplo: quanto cresceu = 3 × número de meses que passou, estabelecendo uma regra geral para o crescimento das unhas ao longo do tempo.

Por fim, os modelos algébricos, definidos por Tortola (2016, p. 246), são "modelos cujas variáveis são expressas por meio de letras e são constituídos pela reunião de letras, números e operações". Na atividade sobre gastos com animais de estimação, desenvolvida com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, o autor observou que as crianças elaboraram expressões algébricas para representar diferentes tipos de despesas, como exemplo: G = SH + SA + R + B, em que SH representa o gasto com shampoo, SA com sabonete, R com ração e B com brinquedos. Por meio dessa expressão, as crianças indicam a soma de todos os produtos necessários para calcular o gasto total com os animais em um determinado período.

Diante das diferentes possibilidades de representação dos pensamentos das crianças e das classificações de modelos matemáticos apresentadas, direcionamos o nosso olhar para os modelos matemáticos produzidos por crianças de um 4º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com vista a investigar acerca das características dos modelos por ela produzidos. Com essa intenção, esclarecemos, na seção a seguir, nossas opções metodológicas.

3.4 Opções metodológicas

A nossa pesquisa é conduzida a partir de uma abordagem qualitativa e interpretativa. Conforme Alves-Mazzotti (1998), a pesquisa qualitativa se caracteriza pela tradição "compreensiva" ou "interpretativa", em que o foco dessa abordagem é entender como as pessoas pensam e agem dentro de contextos específicos. Goldenberg (2003, p. 53) complementa essa visão ao afirmar que a pesquisa qualitativa "consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos". Além disso, Bogdan e Biklen (1994) ressaltam que, na investigação qualitativa, a fonte primária de dados é o ambiente natural, onde o pesquisador atua como o principal instrumento de coleta, enfatizando a importância do contato direto com os participantes.

Com vistas ao interesse de refletir acerca da seguinte questão de investigação: que características carregam os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais em

atividades de modelagem matemática? tendo o caráter qualitativo de pesquisa como base para nossas argumentações e interpretações, elegemos uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública do interior do Paraná, composta por 33 crianças, com idades entre 9 e 10 anos, como nosso cenário investigativo. Nessa turma, realizamos a nossa produção de dados, ao longo do ano letivo de 2024, em um ambiente de aprendizagem colaborativo, no qual as crianças puderam interagir e construir conhecimentos de forma coletiva. Cabe destacar que tanto as crianças quanto a professora, que também atuou como pesquisadora, não possuíam experiência prévia com modelagem matemática, sendo esse contato construído gradativamente durante o desenvolvimento dessa investigação.

As temáticas das atividades de modelagem matemática ora analisadas, propostas pelas próprias crianças são as seguintes: *Quantidade de água*, *Personalização de avatares em jogo eletrônico*, *Livros na biblioteca* e *Queimadas-desmatamento*. Para o desenvolvimento dessas atividades as crianças foram organizadas em seis grupos, de 5 a 6 integrantes cada, sendo que cada grupo investigou um dos temas, conforme seus interesses.

Para a coleta de dados utilizamos diferentes instrumentos: celulares, para capturar imagens dos registros das crianças; gravadores de voz, para registrar as interações e discussões no âmbito dos grupos; diário de campo, no qual a professora-pesquisadora registrou observações que considerava relevantes. Além dos materiais de análise, constituídos a partir desses instrumentos, também tomamos como material de análise as produções escritas das crianças, recolhidas ao final do desenvolvimento de cada atividade.

No processo analítico, adotamos uma abordagem interpretativa, com foco na compreensão das ações, decisões e justificativas das crianças durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Inicialmente, realizamos uma leitura atenta de todo o material produzido, transcrições das falas, registros escritos e imagens, com o objetivo de nos familiarizarmos com os dados e identificar episódios relacionados à construção dos modelos matemáticos. A partir dessa imersão, selecionamos recortes dos diálogos e registros dos grupos que se mostraram representativos das formas pelas quais as crianças mobilizaram seus conhecimentos, utilizaram recursos variados (como tabelas, desenhos e esquemas), e elaboraram estratégias de quantificação e argumentação.

Para garantir o anonimato dos participantes, utilizamos a sigla (A1, A2, A3, A4…) Para nos referirmos às crianças, e a abreviação “Prof.” para indicar a professora-pesquisadora. A proposta de Campos e Araújo (2015) utiliza a barra vertical como metáfora visual da relação dialética entre os papéis de professor e pesquisador, indicando que, embora distintos e por vezes incompatíveis, esses papéis se influenciam e se constituem mutuamente. As interpretações

apresentadas ao longo da análise foram construídas com base na articulação entre os dados empíricos e os referenciais teóricos que sustentam a modelagem matemática nos Anos Iniciais.

Na seção a seguir realizamos nossas análises e fazemos nossas inferências tentando elucidar as características carregadas nos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais ao desenvolverem atividades de modelagem matemática.

3.5 Modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais

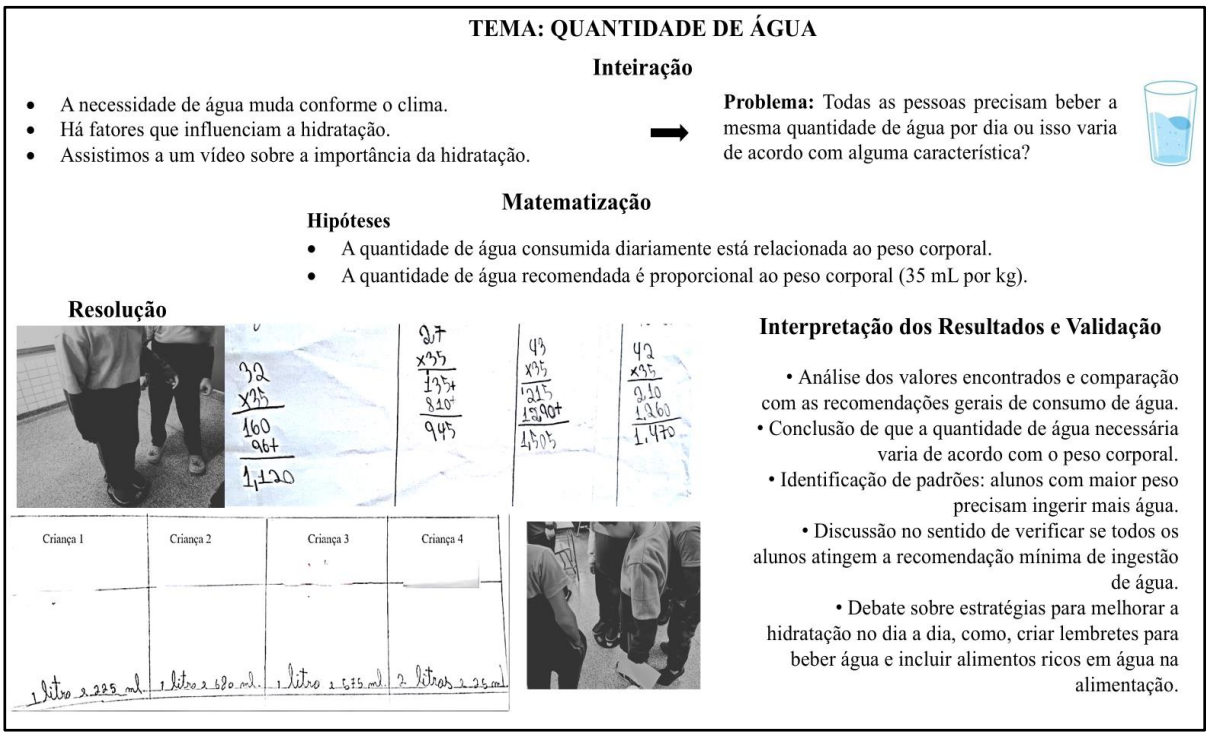
na atividade de modelagem matemática intitulada "Quantidade de água"

A temática "Quantidade de Água" foi motivada a partir de uma discussão inicial com as crianças sobre a necessidade de beber água no inverno. O debate gerou reflexão sobre se todas as pessoas precisam beber a mesma quantidade de água por dia ou se isso varia de acordo com características individuais, como o peso corporal. Para a discussão, foi exibido um vídeo[7] informativo sobre a importância da ingestão de água. Durante a exibição, a professora leu com as crianças as informações escritas que acompanhavam a reportagem, nas quais era apresentada a recomendação de ingestão diária de 35 ml de água por quilo de peso corporal. Essa informação serviu de base tanto para a formulação do problema quanto para os cálculos realizados pelos grupos durante a atividade de modelagem matemática.

A partir dessa discussão, desenvolveu-se uma atividade de modelagem matemática, realizada ao longo de 3 horas aula, com as crianças organizadas em seis grupos: um grupo com 5 crianças e cinco grupos com 4 crianças cada. Na semana na qual as crianças estavam envolvidas com o desenvolvimento dessa atividade o clima estava chuvoso e, com isso, houveram ausências de várias crianças na escola. Com isso, não temos os registros e falas de todas as crianças porque nem todos os grupos estavam completos. Na Figura 3.1 apresentamos uma síntese do desenvolvimento dessa atividade.

[7] VARELLA, D. **Quantos litros de água você precisa beber todos os dias?** 2019. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/videos/quantos-litros-de-agua-voce-precisa-beber-todos-os-dias/. Acesso em: 20 out. 2024.

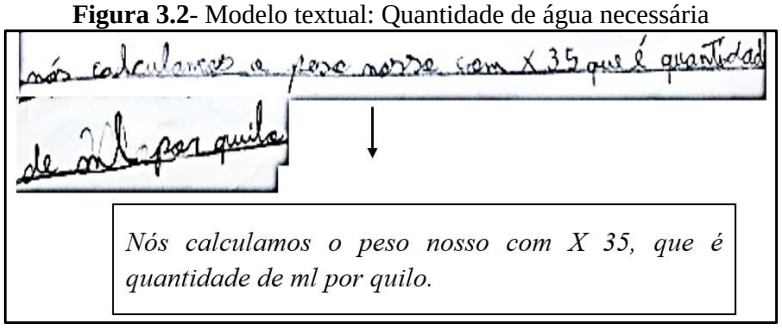
Figura 3.1- Síntese da atividade: Quantidade de água



Fonte: As autoras

Para responder ao problema: *Todas as pessoas precisam beber a mesma quantidade de água por dia ou isso varia de acordo com alguma característica?* as crianças realizaram cálculos com base na informação fornecida pelo vídeo, chegando à expressão: *peso* × *35*. Essa regularidade foi registrada por uma das crianças na Figura 3.2, por meio da seguinte frase: "*nós calculamos o peso nosso com X 35, que é quantidade de ml por quilo.*"

Figura 3.2- Modelo textual: Quantidade de água necessária



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

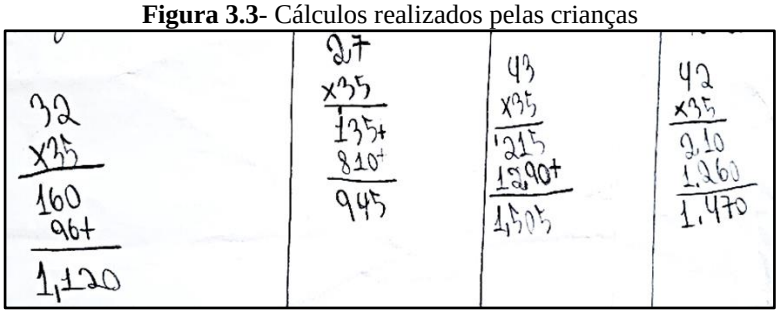
Esse enunciado, embora informal e marcado por traços da linguagem oral, evidencia uma tentativa de verbalizar a relação entre o peso corporal e a quantidade recomendada de água. Trata-se de um modelo textual, segundo a perspectiva de Tortola (2016), pois expressa, em linguagem natural, a regularidade matemática percebida na situação. Esse tipo de modelo pode servir como ponto de partida para a elaboração de representações numéricas ou gráficas mais

elaboradas, pois marca o momento em que a criança atribui sentido à situação por meio da linguagem, conectando informações quantitativas ao contexto do problema.

No registro da Figura 3.2, o uso da letra "X" para indicar a operação de multiplicação, substituindo a palavra "vezes" ou o símbolo matemático “X”, revela tanto a familiaridade das crianças com os códigos escolares quanto uma apropriação ainda em construção da linguagem matemática formal. Tal característica pode ser importante para compreender o processo de produção dos modelos matemáticos nos Anos Iniciais, uma vez que indica a passagem do discurso cotidiano para uma estrutura mais próxima da linguagem simbólica da Matemática. Podemos inferir que esse modelo textual elaborado pelas crianças revela como elas começam a compreender e expressar a ideia matemática utilizando diferentes formas de linguagem. Primeiro com palavras do dia a dia e, depois, se aproximando da linguagem matemática com o uso de números, símbolos e cálculos. Essa passagem mostra como elas constroem sentido sobre a situação, mesmo sem usar uma linguagem matemática formal desde o início.

Esse modelo textual verbalizado na Figura 3.2 impulsionou a produção de novos registros, como o apresentado na Figura 3.3, nos quais é possível observar o início de uma transição para modelos numéricos e gráficos, a partir da expressão generalizada (modelo textual) que relaciona peso e quantidade de água.

Figura 3.3- Cálculos realizados pelas crianças

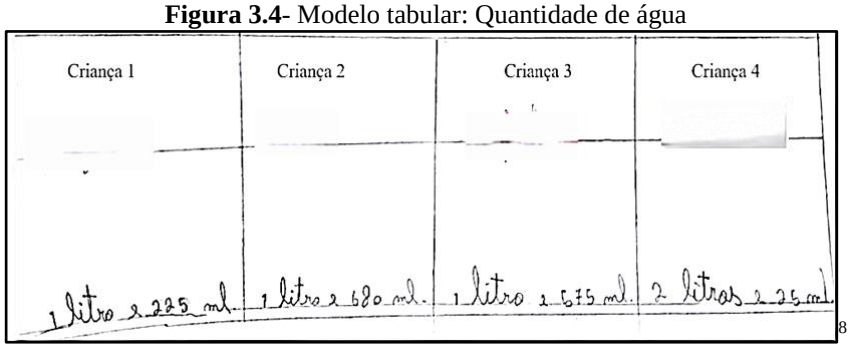


Fonte: Registro das crianças

Nesses cálculos as crianças realizam a operação de multiplicação, utilizando os próprios pesos corporais como referência, conforme a regularidade identificada no modelo textual. Cada criança realizou de forma individual, multiplicando seu peso por 35 ml, chegando ao valor correspondente de ingestão diária de água. Os cálculos presentes na Figura 3.3, além de indicar domínio da operação envolvida, revelam uma aplicação do modelo textual construído em linguagem natural. Esse movimento evidencia como a compreensão inicial da situação-problema, expressa verbalmente, orientou a mobilização de procedimentos matemáticos, com vistas a dar respostas pontuais.

De posse dos valores que correspondiam à quantidade diária de água que cada criança deveria beber, houve o interesse por organizar esses valores na forma de tabela, como evidencia a Figura 3.4.

Figura 3.4- Modelo tabular: Quantidade de água



Fonte: Registro das crianças

Essa representação elaborada pelas crianças para sintetizar suas resoluções corresponde a um modelo tabular. Nela, as crianças indicam, nas colunas, o nome de uma criança e, logo abaixo, a quantidade de água que cada uma deve ingerir, considerando os valores calculados ("1 litro e 225 ml", "1 litro e 160 ml" etc.). Essa estrutura, portanto, organiza os valores de ingestão de água de modo a tornar visíveis as semelhanças e diferenças entre tais resultados.

É importante destacar que não há preocupação das crianças em organizar os resultados calculados em ordem crescente ou decrescente, pois no modelo tabular produzido essas ordens não são respeitadas. Essa ausência de ordenação sugere que, embora as crianças saibam estruturar uma tabela, o seu uso, como ferramenta para comparação e análise, ainda está em processo de construção. Esse aspecto revela uma etapa inicial de familiarização com a função organizadora e analítica que uma tabela pode desempenhar.

Além disso, a forma como os dados foram registrados, com expressões como: "1 litro e 225 ml", indica um conhecimento em construção sobre a composição do sistema de medidas de capacidade, articulando unidades maiores (litros) e menores (mililitros). Essa escolha revela não apenas uma aproximação com a linguagem socialmente utilizada para expressar volumes, mas também uma tentativa de tornar os dados mais compreensíveis dentro do contexto da atividade. Ao adotar esse tipo de escrita, podemos inferir que as crianças buscaram dar clareza às quantidades apresentadas, aproximando a linguagem matemática de sua realidade cotidiana.

Conforme Tortola (2016), modelos tabulares são aqueles em que as informações são dispostas em quadros ou tabelas, facilitando a comparação entre valores e apoiando a

[8] Para preservar o anonimato dos participantes, os nomes reais foram omitidos e substituídos por "Criança 1", "Criança 2", etc.

interpretação dos resultados. No contexto desta atividade, o modelo tabular indica que as crianças puderam verificar quem precisa ingerir mais ou menos água, bem como identificar padrões relacionados ao peso corporal.

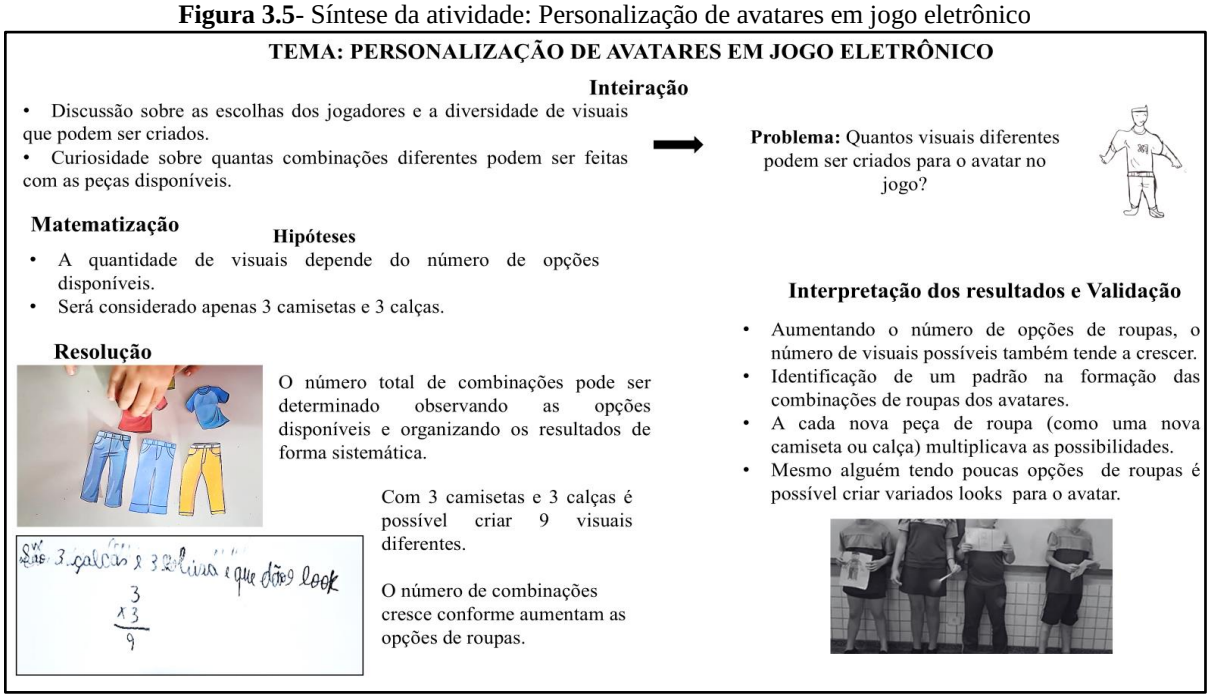
Em síntese, na atividade com o tema “Quantidade de Água” emerge, primeiramente, um modelo textual, no qual as crianças verbalizam, em linguagem natural, a relação entre o peso corporal e a quantidade de água recomendada por meio da expressão "peso × 35 ml". Esse modelo evidencia a competência das crianças em reconhecer e explicitar uma regularidade matemática, tendo uma situação contextualizada como base. Em seguida, os cálculos realizados podem ser compreendidos como a concretização desse modelo textual, uma vez que operacionalizam a regra formulada de maneira informal. Por fim, a organização dos dados em tabela dá origem a um modelo tabular, que sintetiza os resultados obtidos e permite a comparação entre as diferentes quantidades calculadas, que correspondem às quantidades de água que cada criança deve ingerir diariamente.

Essa progressão do verbal ao numérico e, posteriormente, ao tabular ilustra o percurso pelo qual as crianças transitam entre diferentes registros de representação, mobilizando recursos variados para dar sentido à situação-problema. Ao articular linguagem cotidiana, procedimentos matemáticos e formas organizadas de registro, as crianças constroem compreensões mais refinadas, ainda que parciais, sobre os conceitos envolvidos. No caso analisado, os modelos produzidos se caracterizam pela vinculação a contextos reais; pelo uso de linguagens híbridas que combinam expressões do cotidiano com elementos da linguagem matemática; pelo desenvolvimento gradual das representações, que vão das verbalizações espontâneas à organização de dados em estruturas mais sistemáticas; e por refletirem um processo ativo de construção de sentido, no qual a matemática se elabora em diálogo com a experiência vivida.

na atividade de modelagem matemática intitulada “Personalização de avatares em jogo eletrônico”

Esse tema, indicado pelas próprias crianças, inspirou o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, cujo problema teve a seguinte enunciação: Quantos visuais diferentes podem ser criados para o avatar no jogo? A atividade foi desenvolvida por um grupo composto por cinco crianças, ao longo de 3h aulas, e a síntese dela está apresentada na Figura 3.5.

Figura 3.5- Síntese da atividade: Personalização de avatares em jogo eletrônico

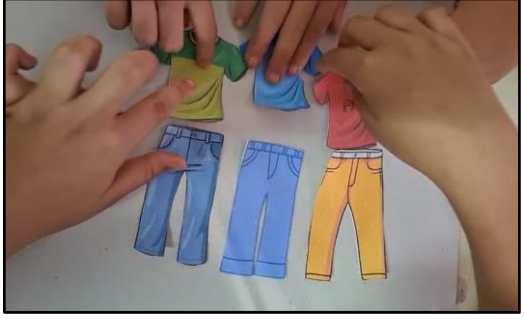


Fonte: As autoras

Para responder ao problema proposto: *Quantos visuais diferentes podem ser criados para o avatar no jogo?* As crianças mobilizam estratégias que envolvem a manipulação concreta das peças de roupa e a observação sistemática das possíveis combinações. Inicialmente, utilizam figuras de camisetas e calças para experimentar diferentes agrupamentos visuais, o que favorece a visualização das possibilidades de composição de roupas. Essa forma de organizar as ideias e de representar as combinações configura o uso de um modelo pictórico, que é constituído "por uma estrutura matemática que visa expor por meio de figuras ou imagens, de modo geral associadas ao tema, os dados e/ou informações associadas às situações-problema" (Tortola; Almeida, 2016, p. 8).

Nossa inferência é a de que o modelo pictórico auxilia na construção do raciocínio combinatório e contribui para a resolução do problema, uma vez que a visualização das opções de roupas por meio de figuras (Figura 3.6), permite que as crianças compreendam como cada uma das peças pode ser combinada.

Figura 3.6: Modelo pictórico: Personalização de avatares

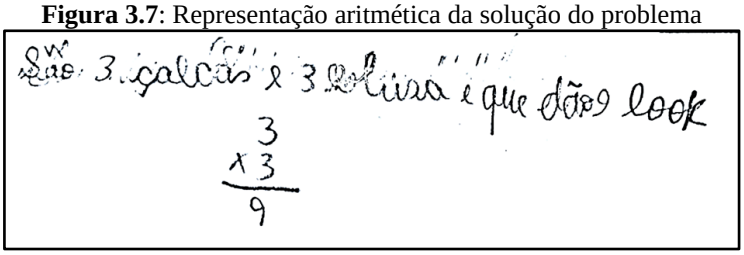


Fonte: Arquivo pessoal

A partir do uso desse modelo pictórico as crianças começam a verbalizar suas observações e a sistematizar as combinações possíveis. Esse movimento revela uma transição entre a manipulação concreta dos elementos e a generalização por meio de estratégias aritméticas. Um exemplo disso pode ser visto quando uma das crianças (A6) comenta: "*Dá uma com essa, outra com essa e outra com aquela*", referindo-se às três calças combinadas com uma única camiseta e, em seguida, conclui: "*então cada uma dessas dá três looks e tem três camisetas, então 3×3 é 9*". Essa fala evidencia a mobilização de raciocínio multiplicativo e a compreensão da estrutura combinatória da situação.

A fala da criança A6 também denota a construção de um raciocínio combinatório baseado na observação e experimentação com a manipulação das imagens. Ao mencionar a multiplicação, a criança desenvolve essa operação como forma de calcular o total de combinações possíveis, após ter identificado a relação entre as camisetas e as calças. Essa organização sistemática pode ser observada também na produção escrita, apresentada na Figura 3.7, na qual a criança recorre à operação de multiplicação para validar a quantidade total de combinações possíveis entre camisetas e calças.

Figura 3.7: Representação aritmética da solução do problema



Fonte: Registro das crianças

O movimento entre a manipulação concreta e a tentativa de generalização expressa o processo de transição entre formas de representação, do pictórico para a representação numérica. Nessa fase do desenvolvimento da atividade as crianças recorreram à linguagem numérica para responder ao problema, e essa escolha foi sustentada pela organização visual das possibilidades, o que evidencia que o raciocínio multiplicativo partiu do modelo pictórico para chegar a uma conclusão, com indícios de generalização.

Outras falas extraídas dos diálogos produzidos nas aulas também ilustram esse avanço no pensamento combinatório: *Se tivermos 4 calças e 4 camisetas, teremos 16 looks; Se forem 5 calças e 5 camisetas, o total de looks será 25.* Essas constatações das crianças indicam que elas compreendem uma regularidade existente entre o número de calças e o número de camisetas para completar os *looks*. Ou seja, elas compreendem que não precisam de representações pictóricas para determinar o total de combinações possíveis; compreendem que

devem realizar a operação de multiplicação entre o número de opções de camisetas e de calças para, rapidamente, saber quantos *looks* são possíveis. Esse uso da multiplicação revela um avanço no raciocínio combinatório, pois demonstra a compreensão da estrutura multiplicativa envolvida na situação e a capacidade de generalização da regra ($m \times n$), ainda que expressa pelas crianças apenas com números.

Embora essa generalização aponte para um movimento em direção à abstração algébrica, não se configura, segundo os critérios de Tortola (2016), um modelo algébrico propriamente dito, pois não houve o uso de letras ou variáveis para representar as quantidades envolvidas. Pode-se afirmar, entretanto, que houve uma aproximação a esse tipo de modelo à medida que as crianças passaram a utilizar a linguagem matemática da multiplicação como recurso para representar e resolver a situação de forma mais geral.

Em síntese, na atividade com o tema "Personalização de avatares em jogo eletrônico" emerge, inicialmente, um modelo pictórico, no qual as crianças organizam visualmente as combinações possíveis por meio de figuras que representam peças de roupa. Esse modelo favorece, entretanto, a visualização e a experimentação concreta das possibilidades, servindo como suporte para a construção do raciocínio combinatório. Posteriormente, as crianças passam a expressar suas conclusões por meio da linguagem numérica, articulando a multiplicação como forma de generalizar o total de combinações possíveis, configurando um modelo aritmético. Em alguns momentos, esse percurso indica uma aproximação ao modelo algébrico, ainda que sem o uso formal de símbolos, revelando um avanço na abstração matemática.

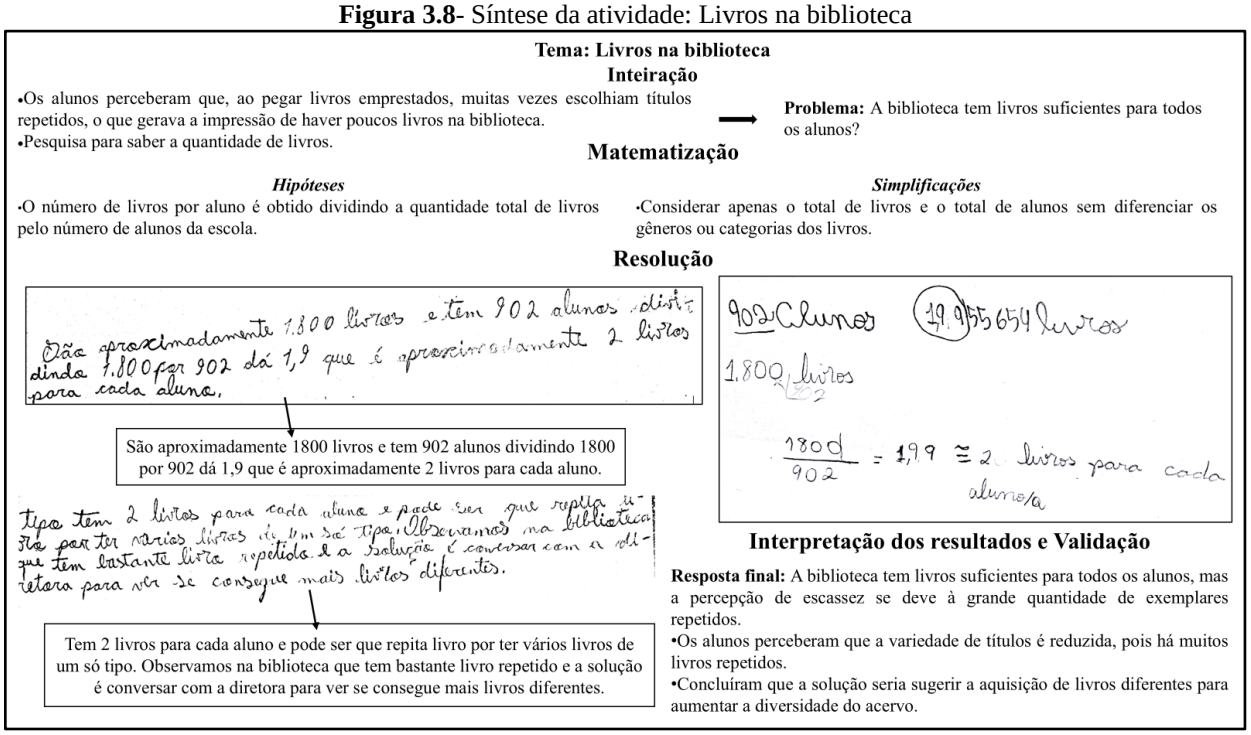
Essa progressão do pictórico ao numérico e, de forma incipiente, ao modelo algébrico, ilustra o caminho pelo qual as crianças transitam entre diferentes registros de representação, mobilizando recursos variados para dar sentido à situação-problema. Ao articular elementos visuais, linguagem cotidiana e operações matemáticas, elas constroem compreensões progressivamente mais elaboradas, embora ainda em processo de desenvolvimento.

Nessa atividade, os modelos produzidos se caracterizam pela vinculação a contextos reais para as crianças; pelo uso de linguagens híbridas que combinam elementos do cotidiano com a linguagem matemática; pelo desenvolvimento gradual das representações, desde a manipulação concreta e visual até a organização numérica sistemática; e pela expressão de um processo ativo de construção de sentido, no qual o conhecimento matemático se consolida em diálogo com a experiência vivida e a mediação docente.

na atividade de modelagem matemática intitulada "Livros na biblioteca"

A atividade com a temática *Livros na Biblioteca* surgiu a partir do interesse das crianças e da percepção de que quando escolhiam livros na biblioteca, muitas vezes acabavam por pegar títulos que já haviam lido anteriormente, o que gerava a impressão de que havia poucos livros disponíveis. Essa atividade foi realizada por um grupo de 5 crianças (A2, A15, A18, A19 e A28), ao longo de 5h aulas. A síntese da atividade está apresentada na Figura 3.8.

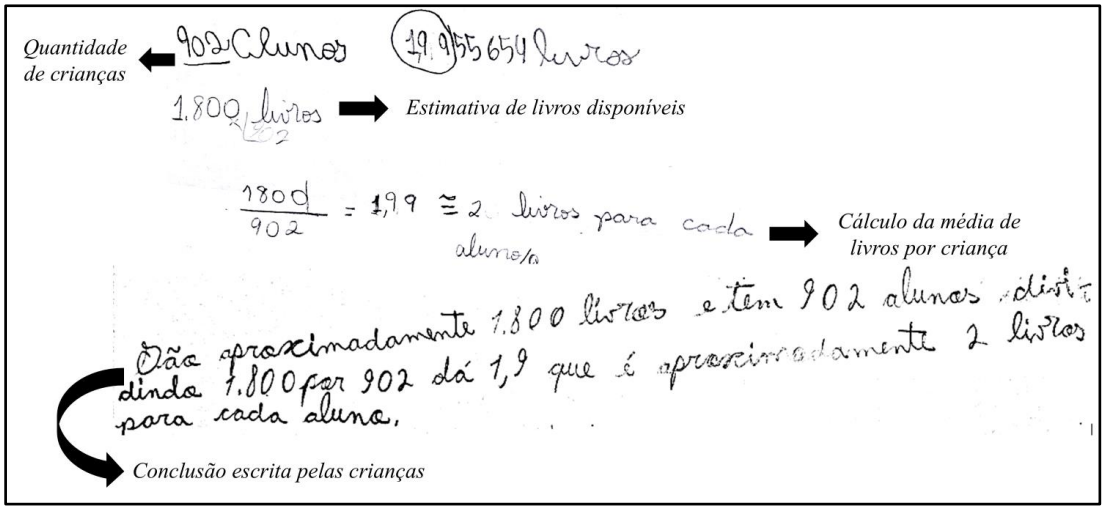
Figura 3.8- Síntese da atividade: Livros na biblioteca



Fonte: As autoras

Para buscar uma resposta à questão levantada: A biblioteca tem livros suficientes para todos os alunos? as crianças iniciam um levantamento de dados buscando saber, inicialmente, a quantidade de livros disponíveis na biblioteca (1800 livros) e o número total de crianças matriculadas na escola (902 alunos). A partir dessas informações, passam a desenvolver estratégias matemáticas, como estimativas e cálculos com base na divisão, com o intuito de descobrir a média de livros por criança. A Figura 3.9 ilustra esse percurso, revelando o uso de uma operação aritmética (divisão) como forma de modelar a situação-problema.

Figura 3.9- Modelo aritmético na atividade: Livros na biblioteca

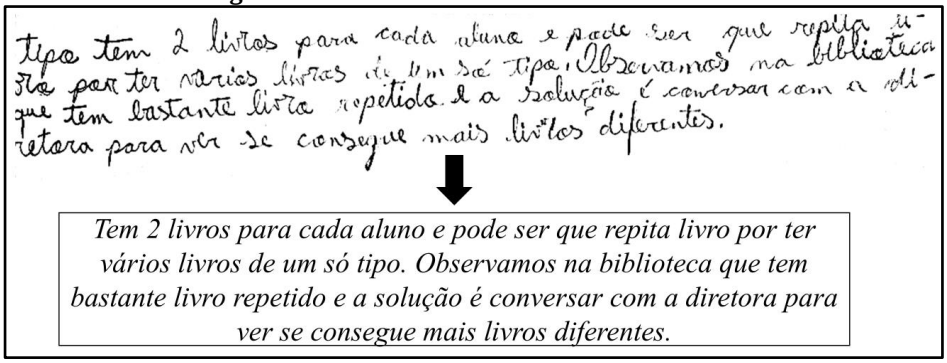


Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

Esse modelo aritmético, conforme a definição de Tortola (2016), consiste na aplicação de operações matemáticas sobre dados do contexto para representar a compreensão da situação-problema. No caso, a divisão serviu para quantificar a relação entre a quantidade de livros e o número de alunos, o que revelou uma média aproximada de 2 livros por criança. Esse resultado, embora aparentemente razoável do ponto de vista numérico, não considera aspectos qualitativos, como a variedade dos títulos disponíveis.

Importante destacar que o grupo não se limita ao cálculo numérico. Após obter o resultado, as crianças produzem uma justificativa escrita (Figura 3.10) expressando, em linguagem natural, suas interpretações e inferências. Esse registro configura um modelo textual, que segundo Tortola (2016), articula observações quantitativas e qualitativas. Nele, as crianças reconhecem que a escassez não estava necessariamente no número absoluto de livros, mas na repetição dos títulos. Dessa constatação, as crianças apontam ser necessário uma diversidade de títulos para atender aos interesses de leitura e garantir a variedade nas escolhas.

Figura 3.10- Modelo textual: Livros na biblioteca


Tipo tem 2 livros para cada aluno e pode ser que repita livro por ter vários livros de um só tipo. Observamos na biblioteca que tem bastante livro repetido e a solução é conversar com a diretora para ver se consegue mais livros diferentes.

Tem 2 livros para cada aluno e pode ser que repita livro por ter vários livros de um só tipo. Observamos na biblioteca que tem bastante livro repetido e a solução é conversar com a diretora para ver se consegue mais livros diferentes.

Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

Esse modelo textual (Figura 3.10), expressa em linguagem natural as observações e inferências das crianças sobre o problema. Nesse tipo de modelo, conforme Tortola (2016), é possível observar tanto a interpretação dos dados (a repetição de títulos) quanto a proposição de uma possível solução (buscar mais variedade de livros). O trecho escrito indica que a quantidade de livros, embora aparentemente suficiente do ponto de vista numérico, não atende plenamente à demanda por diversidade de títulos, o que mantém o sentimento de escassez inicialmente percebido.

Essa articulação entre o modelo aritmético e o modelo textual amplia a compreensão da situação-problema, evidenciando que a matemática, nesse contexto, funciona não apenas para medir e calcular, mas também para apoiar a reflexão crítica e a tomada de decisão. Enquanto o modelo aritmético trouxe objetividade, o modelo textual incorporou certa subjetividade da experiência das crianças e a dimensão qualitativa do problema.

Nessa atividade fica revelado como a modelagem matemática pode estimular não apenas o raciocínio lógico e o uso de operações, mas também a capacidade de argumentação, tomada de decisão e proposição de soluções baseadas em evidências. As crianças, ao combinarem diferentes formas de representação e análise (numérica e textual), constroem uma resposta que vai além do "sim" ou "não", como pode ser, de imediato, sugerido pela formulação do problema em estudo. Elas propõem um encaminhamento para a questão levantada, e isso evidencia a importância da modelagem matemática como prática investigativa.

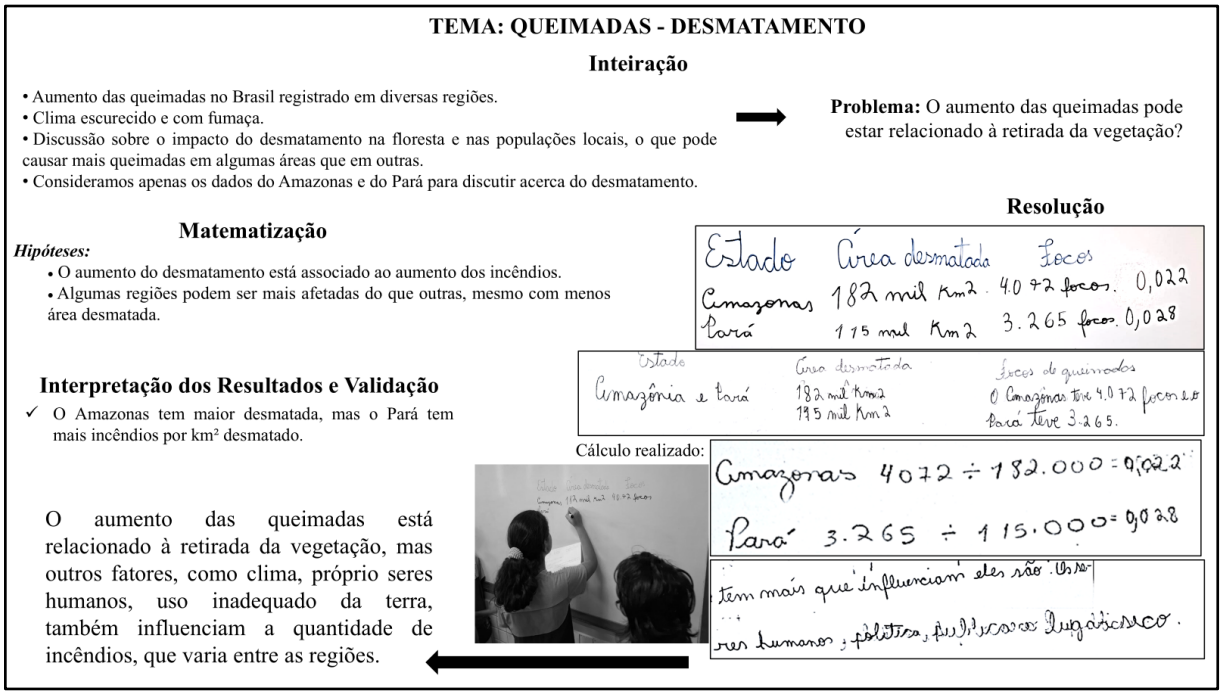
Em síntese, a atividade “Livros na biblioteca” permitiu a inferência de que o uso de operações matemáticas para resolver um problema pode extrapolar o fato de dar uma resposta numérica como solução. A reflexão em torno do modelo aritmético provoca mobilização de conhecimentos que articulam situação e resposta matemática e, dessa reflexão, emerge um modelo textual. A construção, associada, do modelo aritmético com o textual, favorece não apenas a quantificação da situação, mas também a problematização do dado obtido, ampliando a compreensão do contexto vivido. Nesse processo, os modelos produzidos assumem um papel interpretativo, articulando aspectos quantitativos e qualitativos em uma análise que busca sentido e relevância para a realidade das crianças. Tal dinâmica evidencia que, nos Anos Iniciais, os modelos matemáticos podem emergir como construções que integram raciocínio lógico, leitura de mundo e argumentação, revelando dimensões investigativas e comunicativas da modelagem que nem sempre se manifestam de forma tão clara em outras situações analisadas.

na atividade de modelagem matemática intitulada "Queimada-Desmatamento"

Essa atividade de modelagem matemática teve como foco a relação entre queimadas e desmatamento, um tema sugerido pelas próprias crianças. A escolha ocorreu devido à forte repercussão das queimadas que se alastraram pelo Brasil no primeiro semestre de 2024, impactando também a região em que as crianças moravam, como o céu escurecido e mudanças no clima. Esse cenário despertou o interesse em investigar a respeito.

O problema formulado pelo grupo foi: "O aumento das queimadas pode estar relacionado à retirada da vegetação?" Para responder a essa questão, a atividade foi desenvolvida ao longo de 5 horas aulas, por um grupo com 5 crianças. Sua síntese é ilustrada na Figura 3.11.

Figura 3.11- Síntese da atividade: Queimadas-Desmatamento



Fonte: As autoras

Para responder tal pergunta e dar um ponto de partida, a professora|pesquisadora[9] discute a reportagem "*Fumaça de queimadas na Amazônia e no Pantanal chega ao Rio, São Paulo e a mais oito estados"*[10]. A partir da leitura, as crianças decidem concentrar o estudo nos estados do Amazonas e do Pará, buscando compreender como o desmatamento evoluiu nessas regiões, tendo por base os dados presentes na reportagem. Em um primeiro momento, as

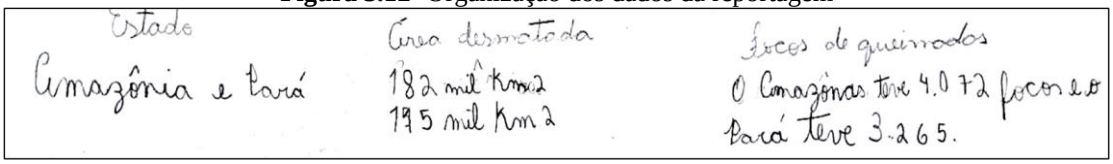
[9] Ao longo deste artigo, a barra vertical (|) será utilizada como recurso visual para representar a relação dialética entre os papéis de professor e pesquisador, conforme a proposta de Campos e Araújo (2015).

[10] O GLOBO. *Fumaça de queimadas na Amazônia e no Pantanal chega ao Rio, São Paulo e a mais oito estados*. 19 ago. 2024. Disponível em: https://oglobo.globo.com/brasil/noticia/2024/08/19/fumaca-de-queimadas-na-amazonia-e-no-pantanal-chega-ao-rio-sao-paulo-e-a-mais-oito-estados.ghtml

crianças demonstram dificuldades em organizar as informações lidas e seguir um caminho investigativo mais estruturado. Diante disso, observando a necessidade de mediação, a professora intervém com uma orientação didática, propondo a sistematização dos dados em uma tabela. A proposta foi a de que as crianças identificassem, para cada estado, a área desmatada e a quantidade de focos de queimadas. A professora dá então a seguinte orientação: *"Então, vamos ver... Primeiro faça uma tabela aí. Quantos que o Amazonas tem de desmatamento? E quantos focos de queimada? Então coloca aqui"* (sinalizando um lado da folha)*, "o estado, que é o Amazonas e o Pará. Qual é a área desmatada? E quantos são os focos de incêndio, de queimada?"*

Embora a professora tenha sugerido a construção de uma tabela, as crianças optam por organizar os dados de forma mais livre, agrupando as informações por estado, como mostra a Figura 3.12. Ainda que não tenha se configurado como uma tabela formal, essa forma de registro permite às crianças estruturar minimamente os dados extraídos da reportagem, servindo como apoio à análise da situação investigada.

Figura 3.12- Organização dos dados da reportagem



Fonte: Registros das crianças

Ainda que o registro elaborado pelas crianças não siga a estrutura formal de uma tabela com linhas e colunas bem definidas, ele pode ser compreendido como uma forma inicial de modelo tabular, pois apresenta dados organizados segundo variáveis (estado, área desmatada, focos de queimadas), o que possibilita comparação entre os elementos. Para Schrenk (2020, p. 28), o modelo "auxilia na interpretação da situação e no estabelecimento de reflexões e respostas para o problema investigado". Sob essa perspectiva, o registro produzido pelas crianças cumpre a função de modelo ao apoiar a interpretação da situação investigada, orientando a análise dos dados e favorecendo a mobilização de conhecimentos matemáticos para compreender a relação entre desmatamento e focos de queimadas.

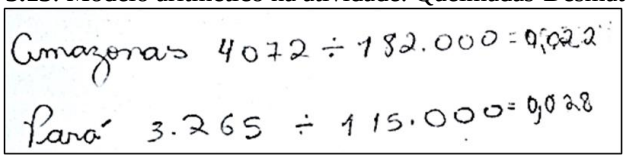
Após a organização dos dados nesse tipo de registro (modelo tabular) e debate entre as crianças, não há manifestações no sentido de continuidade na investigação, ou seja, as crianças não manifestam propostas sobre como prosseguir com a investigação. Diante da ausência de sugestões, mesmo após o questionamento da professora: "Então, o que é que nós vamos fazer?",

ela sugere uma possibilidade de continuidade, dizendo: “[...] você vai dividir por 182 mil e no Pará você vai fazer a mesma coisa”.

Essa intervenção da professora parece ter o objetivo de indicar um procedimento de análise, possivelmente, com a intenção de sugerir uma forma de relacionar os dados apresentados. Inferimos também que essa ação da professora parece se fazer necessária devido ao nível de escolaridade das crianças e a complexidade da operação envolvida.

A proposição feita pela professora direciona a atenção das crianças para a possibilidade de estabelecer uma relação entre o número de focos de incêndio e a área desmatada em cada estado, por meio do uso da divisão. A partir desse encaminhamento, as crianças passam a mobilizar operações aritméticas para calcular a razão entre as variáveis envolvidas. Na Figura 3.13 são apresentados os valores calculados pelas crianças: 0,022 focos por km² no estado do Amazonas e 0,028 focos por km² no Pará.

Figura 3.13: Modelo aritmético na atividade: Queimadas-Desmatamento

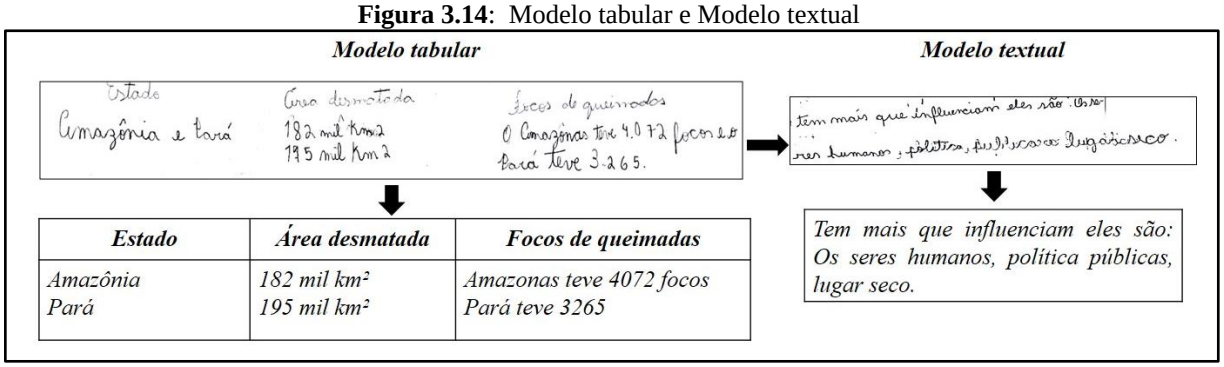


Fonte: Registros das crianças

A construção dessa relação numérica, por meio de cálculos entre focos de incêndio e área desmatada, caracteriza-se como um modelo aritmético, conforme a perspectiva de Tortola (2016), uma vez que envolve relações quantitativas entre grandezas, com base em procedimentos operatórios. Ainda que o cálculo tenha sido introduzido a partir da mediação da professora, sua realização pelos próprios participantes evidencia a mobilização de conhecimentos matemáticos em torno do problema investigado.

Desse modelo aritmético, as crianças produzem outro modelo tabular (Figura 3.14), em estágio inicial. Para Tortola (2016), o modelo tabular caracteriza-se pela sistematização de informações em colunas e linhas, e permite comparação entre variáveis e o levantamento de relações entre elas. Esse modelo tabular, além de desempenhar um papel importante no processo de investigação, facilita a análise e a compreensão da situação-problema, como é indicado nas considerações escritas pelas crianças.

Figura 3.14: Modelo tabular e Modelo textual



Fonte: Registros das crianças (dados originais), com organização e adaptação da autora.

Ainda que se possa inferir que esse modelo textual tenha sido estimulado por intervenções da professora|pesquisadora ao perguntar: *"Vamos ver se vocês entenderam?"*, logo após as crianças terem realizado os cálculos, ele denota certa compreensão delas em relação à situação. Também podemos dizer que intervenções como essa podem incentivar pensamento reflexivo, articulando matemática e contexto extramatemático. Esses estímulos didáticos, de certo modo, funcionam como convites à explicitação do raciocínio, proporcionando às crianças oportunidades de verbalizar e registrar suas interpretações e compreensões sobre o fenômeno investigado. Assim, embora a escrita não tenha surgido de modo espontâneo por parte das crianças, revela-se um recurso para tornar visíveis os sentidos atribuídos por elas à atividade, integrando os modelos produzidos e articulando linguagem escrita, argumentação e análise matemática.

Em síntese, a atividade "Queimadas e Desmatamento" revelou que os modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais podem assumir uma natureza complexa e multifacetada, mesmo em situações de investigação inicial. A combinação de modelos tabular e aritmético, ainda que mediados pela professora, expressa um movimento de organização e tratamento de dados que vai além da mera aplicação de operações. O modelo tabular, embora não formalizado de maneira convencional com colunas e linhas padronizadas, emerge como uma ferramenta de sistematização que permite às crianças identificar variáveis, compará-las e sustentar o raciocínio investigativo. Já o modelo aritmético, construído a partir da razão entre focos de queimadas e área desmatada, marca a transição de uma leitura descritiva dos dados para uma análise relacional, quantitativa e comparativa, o que amplia as possibilidades de interpretação do fenômeno em estudo.

3.6 Resultados e discussões

A intenção de compreender as especificidades dos modelos matemáticos produzidos por crianças em atividades de modelagem desenvolvidas no contexto dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tendo como questão de investigação: Que características carregam os modelos matemáticos desenvolvidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática? Nos fez conduzir um estudo em uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental, no qual se concentrou o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por essas crianças.

Ao longo do estudo foram desenvolvidas quatro atividades de modelagem matemática, as quais foram apresentadas e discutidas na seção anterior a partir do nosso foco investigativo. Assim, nessa seção, buscamos elucidar aspectos relacionados aos modelos matemáticos produzidos pelas crianças e apoiar os dizeres de English (2016) ao relatar que em modelagem matemática há construção progressiva de modelos com diferentes níveis de sofisticação.

Com base nas concepções de modelagem matemática para os Anos Iniciais apresentadas por Tortola (2016) e Almeida e Tortola (2016), nossa compreensão de modelo matemático é a de que ele é uma construção elaborada para representar uma situação ou servir como meio para interpretá-la. O modelo matemático também congrega articulação entre conhecimentos matemáticos e a situação em estudo. Outro fato considerado é que os modelos matemáticos elaborados pelas crianças nesse nível de escolaridade tendem a configurar-se como representações predominantemente informais, utilizando recursos visuais, textuais e aritméticos elementares, que são fundamentais para comunicar, organizar e estruturar o pensamento diante das situações-problema.

A partir da análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelas crianças evidenciamos que os modelos matemáticos produzidos por elas assumem formas diversas, como pictóricas, textuais, tabulares e aritméticas, e, algumas dessas formas, com indícios de aproximação ao modelo algébrico. Essa multiplicidade de formas reflete a heterogeneidade dos modos de pensar infantis, em consonância com o que Tortola (2016) define como a “forma de vida” dos Anos Iniciais, marcada por linguagens híbridas, articulações entre cotidiano e matemática e modos próprios de representação.

Outra constatação que fazemos é que em todas essas quatro atividades foram manifestados modelos matemáticos com classificações variadas, segundo as indicações de Tortola (2016). Isso, de certo modo, retrata que atividades de modelagem matemática são dinâmicas e ganham contornos, conforme conhecimentos daqueles que a desenvolvem.

Na atividade “Personalização de avatares em jogo eletrônico”, por exemplo, o modelo pictórico, que possibilita manipulação concreta acerca dos dados, foi o caminho adotado pelas crianças para pensar acerca do problema por elas enunciado. Esse modelo também foi determinante para promover a produção do modelo aritmético que, indica uma interpretação mais generalizada sobre o problema, permitindo respostas mais aligeiradas quando da alteração do número de peças: calças e camisetas. O modelo aritmético, nessa atividade, também sinaliza existência de aproximações com o modelo algébrico.

Ainda que não se tenha utilizado letras ou variáveis formais para responder ao problema, as crianças passam a generalizar a estrutura de combinação das peças de roupa por meio da multiplicação entre quantidades variáveis ($m \times n$), evidenciando um avanço rumo à abstração matemática. Esse movimento sinaliza compreensões das crianças sobre matemática, porém em associação com a temática da situação e, denota que indica um avanço no desenvolvimento do pensamento das crianças.

Modelos aritméticos com características diferentes desta, foram produzidos nas atividades: “Livros na Biblioteca” e “Queimadas- Desmatamento”. Nessas atividades o modelo aritmético simboliza uma forma de relacionar quantidades. Na atividade “Livros na biblioteca” o modelo aritmético serve para impulsionar as crianças a pensarem que realizar cálculos pode não ser suficiente para responder a um problema. Embora o resultado da divisão seja aparentemente razoável do ponto de vista numérico, há a interpretação, por parte das crianças, que esse número não considera aspectos qualitativos, como a variedade dos títulos disponíveis na biblioteca. Assim, esse modelo, associado à uma interpretação em relação à situação, é um gatilho para a produção de um modelo textual, que explicita sugestões de medidas para ampliar o acervo de livros.

O modelo aritmético na atividade “Queimadas-Desmatamento” tem duas associações diferentes. Ele decorre de uma reflexão em torno de um modelo tabular e ele gera um modelo tabular a partir de sua interpretação.

Modelos tabular e textual também são produzidos na atividade “Quantidade de água”. Nessa atividade o modelo textual indica uma generalização. Ele sugere que para saber a quantidade de água diária a ser consumida é necessário multiplicar o peso da pessoa por 3,5. Sendo assim, esse modelo não é a resposta ao problema, mas o caminho pelo qual a resposta pode ser obtida. Já o modelo tabular, nessa atividade, é uma forma de pensar o problema de forma mais pontual. O modelo tabular construído pelas crianças informa respostas específicas, considerando cada uma das crianças.

Como esses modelos, nos contextos em que foram produzidos, carregam características variadas, buscamos elucidá-las no Quadro 3.1.

Quadro 3.1: Modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais

Tipo de Modelo	Atividades em que apareceu	Representações associadas ao tipo de modelo	Condição para a produção do modelo
Pictórico	Personalização de avatares em jogo eletrônico	Representações visuais de dados; uso de figuras e esquemas; forte articulação com o contexto; baixa formalização.	Emergiram como estratégia de organização das ideias pelas crianças.
Textual	Quantidade de água; Livros na biblioteca; Queimadas-Desmatamento	Linguagem natural para explicar raciocínios ou interpretar a situação; pode associar-se a modelos aritméticos ou visuais; expressão de argumentos.	Frequentemente provocados por estímulos verbais da professora|pesquisadora e em alguns casos (como em Queimadas), voltado à interpretação crítica.
Aritmético	Personalização de avatares em jogo eletrônico; Queimadas-Desmatamento; Livros na biblioteca	Mobilização de operações básicas (soma, subtração, multiplicação); representação simbólica; transição do visual para o numérico.	Frequentemente impulsionado pela mediação da professora como forma de explicitar conceitos matemáticos.
Tabular	Quantidade de água; Queimadas-Desmatamento	Estruturação e sistematização de dados; favorece a comparação entre variáveis; organização ainda em estágio inicial (compreensível, mas sem padronização formal).	Mediado pela professora como forma de apoiar a análise dos dados e favorecer a visualização de padrões.
Algébrico (aproximação)	Personalização de avatares em jogo eletrônico	Uso da multiplicação como estratégia generalizadora; indícios de estrutura algébrica sem o uso formal de letras ou variáveis; raciocínio multiplicativo emergente.	Situações que exigem previsão de combinações; avanços na sistematização apoiados por questionamentos da professora.

Fonte: As autoras

O modelo pictórico emerge, de certa forma, com certa naturalidade, na atividade que envolve manipulação concreta ou visualização (atividade de personalização de avatares em jogos eletrônicos), indicando familiaridade das crianças com formas visuais de organizar ideias e comunicar seus raciocínios.

Os modelos textuais aparecem frequentemente associados a explicações, justificativas ou reflexões provocadas pela mediação da professora, como nas atividades sobre “Quantidade de água”, “Livros na biblioteca” e Queimadas-Desmatamento. Nessas atividades, a linguagem escrita, retratada em um modelo textual, funcionou como recurso para explicitar interpretações e consolidar sentidos atribuídos à situação-problema.

A produção dos modelos aritméticos está associada a sistematizações e à tentativa de explicitar conceitos matemáticos por meio do uso de operações básicas. De certo modo, esses modelos não operam de forma autônoma, eles são representativos da situação e significam aquilo que quem o produziu esclarece sobre ele.

Os modelos tabulares aparecem nas produções das crianças como uma forma de organizar informações ou compará-las. Ainda que esses modelos possam ser incentivados pela mediação da professora, eles indicam uma tentativa das crianças de sintetizar os dados de maneira mais estruturada.

Essas características que os modelos matemáticos, em suas diferentes formas, carregam são coerentes com a assertiva de Doerr e English (2003), ao afirmarem que os modelos matemáticos configuram-se como representações compostas por múltiplas formas de linguagem (como símbolos, esquemas, linguagem natural, tabelas), que se desenvolvem em resposta a situações específicas e se refinam no decorrer da atividade.

Por fim, a análise sugere que a produção de modelos matemáticos nos Anos Iniciais é marcada por registros predominantemente informais e expressivos, que articulam diferentes linguagens (natural, visual, numérica) e emergem da interação entre conhecimento prévio, mediação docente e contexto da atividade. Esses modelos revelam um movimento de construção de sentido no qual as crianças transitam entre registros diversos, mobilizando estratégias que dão forma às suas interpretações na conexão: fenômeno investigado e matemática.

3.7 Considerações Finais

Nesta investigação buscamos por características dos modelos matemáticos produzidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática. A análise empreendida corrobora que a modelagem matemática, nos Anos Iniciais, se constitui como uma prática pedagógica contextualizada e dinâmica, na qual os saberes matemáticos se articulam a formas variadas de representação e organização das informações. Também sinaliza que o uso de linguagem natural, desenhos, esquemas, tabelas e cálculos elementares expressa modos próprios de pensar das crianças, revelando compreensões que nem sempre se manifestam por meio de representações formalizadas, mas que são expressivas em termos de compreensão e construção de entendimentos.

As análises indicam que os modelos pictóricos e textuais refletem a familiaridade das crianças com linguagens expressivas e com o uso de recursos visuais e verbais para comunicar suas ideias. Já os modelos aritméticos e tabulares, bem como os indícios de generalização algébrica, estão mais diretamente vinculados à mediação da professora|pesquisadora. Nesse sentido, a produção desses modelos aponta para a importância das intervenções docentes nas práticas de modelagem matemática, em particular, no trânsito entre registros e no favorecimento da compreensão do que pode se comportar como resposta ao problema.

Cabe destacar que nem todas as atividades de modelagem matemática favorecem a emergência de todos os tipos de modelos. A natureza do problema proposto, os recursos disponíveis, o tempo destinado à atividade e as intervenções pedagógicas influenciam os caminhos seguidos pelas crianças e os tipos de representações mobilizadas. Dessa forma, a ausência de determinados modelos em algumas situações pode estar relacionada às especificidades da atividade desenvolvida, e não necessariamente à limitação das crianças em produzi-los.

Nesta investigação, os modelos matemáticos cumpriram objetivos que vão além da resolução do problema, pois atuaram como instrumentos interpretativos, comunicativos e investigativos, permitindo que as crianças não apenas resolvessem operações matemáticas, mas atribuíssem novas compreensões aos conceitos matemáticos mobilizados. De modo geral, percebemos que os modelos construídos nos Anos Iniciais dialogam com os conhecimentos prévios das crianças, com os recursos disponíveis no ambiente escolar e com as particularidades de cada situação investigada.

Diante disso, destaca-se a importância de o professor reconhecer e valorizar as formas diversas com que as crianças expressam sua compreensão matemática. Cada modelo produzido carrega marcas da experiência, da linguagem e das estratégias de pensamento da criança, devendo ser acolhido como parte do processo de aprendizagem. A mediação docente, nesse contexto, deve manter-se atenta à emergência de diferentes tipos de modelos, não para padronizá-los, mas para favorecer sua potencialização e aprofundamento.

Como possibilidade para investigações futuras, sugere-se aprofundar a análise das interações verbais e gestuais ocorridas durante as atividades de modelagem, bem como examinar com mais detalhe a influência da mediação docente na constituição dos modelos. Tais estudos podem contribuir para ampliar a compreensão sobre a complexidade do fazer matemático infantil e sobre os caminhos formativos possíveis na articulação entre modelagem e Educação Matemática nos Anos Iniciais.

3.8 Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Revista Acta Scientiae**, Canoas,, v. 14, n. 2, p. 200-214, maio/ago. 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, ano 17, n.22, pp. 19-35. Rio Claro SP: SBEM, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALVES-MAZZOTTI, A. Parte II – O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES MAZZOTTI, A. J., GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: ciências e Matemática. São Paulo: Contexto, 2019.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, p. 127, 2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. 336 p. Lisboa: Porto Editora, 1994.

CAMPOS, I.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador|professor. **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n..2, p. 324-339 maio/ago. 2015.

DOERR, H. M.; ENGLISH. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education,** Reston, v. 34, n. 2, 2003,p. 110-136.

ENGLISH, L. D. Developing early foundations through modeling with data. In C. Hirsch (Ed), Annual perspectives in mathematics educations: Mathematical Modeling Mathematics. p. 187- 195. Reston: **NCTM**- National Council of Teachers of Mathematics. 2016.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, 2003, p. 3-18.

FERREIRA, R. G; SOUSA, B. N. P. A. Modelagem e Educação Infantil: Percepções e ações dos professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 23, p. 54-71, 2021.

FOX, J. A justification for Mathematical Modelling Experiences in the Preparatory Classroom. In: GROOTENBOER, PETER AND ZEVENBERGEN, ROBYN AND

CHINNAPPAN, MOHAN (Eds.). **Proceedings 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,** p. 221-228, Canberra, Australia, 2006.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

GUERREIRO, R; MALHEIROS, A. P. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um olhar para a CNMEM. **Ensino e Tecnologia em Revista**, v. 8, n. 2, p. 207-224, 2024.

KOWALEK, R. Modelagem Matemática nos anos iniciais: percepções de futuros professores. **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 15, n. 1, p. 1-13, 2021.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Models and Modeling. In: A**nnual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education**, 28, Mérida. Proceedings... Universidad Pedagógica Nacional: Mérida, 2006, p. 92-95.

O GLOBO. **Fumaça de queimadas na Amazônia e no Pantanal chega ao Rio, São Paulo e a mais oito estados.** 19 ago. 2024. Disponível em: https://oglobo.globo.com/brasil/noticia/2024/08/19/fumaca-de-queimadas-na-amazonia-e-no-pantanal-chega-ao-rio-sao-paulo-e-a-mais-oito-estados.ghtml. Acesso em: 25 mar. 2025.

PELAQUIM, S. C. P.; SILVA, K. A. P. Alunos dos anos iniciais em atividades de modelagem matemática: uma análise semiótica dos diagramas. **REMATEC**, Belém, v. 19, n. 47, p. e2024013, 2024.

SCHELLER, M.; BONOTTO, D. de L.; VIALI, L. Desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais por meio da modelagem matemática na educação: possibilidade de utilização de linguagem simbólica. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 9, n. 21, dez. 2016. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2205. Acesso em: 10 ago. 2024.

SCHRENK, M. J.. **Tomada de consciência em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, Cascavel, p. 222, 2020.

SILVA, L. G. P; VERONEZ, M. R. D. Competências em modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Ensino Tecnológico em Revista**, Londrina, v. 8, n. 2, p. 61-81, ago. 2024.

SILVA, V. S. KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexões e apologia aos seus usos. In ALENCAR, Edvonete Souza de; LAUTENSCHLAGER, Etiene. **Modelagem Matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Sucesso, 2014, p. 07-24.

SOUZA, D. C. de; ROSA, C. C da. Modelagem matemática: uma possibilidade para o ensino de matemática nos anos iniciais. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 9, n. 21,

dez. 2016. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2232. Acesso em: 11 ago. 2024.

SOUZA, E. G.; LUNA. A.V. A. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: pesquisas, práticas e formação de professores. **REVEMAT**. ISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 9, Ed. Temática (junho), p. 57-73, 2014.

TEODORO, F. P.; KATO, L. A. Um olhar para a regulação discursiva em uma prática de modelagem matemática nos anos iniciais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v. 7, n. 13, p. 199-225, jan./jun. 2018.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Londrina, 2016a. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. A formação matemática de alunos do primeiro ano do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana. **Perspectivas da Educação Matemática**, [s. l.], v. 11, n. 25, 4 jun. 2018.

TORTOLA, E; ALMEIDA, L.M.W. **Modelos matemáticos e linguagem de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 12., 2016, São Paulo. *Anais...* São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

TRIGUERO, L. F.; KATO, L. A. Articulações entre os significados denotativos e conotativos para o conceito de proporção: uma experiência com Modelagem Matemática nos anos iniciais. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1–25, 2022.

VARELLA, D. **Quantos litros de água você precisa beber todos os dias?** 2019. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/videos/quantos-litros-de-agua-voce-precisa-beber-todos-os-dias/. Acesso em: 20 out. 2024.

VERONEZ, M. R. D.; FELIX DOS SANTOS, T. Atribuição de significado em modelagem matemática nos anos iniciais: uma interpretação semiótica acerca dos objetos matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 25, n. 1, p. 167–199, 2023. DOI: 10.23925/1983-3156.2023v25i1p167-199.

VILLA-OCHOA, J. A.; SOARES, M. R.; ALENCAR, E. S.. A modelagem matemática nos anos iniciais como perspectiva para o ensino de matemática: um panorama de publicações brasileiras em periódicos (de 2009 a 2018). **Educar em Revista**, v. 35, n. 78, p. 47-64, 2019.

4. CAPÍTULO IV – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interesse em investigar acerca dos modelos matemáticos desenvolvidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática, delineado por duas questões investigativas, conduziu-nos à realização de atividades com uma turma do quarto ano do Ensino Fundamental. A pesquisa foi organizada em formato multipaper de escrita, o que nos levou à elaboração de dois artigos que correspondem ao capítulo 2 e ao capítulo 3 desta dissertação.

Estes artigos, embora independentes, possuem elementos em comum e estão alinhados com o tema investigado. O primeiro artigo aborda a questão investigativa: *O que contribui na e para a construção de modelos matemáticos por crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?* O segundo artigo permeia a questão: *Que características carregam os modelos matemáticos desenvolvidos por crianças dos Anos Iniciais em atividades de modelagem matemática?*

Assim, norteados por estas questões, analisamos os modelos produzidos por crianças do quarto ano do Ensino Fundamental. Compreendemos modelo matemático como uma representação conceitual construída com linguagem matemática para descrever, explicar ou prever fenômenos (Lesh, Carmona; Hjalmarson, 2006; Doerr; English, 2003). Trata-se de um conjunto de símbolos e relações que traduzem uma situação real (Biembengut; Hein, 2013) e "dá forma" à solução de um problema (Almeida, Tortola; Merli, 2012). Nos Anos Iniciais, os modelos podem ser expressos por esquemas, gráficos, desenhos, materiais manipuláveis e linguagem natural (Doerr; English, 2003; English, 2016), sendo classificados em aritméticos, gráficos, tabulares, textuais, descritivos e algébricos (Tortola, 2016).

Na análise realizada, trazemos episódios e registros das produções das crianças, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, considerando as representações que emergiram de suas interações com os problemas propostos. Através dessas produções, foi possível observar como as crianças, mesmo nas primeiras etapas do Ensino Fundamental, foram capazes de construir modelos matemáticos variados, utilizando diferentes formas de representação, como esquemas, gráficos, tabelas, textos e até mesmo com material manipulável.

Este processo de construção de modelos evidenciou que, ao se envolverem com situações do cotidiano, as crianças mobilizam a matemática para resolver problemas, ao mesmo tempo em que desenvolvem suas próprias formas de compreender a matemática de maneira pessoal, em diálogo com suas experiências e conhecimentos prévios. A construção dos modelos não ocorre de forma isolada, mas resulta de um processo coletivo e dinâmico, que articula saberes prévios, vivências cotidianas, mediação docente e interações entre as próprias crianças.

Assim, no primeiro artigo (Capítulo 2) descrevemos e analisamos duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelas crianças. A primeira atividade analisada no artigo tem como temática “Cortinas na escola”; e a segunda tem como temática “Câmeras na escola”. Nossas discussões, nesse artigo, se pautaram para as escolhas, argumentações, decisões e direcionamentos das crianças que culminaram na produção de seus modelos matemáticos.

Ao analisar a primeira atividade, com o tema "Cortinas na escola", foi possível observar a forma como as crianças abordaram a modelagem matemática, partindo de uma situação cotidiana para explorar e aplicar conceitos matemáticos. A interação entre as crianças e o professor, assim como a reflexão coletiva durante o processo de modelagem, foi interessante para o desenvolvimento dos modelos produzidos. As escolhas das crianças, como o tipo de modelo a ser utilizado, foram influenciadas pelo conhecimento prévio que possuíam sobre o tema, pelas experiências cotidianas e pelo suporte oferecido pelo professor.

Embora as crianças tivessem poucas experiências com atividades de modelagem matemática, é possível perceber que, com o tempo, eles começaram a perceber a importância da organização e representação matemática no processo de resolução do problema. No decorrer dessa atividade, notou-se que, ao se depararem com situações práticas como o cálculo da quantidade de cortinas necessárias, as crianças não apenas utilizaram estratégias matemáticas (como multiplicação e divisão), mas também foram capazes de argumentar e justificar suas escolhas.

Já na análise da segunda atividade "Câmeras na escola" foi possível notar, como a modelagem matemática pode ser eficaz para a construção do conhecimento matemático nos Anos Iniciais, mesmo em contextos que envolvem uma intervenção docente mais orientada. A partir da investigação sobre a distribuição das câmeras de segurança na escola, as crianças foram levadas a explorar conceitos matemáticos de forma contextualizada, o que possibilitou o desenvolvimento de habilidades relacionadas à organização de dados, aplicação de operações matemáticas e representação gráfica. Durante a atividade, as crianças se depararam com diferentes desafios, como a necessidade de somar os cômodos e calcular a porcentagem de espaços monitorados, o que exigiu uma interpretação cuidadosa dos dados coletados. Esse processo de reflexão, especialmente evidenciado nos episódios de dúvida e revisão dos cálculos, mostrou que a modelagem matemática é um processo contínuo de investigação.

Embora a intervenção da professora|pesquisadora tenha sido direcionada em vários momentos, como nas explicações sobre o conteúdo de porcentagem e na condução da representação gráfica, as crianças demonstraram capacidade de compreensão e produção matemática, especialmente ao aplicar o conceito de porcentagem para determinar a cobertura

das câmeras. A utilização de representações visuais, como o círculo dividido, ajudou as crianças a visualizar a proporção de espaços monitorados e não monitorados, facilitando a interpretação dos dados.

Embora o modelo matemático final possa ser considerado simples, ele reflete uma compreensão proporcional do fenômeno investigado, alinhada com o nível de escolarização das crianças. De acordo com Burak (2010), muitas vezes, no Ensino Fundamental, um modelo simples pode ser suficiente para representar o problema abordado, desde que considere o conhecimento matemático disponível na faixa etária. Além disso, a atividade também ressaltou a importância da mediação pedagógica no processo de modelagem matemática. A professora|pesquisadora teve um papel importante em mediar as crianças para a organização dos dados e a construção de representações matemáticas, mostrando que a atuação do docente é importante para fomentar a autonomia dos alunos na elaboração de modelos.

Os aspectos que contribuíram na e para a construção de modelos matemáticos pelas crianças, identificados ao longo desta investigação, incluem o contexto da atividade, os recursos disponíveis, o tipo de mediação realizada pela professora e os modos como as crianças argumentam, decidem e direcionam suas ações. Essas contribuições além de favorecer a construção de modelos, também conferem sentido ao fazer matemático infantil, pois revelam como as crianças mobilizam diferentes formas de linguagem e representação para dar conta de situações reais.

No segundo artigo (Capítulo 3), foram analisadas quatro atividades de modelagem matemática desenvolvidas com uma turma dos Anos Iniciais, baseando-se principalmente na classificação proposta por Tortola (2016), que contempla os modelos descritivos, aritméticos, gráficos, tabulares, textuais e algébricos. As temáticas abordadas nas atividades foram: Quantidade de Água, Personalização de Avatares em Jogo Eletrônico, Livros na Biblioteca e Queimadas-Desmatamento. Nas atividades desenvolvidas, diversas formas de modelos matemáticos emergiram de maneira gradual, a partir das experiências cotidianas e das interações entre os alunos e o conteúdo, refletindo o processo de construção do conhecimento matemático nos Anos Iniciais.

Na atividade "Quantidade de água", foi possível identificar que os modelos matemáticos produzidos pelas crianças dos Anos Iniciais se caracterizam pela vinculação a contextos, uso de linguagens (cotidiana e matemática), e construção gradual de representações. Os modelos emergiram de forma progressiva: iniciando com um modelo textual (expressando a regularidade “peso × 35mL”), seguido por cálculos individuais com base nessa regra, e finalizando com um modelo tabular que sistematizou os dados.

Na atividade “Personalização de avatares em jogo eletrônico”, os modelos matemáticos produzidos pelas crianças caracterizaram-se por um percurso que se iniciou com a manipulação concreta e o uso de representações pictóricas, favorecendo a visualização das combinações possíveis, configurando modelo pictórico. A partir desse processo, as crianças passaram a verbalizar regularidades e recorrer à multiplicação para sistematizar os resultados, caracterizando a construção de um modelo aritmético com indícios de generalização, próximo de uma estrutura algébrica. Esse movimento evidencia a transição entre diferentes registros de representação e aponta para uma progressiva abstração, ainda que sem o uso formal de variáveis.

Na atividade “Livros na biblioteca”, emergiram dois modelos matemáticos: o modelo aritmético, construído a partir da divisão do número de livros pelo total de alunos, e o modelo textual, no qual as crianças expressaram, em linguagem natural, suas interpretações sobre a repetição dos títulos. Embora o cálculo indicasse uma média aparentemente suficiente, as crianças reconheceram que a escassez percebida estava relacionada à falta de diversidade. A articulação entre esses dois modelos não se limitou ao uso de operações, mas também envolveu análise crítica e argumentação. Nesse processo, as crianças mobilizaram diferentes formas de representação para compreender melhor a situação, revelando a modelagem matemática como uma prática que integra raciocínio lógico e leitura de mundo.

Já na atividade “Queimadas-Desmatamento”, as crianças investigaram se o aumento das queimadas está relacionado à retirada da vegetação. Durante a atividade, ainda que não tenham utilizado uma tabela formal, agruparam as informações, configurando um modelo tabular inicial, que permitiu comparações entre as variáveis. Com mediação da professora, calcularam a razão entre focos e área desmatada, produzindo um modelo aritmético que possibilitou analisar a situação de forma mais precisa. Além disso, o modelo textual, contribuiu para explicitar ideias, argumentos e interpretações. Assim, a atividade articulou diferentes formas de representação, textual, tabular e aritmética, permitindo que as crianças mobilizassem conhecimentos matemáticos em uma investigação com forte vínculo com seu contexto social e ambiental, uma vez que a proposta surgiu em função das queimadas que também estava afetando o clima na região onde residiam.

Nesse capítulo, portanto, a atenção recaiu sobre as especificidades que os modelos matemáticos carregam quando construídos por crianças em atividades de modelagem. Na análise observou-se a predominância de modelos pictóricos, textuais e aritméticos, os quais refletem a familiaridade das crianças com linguagens visuais, naturais e com operações básicas. Verificou-se também que, mesmo em contextos de pouca familiaridade com a modelagem

matemática, as crianças foram capazes de produzir modelos coerentes, ainda que marcados por traços de oralidade e informalidade, demonstrando apropriação progressiva de estruturas matemáticas mais sistematizadas.

De modo articulado, os dois capítulos apontam que a construção de modelos matemáticos nos Anos Iniciais é potencializada quando há espaço para a investigação, o diálogo e a valorização das ideias das crianças. As práticas de modelagem matemática, ao permitirem a problematização de situações reais, favorecem a emergência de diferentes tipos de modelos e oportunizam aprendizagens que transcendem o domínio de técnicas operatórias, pois envolvem interpretação, argumentação, validação e comunicação de ideias matemáticas.

Os resultados obtidos indicam que os modelos produzidos pelas crianças se constituem como respostas construídas progressivamente, e não como representações prontas e acabadas. O fazer modelagem revelou-se como um processo formativo, em que as crianças não apenas resolvem problemas, mas organizam, interpretam e comunicam suas ideias matemáticas por meio de diferentes linguagens. A mediação docente e o trabalho colaborativo entre os pares se mostraram fundamentais para favorecer esse processo, apontando para a importância de propostas que incentivem a investigação e o diálogo desde os primeiros anos da escolarização.

As crianças ao lidarem com situações próximas da sua realidade, puderam atribuir sentido aos conceitos matemáticos, expressar ideias por meio de diferentes registros e desenvolver formas próprias de pensar matematicamente. O que se observa, portanto, é que, quando apoiadas por intervenções sensíveis e por um ambiente investigativo, mesmo crianças em fase inicial de escolarização são capazes de produzir modelos ricos e conectados ao contexto em que vivem.

Como desdobramentos possíveis para pesquisas futuras, pode ser investigado o papel da formação docente na mediação de práticas de modelagem matemática nos Anos Iniciais, bem como os efeitos das interações entre pares na construção coletiva dos modelos matemáticos. Sugere-se, ainda, acompanhar longitudinalmente a evolução das formas de modelos produzidos pelas crianças ao longo dos anos escolares, bem como explorar como diferentes temáticas e contextos podem impactar os tipos de modelos que emergem.

Investigações como essas são necessárias, pois podem contribuir para o aprofundamento do entendimento sobre como a modelagem matemática pode ser implementada desde os primeiros anos, respeitando as formas próprias de expressão e raciocínio das crianças. Além disso, ao ampliar o conhecimento sobre as condições que favorecem a construção de modelos matemáticos nesse nível de ensino, tais pesquisas oferecem subsídios para a formação docente,

o planejamento de práticas pedagógicas mais adequadas a esse nível de ensino e a valorização da autoria infantil no processo de aprendizagem matemática.

Por fim, compreendemos que, mais do que produtos finais, os modelos construídos pelas crianças são expressões vivas de seu processo de aprender matemática. Eles carregam marcas de suas experiências, dúvidas, descobertas e estratégias. Ao reconhecer o valor desses registros e das trajetórias que os sustentam, defendemos a modelagem matemática como um espaço legítimo de escuta, autoria e formação. Que a escola seja, cada vez mais, lugar onde as crianças possam pensar com liberdade, construir com sentido e expressar com coragem suas ideias matemáticas.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Revista Acta Scientiae**, Canoas,, v. 14, n. 2, p. 200-214, maio/ago. 2012.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, p. 127, 2013.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

DOERR, H. M.; ENGLISH. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education,** Reston, v. 34, n. 2, 2003, p. 110-136.

ENGLISH, L. D. Developing early foundations through modeling with data. In C. Hirsch (Ed), Annual perspectives in mathematics educations: Mathematical Modeling Mathematics. p. 187- 195. Reston: **NCTM**- National Council of Teachers of Mathematics. 2016.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Models and Modeling. In: A**nnual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education**, 28, Mérida. Proceedings... Universidad Pedagógica Nacional: Mérida, 2006, p. 92-95.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Londrina, 2016a. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2016.